アルゴリズム 66－3
（1999．1．27）

最小枝付加節点領域枝連結度増加問題 –1-NA 枝連結化と 2-NA 枝連結化問題–

巳波弘佳
NTT マルチメディアネットワーク研究所
180-8585 東京都武蔵野市緑町 3-9-11
miwa@hashi.tnl.ntt.co.jp

伊藤大雄 †
† 豊橋技術科学大学
441-8580 愛知県豊橋市天伯町字雲雀ヶ丘 1-1
ito@tutics.tut.ac.jp

概要 グラフにおける節点と節点部分集合（領域）との間の連結度を表す概念として，節点領域連結度（以下，NA 連結度）というものが提案されている．この NA 連結度に関して，与えられたグラフに最小数の枝を付加して所望の NA（点，枝）連結度のグラフにする問題が考えられる．本稿では，最小枝付加 NA 枝連結度増加問題を扱い，特に 0-NA 枝連結領域グラフを与えられた数以下の枝付加で 1-NA 枝連結領域グラフにできるか否かを判定する問題が NP 完全であることを証明し，1-NA 枝連結及び 0-NA 連結領域グラフを最小枝数の付加で 2-NA 枝連結領域グラフにすることは多項式時間で可能であることを示す．

NA-Edge-Connectivity Augmentation Problem –Algorithms and Complexity for 1-NA-Edge-Connectivity Augmentation and 2-NA-Edge-Connectivity Augmentation–

MIWA Hiroyoshi
NTT Multimedia Networks Laboratories
3-9-11, midori-cho, musashino-shi, Tokyo
miwa@hashi.tnl.ntt.co.jp

ITO Hiro†
†Toyohasi University of Technology
1-1, aza-hibarigaoka, tenpaku-cho, toyohasi-shi, Aichi
ito@tutics.tut.ac.jp

Abstruct The Node-Area-connectivity (NA-connectivity) was defined as the measure of the connectivity between a vertex and a set of vertices (an area) on a graph. We can define a problem of augmenting a graph by adding the smallest number of edges to meet NA-(vertex or edge)-connectivity requirement. We first define the NA-edge-connectivity augmenting problem, and then prove that it is NP-complete to determine whether a 1-NA-edge-connected graph can be constructed from a given 0-NA-edge-connected graph by adding less than or equal to the given number of edges. In addition, we show that a 2-NA-edge-connected graph can be constructed in polynomial time from a given 1(or 0)-NA-edge-connected graph by adding the smallest number of edges.

1 はじめに

グラフにおける節点と節点部分集合（領域）との間の連結度を表す概念として，節点領域連結（以下 NA 連結）というものが提案されている [1, 2, 3]. NA 連結性は，通信ネットワークにおけるルーチング制御や設計に適用できる概念である．例えば，複数の外部ネットワークと複数の接続ポイントで接続しているネットワークにおいて，外部のホストと通信するための経路を設定する際，経路の負荷分散や耐故障性の観点から，少なくともいずれか一つの接続ポイントへの経路が複数独立に確保できていなければならない．この時，接続ポイントを増やしたりリンクを追加することで独立な経路数を確保したり，ネットワークの冗長なリンクを落としてルーチングテーブルの記憶に必要なデータ量を圧縮するなどの設計・制御問題を，接続ポイントの集合を一つの領域と考えることで NA 連結性の問題として扱うことができる．

NA 連結性については様々な性質が明らかにされている．例えば，領域に含まれる節点を最小限の個数だけ増やして所望の NA 枝連結度に増加させることは多項式時間で可能なこと [3]，一方 2-NA 点連結にすることは多項式時間で可能だが，3-NA 点連結にできるか否か判定する問題は NP 完全であること [4]，NA 枝連結度や節点領域間距離を保存する枝数最小の全域部分グラフを求める問題は NP 困難であるが，疎な全域部分グラフならば多項式時間で得られること [3, 5] などが分かっている．

このような問題に対して，枝の最小本数の付加で

所望の NA 連結度に増加させる問題が考えられる．これは，上記の通信ネットワークの例においては，外部ネットワークへの接続ポイントへの独立な経路数を増やすために，最小コストでリンクを増設する設計問題に対応する．

本稿では最小枝付加 NA 枝連結度増加問題を扱う．特に 0-NA 枝連結領域グラフを，与えられた枝数以下の枝付加で 1-NA 枝連結領域グラフにする問題は NP 完全であることを証明し，一方 0-NA 枝連結領域グラフ及び 1-NA 枝連結領域グラフを最小枝数の付加で 2-NA 枝連結領域グラフにすることは多項式時間で可能であることを示す．

任意の枝連結度のグラフに対して，最小本数の枝付加で所望の枝連結度に上げる問題が多項式時間で解けること（例えば，[6, 7, 8]）と比較すると，この結果は興味深い．

2 諸定義

無向グラフを $G = (V, E)$（節点集合 V，枝集合 E）とする．G の節点集合及び枝集合をそれぞれ $V(G), E(G)$ とも表記する．$V(G)$ の部分集合族 $X = \{W_i | W_i \subseteq V(G), i = 1, 2, \ldots p\}$ に対して，(G, X) を領域グラフと呼び，各 W_i を領域と呼ぶ．$V(G)$ の部分集合 $S, T \subseteq V(G)$ に対して，S と T を分離するカット $E(S, T; G)$ を $E(S, T; G) = \{(i, j) \in E(G) | i \in S, j \in T\}$ で定義する．$E(S, V(G) - S; G)$ を S-カットと呼ぶこともある．グラフ G の節点部分集合 X, Y $(X, Y \neq \emptyset, X \neq Y)$ に対して，$X \subseteq S, Y \subseteq V(G) - S$ である時，S-カットは X と Y を分離するという．X と Y を分離する任意のカットのサイズが k 以上の時，X と Y は k-枝連結であると言い，その最大値が k^* の時，X と Y の枝連結度は k^* であると言って $\lambda(X, Y; G)$ と表す．任意の $X, Y \subseteq V(G)$ に関する枝連結度の最小値を，G の枝連結度と呼び，$\lambda(G)$ と表記する．一つの節点 $x \in V(G), W \subseteq V(G)$ に対して $\lambda(\{x\}, W; G)$ を x と W の間の節点領域枝連結度 (NA 枝連結度，以下同様) と呼び，$\lambda(x, W; G)$ と略記する．領域グラフ (G, X) に対して，$\min_{x \in V(G), W \in X} \lambda(x, W; G)$ を領域グラフ (G, X) の NA 枝連結度と呼び，$\lambda(G, X)$ と表記する．

Theorem 2.1 (Ito [3]) 領域グラフ (G, X) が，λ-*NA* 枝連結であるための必要十分条件は，G の任意の t-枝連結成分 C_i^t $(1 \leq t \leq \lambda)$ が，次の条件のいずれかを満足することである．

1. C_i^t は *area complete*
2. $|E(C_i^t, V(G) - C_i^t)| \geq \lambda$

∎

ここで，NA 枝連結度増加問題を次のように定義する．

NA-Edge-Connectivity Augmentation Problem ((λ, δ, k)-NAECAP)
INSTANCE: *A λ-NA-edge-connected graph (G, X), positive integers δ and k.*
QUESTION: *Is there an edge set $\hat{E}$ $(|\hat{E}| \leq k)$ such that an area graph $(\hat{G}, X)$ where $\hat{G} = (V(G), E(G) \cup \hat{E})$ is $(\lambda + \delta)$-NA-edge-connected?* ∎

与えられたグラフ G に対して連結なカクタス (W, F) を用意し，このカクタスの各閉路枝に $\lambda(G)/2$ の容量を，各橋に $\lambda(G)$ の容量を割り当てたグラフを Γ とする．$C(G) = \{\{X, V - X\}(= \{V - X, X\}) | |E(X, V - X; G)| = \lambda(G)\}$ と定義し，更に $V(G)$ から $W(= V(\Gamma))$ への写像 $\varphi : V(G) \to W$ を用意し，$\varphi(U) = \{\varphi(v) | v \in U\} (U \subseteq V(G))$, $\varphi^{-1}(S) = \{v \in V(G) | \varphi(v) \in S\} (S \subseteq W)$ と定義する．ただし，$\varphi^{-1}(x) = \emptyset$ となる点も許容され，空点と呼ばれる．カクタスと写像の組 (Γ, φ) は次を満たすとき，$C(G)$ を表現するという．$C(G) = \{\{\varphi^{-1}(S), \varphi^{-1}(W - S)\} | \{S, W - S\} \in C(\Gamma)\}$．この時，$(\Gamma, \varphi)$ をグラフ G の最小カットのカクタス表現と呼ぶ．グラフ G の最小カット表現カクタスを $\Gamma(G)$ と表記する．

ある節点部分集合がすべての領域と共有節点を持つとき，その節点部分集合を area complete と呼ぶ．また，カクタスの節点部分集合に対応する元のグラフの節点部分集合が area complete である時も，そのカクタスの節点部分集合を area complete と呼ぶ．また簡単のため，カクタスの 2 つの節点のそれぞれに対応する G の節点部分集合から各々一節点を選び，その間に枝を付加することを，カクタスの節点間に枝を付加するという．

3 最小枝付加 1-NA 枝連結化

本節では，0-NA 枝連結領域グラフを与えられた枝数以下の枝付加で 1-NA 枝連結化できるか否か判定する問題 $(0, 1, k)$-NAECAP が NP 完全であることを示す．そのために，既知の NP 完全問題である Set Splitting Problem(SPP)[9] を帰着させる．

Set Splitting Problem[9]
INSTANCE: *Collection C of subsets of a finite set S.*
QUESTION: *Is there a partition of S into two subsets S_1 and S_2 such that no subset in C is entirely contained in either S_1 or S_2?* ∎

Theorem 3.1 *$(0,1,k)$-NAECAP is NP-complete.* ∎

Proof: クラス NP に属することは明らか．従って，解が一致することを示す．

SPP の問題例 (S,C) から，NAECAP の問題例を 0-NA 枝連結領域グラフ $(G,X), G=(S,\emptyset), X=C$，枝付加数上限を $|V(G)|-2$ として構成する．

1-NA 枝連結化問題の解から SPP の解を構成できることは次のようにして分かる．1-NA 枝連結化されたグラフにおける各 1-枝連結成分は C に含まれるすべての集合と共有節点を持つので，1-NA 枝連結成分の集合を 2 つに分け，それぞれに含まれる節点集合を S_1 及び S_2 に対応させた時，S_1 及び S_2 はそれぞれ C のすべてと共有点を持つ．

一方，SPP の解から 1-NA 枝連結化問題の解が構成できることは，S_1 及び S_2 を張る木を構成し，それぞれを 1-枝連結成分に対応させて得られたグラフの枝数が $|V(G)|-2$ 本（付加枝数上限）であることから分かる．

以上から，SPP の解と 1-NA 枝連結化問題の解が一致することが示された． ∎

4 最小枝付加 2-NA 枝連結化

本節では，1-NA 枝連結領域グラフ及び 0-NA 枝連結領域グラフを，最小数の枝付加により 2-NA 枝連結化することが多項式時間で可能であることを示す．

1-NA 枝連結領域グラフの各 1-枝連結成分の最小カット表現カクタスは木なので，以降では最小カット表現木と呼ぶ．最小カット表現木の葉において，area complete ではないものを ill vertex と呼ぶ．グラフが 2-NA 枝連結であるためには，ill vertex があってはならない．G の各 1-枝連結成分の最小カット表現木が含む ill vertex の個数が 1 個だけのものを Type(A) 成分と呼び，2 個以上のものを Type(B) 成分と呼ぶ．

以下，次のテーブルの各ケースを考察する．

	Type(B):0	Type(B):1	Type(B):2 or more
Type(A):0	Case1	Case4	Case7
Type(A):1	Case2	Case5	Case8
Type(A):2 or more	Case3	Case6	Case9

Note: 'Type(A):1 (2 or more)' は，グラフに含まれる Type (A) の 1-枝連結成分の個数が 1 個（2 個以上）であることを意味している．

Case1:
ill vertex が一つもないので，既に 2-NA 枝連結．

Case2:
他の葉 (すなわち area complete な葉) との間に枝を一つ張る．

元のグラフ G の最小カット表現木 $\Gamma(G)$（この場合，Type(A) 成分が一つだけなので，$\Gamma(G)$ は林ではなく一つの木になる）に上のように枝を付加したとき，$\Gamma(G)$ 内に ill vertex を含むサイクルができる．このサイクルに対応する G の節点集合 U は area complete であるものを含むので，area complete かつ 2-枝連結になる．

area complete である葉は少なくとも一つは存在する．さもなければ，ill vertex 一つだけからなる 1-枝連結成分が area complete ではないことを意味しており，与えられたグラフが 1-NA 枝連結であるという前提に反するからである．従って，上のように枝を張ることは常に可能である．

$\Gamma(G)$ の任意の最小カット（カットサイズは 1）のうち，U を 2 つに分割するカットのサイズは，新たな枝を必ず横切るために 2 に増加する．一方，それ以外の最小カットは，新たに付加した枝を横切らないため，カットサイズは変化しない．従って，U に含まれない任意の 2-枝連結成分は不変であり，その成分を G から分離するカットサイズも不変である．従って，U は 2-枝連結成分であり，しかも上で見たように area complete である．

以上から，枝付加後のグラフは Theorem2.1 の 2-NA 枝連結であるための条件を満足する．

次に付加枝数の最小性を示す．2-NA 枝連結化するためには，各 ill vertex は他の 2-枝連結成分との間に枝が一本張られなければならない．さもなければ，ill vertex を分離するカットサイズは 1 のままなので，この 2-枝連結成分（ill vertex）に関して，2-NA 枝連結であるための条件を満足させることができないからである．従って，上のアルゴリズムの付加枝数は最小である．

Case3:
すべての 1-枝連結成分を 2 つずつペアにして，各ペアの 1-枝連結成分の ill vertex に含まれる節点間に枝を張る．Type(A) の 1-枝連結成分が奇数個の場

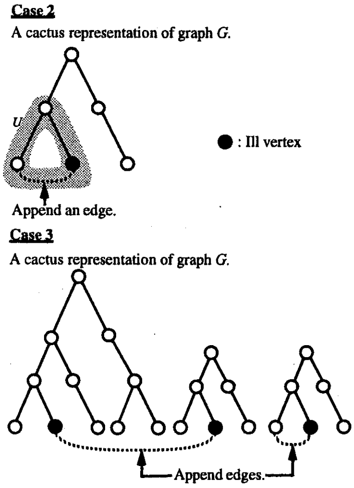

図 1: Case2 and Case3.

合，余った一つの ill vertex を含む Type(A) 成分に関しては，Case2 と同様に他の葉との間に枝を張る．

この時，各ペアは 1-枝連結成分となる．新しくできた各 1-枝連結成分においてサイクルはできないので，新たに 2-枝連結成分はできない．また，各 ill vertex は他の ill vertex との間に枝を張ることにより，その ill vertex を分離するカットサイズが 1 から 2 に増加する．従って，得られたグラフは 2-NA 枝連結であるための条件を満足する．

また Case2 と同様に，一つの ill vertex には少なくとも一つの他の 2-枝連結成分との間に一本の付加枝が張られなければならないので，少なくとも ill vertex の個数のちょうど半分の本数の（切り上げの）枝を付加しなければならない．従って，上のアルゴリズムの付加枝数は最小である．

Case4:

一つの Type(B) 成分 H の最小カット表現木 $\Gamma(H)$ において，area complete でない葉（つまり ill vertex）の集合を P，area complete な葉の集合を Q とする．また，$V(H)$ から $V(\Gamma(H))$ への写像を φ とする．

$\Gamma(H)$ において，P を張る部分木を X とする．このような X は，$\Gamma(H)$ が木なので一意に定まる

次に，Cyclic Edge Augmentation（以下，CEA）を，次のような枝付加方法として定義する．木 X を適当な節点から深さ優先探索で走査した順に ill vertex に番号を付ける．それらを I_i $(i = 1, 2, \ldots, |P|)$ とする．$(I_i, I_{i+\lceil|P|/2\rceil})$ $(i = 1, 2, \ldots, \lfloor|P|/2\rfloor)$ の各組において，I_i と $I_{i+\lceil|P|/2\rceil}$ の間に枝を張る．ただし，$|P|$ が奇数の場合は，$I_{\lceil|P|/2\rceil}$ と，Q の一つの節点との間に枝を張る．Q が空の場合は，P の適当な葉との間に枝を張る．

(4-1) $|P|$ が偶数の場合

X が area complete の場合は，X に CEA を適用する．area complete でない場合，$|E(V(X), V(\Gamma(H)) - V(X))| = 1$ ならば，X に対して CEA を行った後，Q の任意の一つの葉と P の任意の節点の間に余分に一本の枝を張る．

X に CEA を適用することによって，X に対応する元のグラフの節点部分集合 $\varphi^{-1}(X)$ は 2-枝連結成分となる．これは次のようにして分かる．まず，ill vertex の番号付けで $|P|$ と 1 は連続しているものとする．この時，木 X の任意の 1-カットによって 2 つに分けられる葉の集合のそれぞれにおいて，番号は連続している．CEA で付加された枝の両端の番号はちょうど $\lceil|P|/2\rceil$ だけ離れているので，X の任意の 1-カットで分けられる葉の集合の両方にまたがる付加枝が必ず存在し，それ故 X の任意のカットサイズは 2 以上となる．また，$\Gamma(H)$ は木なので，X を真に包含する G の節点部分集合で新たに 2-枝連結になるものはありえず，2-枝連結性に関して極大なので，CEA によって $\varphi^{-1}(X)$ は 2-枝連結成分になる．

この時，$\Gamma(H)$ における X を分割するカット以外の任意の 1-カットに関しては，新たに付加した枝はそれを横切らないため，カットサイズは変化しない．従って，X に含まれない各 2-枝連結成分は不変であり，その成分を G から分離するカットサイズも不変である．よって，X が area complete ならば，2-NA 枝連結であるための条件を満足する．一方，X が area complete でなくても 2-NA 枝連結性の条件を満たす．実際，(1)$|E(V(X), V(\Gamma(H)) - V(X))| \geq 2$ ならば，X を分離するカットサイズが 2 以上かつ $\varphi^{-1}(X)$ が 2-枝連結成分なので，2-NA 枝連結であるための条件を満足する．(2)$|E(V(X), V(\Gamma(H)) - V(X))| = 1$ ならば，X と $\Gamma(H) - X$ との間に枝が付加されるので，$\Gamma(H)$ 内に新たにサイクルができる．このサイクルと X との和集合に対応する G の節点集合 U は 2-枝連結となる．U は，area complete である Q の節点を含むので，U は area complete な 2-枝連結成分となっている．従って，2-NA 枝連結であるための条件を満足している．(3)$|E(V(X), V(\Gamma(H)) - V(X))| = 0$ になることはない．実際，これは $X = \Gamma(H)$ ということを意味しているが，H が 1-枝連結成分であることと与えられた領域グラフが 1-NA 枝連結であることから X は既に area complete であ

ることを意味しており，X が area complete でないことに矛盾するからである．

X が area complete でなく，かつ $|E(V(X), V(\Gamma(H)) - V(X))| \geq 2$ の場合は，各 ill vertex において他の 2-枝連結成分との間の付加枝はただ一つのみなので，付加枝数は最小である．X が area complete でなく，かつ $|E(V(X), V(\Gamma(H)) - V(X))| = 1$ の場合は，X と $\Gamma(H) - X$ との間に一つの枝が張られなければ X は 2-NA 枝連結の条件を満たしえないので，この枝は必須である．従って，ill vertex の個数の半分に 1 加えた本数が少なくとも必要であるが，上のアルゴリズムで付加される枝数に一致する．X が area complete の場合の付加枝数最小性は明らか．

(4-2) $|P|$ が奇数の場合
X に CEA を適用する．

CEA によって，付加枝で $\{I_{\lceil |P|/2 \rceil}\}$ と結ばれた Q の節点を含む $\Gamma(H)$ 内の一つのサイクルができる．このサイクルと X の和集合に対応する G の節点部分集合は 2-枝連結成分であり，Q の節点を含んでいることから area complete である．従って，この場合も 2-NA 枝連結であるための条件を満足している．Q が空の場合は，X は area complete でかつ $\varphi^{-1}(X)$ は 2-枝連結なので，やはり 2-NA 枝連結であるための条件を満足している．

付加枝数の最小性は明らか．

Case5:

(5-1) Type(B) 成分における $|P|$ が偶数の場合
X に対して CEA を行った後，X と Type(A) 成分の ill vertex との間に一本の枝を張る．

$\varphi^{-1}(X)$ は 2-枝連結成分となる．$|E(V(X), V(\Gamma(H)) - V(X))| \geq 1$ の場合，X を分離するカットサイズは 2 以上になる．なぜなら，$E(V(X), V(\Gamma(H)) - V(X))$ のすべての枝と，Type(A) 成分の ill vertex との間の付加枝をカットする必要があるからである．$|E(V(X), V(\Gamma(H)) - V(X))| = 0$ の場合は $X = \Gamma(H)$ であるが，この場合は X が area complete になる．また，Type(A) 成分の ill vertex も，これを分離するカットサイズは 2 である．更に X 以外で新たにできる 2-枝連結成分は存在しない．従って，2-NA 枝連結であるための条件を満足している．

(5-2) Type(B) 成分における $|P|$ が奇数の場合
X に CEA を適用するが，$I_{\lceil |P|/2 \rceil}$ に関しては，Q の節点の代わりに Type(A) 成分の ill vertex との間に一本の枝を張る．ただし，$|E(V(X), V(\Gamma(H)) - V(X))| = 0$ かつ $I_{\lceil |P|/2 \rceil}$ を含む X のパス枝（葉を一つしか含まないパスで，X から分離するカットサイズが 1 であるような X の部分木）Y のみと交わり $X - Y$ とは交わらない領域が存在するならば，番号を次のように付け替える．X のパス枝 $\tilde{Y}$ で，$X - \tilde{Y}$ が area complete であるようなものがあれば，$\tilde{Y}$ に含まれる葉が $I_{\lceil |P|/2 \rceil}$ となるように番号を付け替える．そのような $\tilde{Y}$ がなければ，$X - Y$ と Y の間に一本だけ余分に枝を張る．

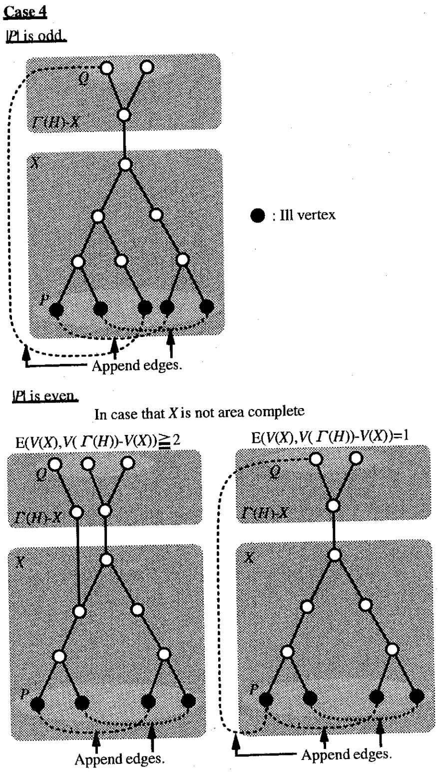

図 2: Case4.

P が最小カット表現木において 3 節点以上（奇数個だから）から成っている時，$\{I_{\lceil |P|/2 \rceil}\}$ を含む X のパス枝を Y とした時，CEA によって $\varphi^{-1}(X-Y)$ は 2-枝連結成分となり，これを分離するカットサイズは，$|E(V(X), V(\Gamma(H)) - V(X))| \geq 1$ の場合は 2 以上である．なぜなら，$E(V(X)-V(Y), V(Y))$ 及び $E(V(X), V(\Gamma(H)) - V(X))$ の枝を共にカットする必要があるからである．一方 $|E(V(X), V(\Gamma(H)) - V(X))| = 0$ の場合は，番号の付替えによって $X-Y$ は area complete であるか，これを分離するカット

サイズは 2 以上となる．$I_{\lceil |P|/2 \rceil}$ と Type(A) 成分の ill vertex に関しては，それぞれを分離するカットサイズは 2 となる．従って 2-NA 枝連結のための条件を満足している．

付加枝数の最小性は明らか．

上の $\tilde{Y}$ を見つけるための計算量は次のように評価できる．まず，パス枝は高々葉の数 $O(\log n)$ 個しかなく，X に対する一回の深さ優先探索で列挙できる．各パス枝ごとに，各領域がパス枝の補集合に含まれているか否かチェックする．これは最小カット表現木のすべての節点に対してチェックすれば十分なので，結局高々$O(pn \log n)$ 時間（p は領域数，n は G の節点数）で $\tilde{Y}$ が存在するか否か判定でき，存在するならば特定できる．また，$\tilde{Y}$ が含む葉から深さ優先探索して番号付けし，次に $I_{\lceil |P|/2 \rceil+1}$ を根として改めて深さ優先探索で番号付けを行えば，$\tilde{Y}$ が含む葉が $I_{\lceil |P|/2 \rceil}$ となっているようにできるため，線形時間で ill vertex の番号の付替えが可能である．

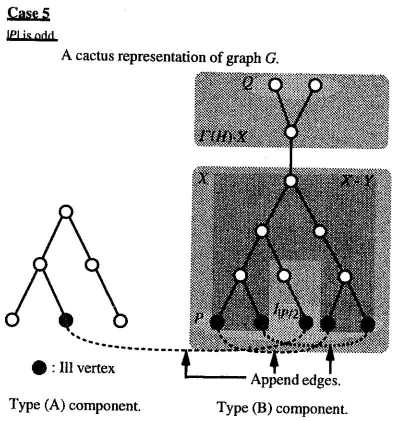

図 3: Case5.

Case6:

異なる 2 つの Type(A) 成分の ill vertex τ_1 及び τ_2 と，Type(B) 成分 H の I_1 及び $I_{\lceil |P|/2 \rceil+1}$ の間に (τ_1, I_1)，$(\tau_2, I_{\lceil |P|/2 \rceil+1})$ のように枝を張る．得られた 1-枝連結成分を $\tilde{H}$ とし，$\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{X}$ を Case4 と同様に定める．$\tilde{X} = \emptyset$ ならば，Case1,2,3 のいずれかを適用する．さもなければ，Type(A) 成分の個数が偶数個ならば，Case3 と同様に Type(A) 成分間で枝を張ると，結局 Case4 の場合に帰着でき，Type(A) 成分の個数が奇数個ならば，同様に Type(A) 成分間で枝を張ると，最後に一つ余る Type(A) 成分が出てくるので，結局 Case5 の場合に帰着できる．

最初に 2 つの Type(A) 成分と Type(B) 成分 H の間に枝を張った時，$\tilde{X} = \emptyset$ か，さもなければ，$\tilde{X}$ に含まれる ill vertex が一つかもしくは $|E(V(\tilde{X}), V(\Gamma(\tilde{H})) - V(\tilde{X}))| \geq 2$ が成り立つ．これは次のようにして分かる．まず，$\tilde{H}$ における ill vertex は Type(B) 成分 H に含まれていたものだけなので，$\tilde{X}$ は H に含まれている．もし $|E(V(\tilde{X}), V(\Gamma(\tilde{H})) - V(\tilde{X}))| = 1$ ならば，$\tilde{X}$ を分離するカットは H の最小カットなので，$\tilde{X}$ に含まれる ill vertex の番号は連続していなければならない．しかし実際は，枝付加の際の節点の選び方より，H の ill vertex の個数が 4 個以上ならば不連続であり（X からは I_1 または $I_{\lceil |P|/2 \rceil+1}$ が抜けているため），3 個ならば X は ill vertex を一つしか含まない．従って，ill vertex が 2 つ以上ならば $|E(V(\tilde{X}), V(\Gamma(\tilde{H})) - V(\tilde{X}))| = 1$ であることはない．また，$\tilde{H}$ は Type(A) 成分を含んでいるために area complete の葉を必ず持つため，$|E(V(\tilde{X}), V(\Gamma(\tilde{H})) - V(\tilde{X}))| = 0$ となることはない．従って，$\tilde{X}$ に含まれる ill vertex が一つかもしくは $|E(V(\tilde{X}), V(\Gamma(\tilde{H})) - V(\tilde{X}))| \geq 2$ が成り立つ．

以上から，Case4 を適用する時，$\tilde{P}$ の ill vertex が偶数個の場合でも，$|E(V(\tilde{X}), V(\Gamma(\tilde{H})) - V(\tilde{X}))| \geq 2$ なので，$\tilde{P}$ と $\tilde{Q}$ の間に枝が余分に張られることはない．また，Case5 を適用する時，$|E(V(\tilde{X}), V(\Gamma(\tilde{H})) - V(\tilde{X}))| \neq 0$ なので，Case5(5-2) の場合でも枝が余分に付加されることはない．従って，付加枝数は最小である．

Case7:

各 Type(B) 成分 $H_1, H_2, \ldots, H_t$ の最小カット表現木 $\Gamma(H_1), \Gamma(H_2), \ldots, \Gamma(H_t)$ において，各 $\Gamma(H_i)$ に対して Case4 と同様に，area complete でない葉を P_i，area complete な葉を Q_i とし，P_i を張る木を X_i とする．

各 X_i において，適当な節点から深さ優先探索順で番号付けし，$(I^1_{\lceil |P_1|/2 \rceil+1}, I^2_1), (I^2_{\lceil |P_2|/2 \rceil+1}, I^3_1), \ldots, (I^i_{\lceil |P_i|/2 \rceil+1}, I^{i+1}_1), (I^{i+1}_{\lceil |P_{i+1}|/2 \rceil+1}, I^{i+2}_1), \ldots, (I^t_{\lceil |P_t|/2 \rceil+1}, I^1_1)$ と枝を張る．これによって，すべての Type(B) 成分と共有節点を持つ一つのサイクルができる．このサイクルに含まれる最小カット表現木の節点集合を一点に縮約して新たに木を構成する．この木は，元のグラフ G に上のように枝を付加したグラフの最小カット表現木となっている．この最小カット表現木 $\Gamma(H)$ の area complete でない葉の集合を P，area complete な葉の集合を Q，P を張る部分木を X として，$P \neq \emptyset$ の時は

Case4 のアルゴリズムを適用する．

2-NA 枝連結化できることは明らか．以下，付加枝数の最小性を示す．

まず，$P=\emptyset$ となるのは，すべての 1-枝連結成分（このケースでは Type(B) 成分）において，ill vertex が 2 個しかない場合である．この時，Type(B) 間の枝の付加により ill vertex がなくなり，$\bigcup_{i=1}^{t} X_i$ に対応する G の節点部分集合は 2-枝連結成分となる．ある H_j において，$X_j=\Gamma(H_j)$ ならば $\bigcup_{i=1}^{t} X_i$ は area complete であり，さもなければ $\bigcup_{i=1}^{t} X_i$ を分離するカットサイズは 2 以上なので（Type(B) 成分の個数は 2 以上だから），2-NA 枝連結であるための条件を既に満足している．従って，この場合に限り Case4 のアルゴリズムを適用する必要はない．上記アルゴリズムでは，この場合 Case4 のアルゴリズムを適用せずに停止しているので，付加枝数は最小である．

$P\neq\emptyset$ の場合，area complete の葉を持つ 1-枝連結成分が 2 つ以上あり，かつ X が ill vertex を 2 つ以上含むならば $E(V(X),V(\Gamma(H))-V(X))\geq 2$ である．まずこれを示す．Type(B) 間の枝付加後においてサイズ 1 のカットが新たに生じうるのは，一つの 1-枝連結成分を除き他のすべてが area complete の葉を持たない場合のみであり，それ以外の場合（つまり area complete の葉を持つ 1-枝連結成分が 2 つ以上の場合）はサイズ 1 のカットが新たに生じることはない．従って後者の場合，もし $|E(V(X),V(\Gamma(H))-V(X))|=1$ ならば，X は Type(B) 間枝付加前には一つの 1-枝連結成分 H_B に含まれていたことを意味する．X を分離するカットサイズが 1 つまり最小カットなので，H_B において X に含まれる ill vertex の番号は連続していなければならない．しかし実際は，Type(B) 間枝付加の際の節点の選び方より，H_B の ill vertex の個数が 4 個以上ならば不連続であり（X からは I_1^B または $I_{\lceil|P_B|/2\rceil+1}^B$ が抜けているため），3 個ならば X は ill vertex を一つしか含まない．従って，area complete の葉を持つ 1-枝連結成分が 2 つ以上あり，かつ X が ill vertex を 2 つ以上含むならば，$E(V(X),V(\Gamma(H))-V(X))\geq 2$ でなければならない．

このことから，$|P|$ が偶数個の時（つまり X が ill vertex を 2 つ以上含む），area complete の葉を持つ 1-枝連結成分が 2 つ以上あるならば，X を分離するカットサイズは 2 以上である．一方 area complete の葉を持つ 1-枝連結成分が一つ以下ならば，一つ以上の H_j において $X_j=\Gamma(H_j)$ なので X は area complete である．

つまり，$|P|$ が偶数個の時，X は area complete であるか X を分離するカットサイズが 2 以上なので，Case4 を適用する際，X の ill vertex 間の付加枝以外に P と Q の間に余分な枝を張られることはない．従って，$|P|$ が偶数個の場合には，ill vertex の個数のちょうど半分の枝数が付加されるので，付加枝数は最小である．また $|P|$ が奇数個からなっている場合も，ill vertex の個数の半分の切り上げの個数の枝が付加されるので，やはり付加枝数は最小である．

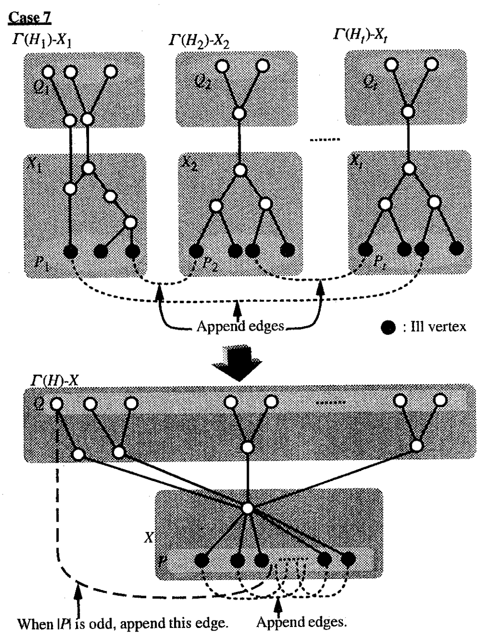

図 4: Case7.

Case8:

Case7 で H を構成した後，Case5 に帰着する．この時，H は 2 つ以上の area complte な 1-枝連結成分を含むので，X の ill vertex を含む任意のパス枝 Y に対して，$X-Y$ は area complete である．従って，Case5(5-2) で Y と $X-Y$ の間に余分に枝が張られるようなことは起こり得ない．従って付加枝数は最小である．

Case9:

Type(A) の 1-枝連結成分を 2 つずつペアにして ill vertex 同士で枝を張る．Type(A) 成分が偶数個の場合は Case7 の場合に帰着する．奇数個の場合は

Case8 に帰着する．

最小カット表現木の構成，ill vertex の番号付けと枝付加は線形時間でできる．しかし，Case5(5-2) において番号の付替えの処理に $O(pn \log n)$ 時間かかるため，全体の計算量は $O(pn \log n)$ となる．

以上をまとめて，次の定理を得る．

Theorem 4.1 $(1,1,k)$*-NAECAP can be solved in* $O(pn \log n)$ *time.* ∎

0-NA 枝連結領域グラフを最小枝数の付加で 2-NA 枝連結化することも多項式時間で可能である．以下に概略を示す．

任意の 0-NA 枝連結領域グラフは，area complete でない 1-枝連結成分の集合 $F_1(\neq \emptyset)$ と，Type(A) 成分の集合 F_2，Type(B) 成分の集合 F_3 との合併である．

$|F_2| \geq 2$ の時，F_1 と F_3 の 1-枝連結成分の集合 $H_1, H_2, \ldots, H_t$ に対して，$(I^1_{\lceil |P_1|/2 \rceil+1}, I^2_1)$, $(I^2_{\lceil |P_2|/2 \rceil+1}, I^3_1)$, $\ldots$, $(I^i_{\lceil |P_i|/2 \rceil+1}, I^{i+1}_1)$, $(I^{i+1}_{\lceil |P_{i+1}|/2 \rceil+1}, I^{i+2}_1)$, $\ldots$, $(I^{t-1}_{\lceil |P_{t-1}|/2 \rceil+1}, I^t_1)$ と枝を張る．ただし，ill vertex が一点 I^i_1 からなっている 1-枝連結成分に対しても，$(I^{i-1}_{\lceil |P_{i-1}|/2 \rceil+1}, I^i_1)$,$(I^i_1, I^{i+1}_1)$ と枝を付加する．この時，ill vertex を 2 つ以上，area complete の葉も 2 つ以上持つ 1-枝連結成分ができている．その後 Case6 と同様の処理を行う．

$|F_2| = 1$ の時，F_1 と F_3 に含まれる ill vertex の数の偶奇で場合分けする．ただし，F_1 の 1-枝連結成分で ill vertex が一点からなるものに対しては，ill vertex が 2 個あると数える．

偶数の場合，F_1 と F_3 の成分の合併集合が area complete ならば，Case7 と同様に成分間に枝を張って得られた 2-枝連結成分と，F_2 の成分の ill vertex との間に 1 本の枝を張る．一方，area complete でないならば，得られた 2-枝連結成分と F_2 の成分の間に 2 本の枝を張る．

奇数の場合，ill vertex が 3 個以上の成分のパス枝 Y の中で，F_1 と F_3 の成分の合併集合からその Y を除いたもの Y^c が area complete となっているものを調べる．そのようなパス枝 $\tilde{Y}$ が存在すれば，$\tilde{Y}$ に含まれる ill vertex と F_2 の ill veretex 間に枝を張った後，Case7 と同様に成分間に枝を張る．そのようなパス枝が存在しなければ，適当なパス枝 Y を選んで同様に枝を付加し，更に Y と Y^c の間に枝を余分に 1 本張る．

Theorem 4.2 $(0,2,k)$*-NAECAP can be solved in* $O(pn \log n)$ *time.* ∎

5 まとめ

本稿では，最小枝付加 NA 枝連結度増加問題を扱った．その結果，0-NA 枝連結領域グラフを与えられた枝数以下の枝付加で 1-NA 枝連結化できるか否か判定する問題は NP 完全であることを示し，0-NA 枝連結領域グラフ及び 1-NA 枝連結領域グラフを最小枝数の付加で 2-NA 枝連結領域グラフにすることは多項式時間で可能であることを示した

しかし，より一般に λ-NA 枝連結領域グラフを最小枝数の付加で $(\lambda+\delta)$-NA 枝連結領域グラフにすることが多項式時間で可能かどうかはまだ分からない．これは今後の課題とする．

参考文献

[1] H. Ito. Node-to-Area connectivity of graphs. *Transactions of the Institute of Electorical Engineers of Japan*, 11C(4):463–469, 1994.

[2] H. Ito. Node-to-Area connectivity of graphs. In M. Fushimi and K. Tone, editors, *Proceedings of APORS94*, pages 89–96. World Scientific Publishing, 1995.

[3] H. Ito and M. Yokoyama. Edge connectivity between nodes and node-subsets. *Networks*, 31(3):157–164, 1998.

[4] H. Ito, M. Ito, H. Uehara, and M. Yokoyama. Finding the minimum node-subset for being k-node-connected between each node and the node-subset for $k \leq 3$. In *Technical Report of IEICE*, volume COMP97, pages 33–40, 1998.

[5] H. Miwa and H. Ito. Sparse spanning subgraph preserving connectivity and distance between vertices and vertex subsets. *IEICE Trans. Fundamentals*, E81-A(5):832–841, 1998.

[6] D. Naor, D. Gusfield, and C. Martel. A fast algorithm for optimally increasing the edge-connectivity. In *Trans. 31st Annual IEEE Symp. Fund. Comp.*, pages 692–707, St. Louis, 1990.

[7] H. Nagamochi and T. Ibaraki. A faster edge splitting algorithm in multigraphs and its application to the edge-connectivity augmentation problem. In E. Balas and J. Clausen, editors, *Lectures Notes in Computer Science*, number 920, pages 401–413, Copenhagen, 1995. Springer-Verlag.

[8] H. Nagamochi and T. Ibaraki. Augmenting edge-connectivity over the entire range in $\tilde{O}(nm)$ time. In *Proceedings of 8th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 649–658, New Orleans, 1997.

[9] M. Garey and D. Johnson. *COMPUTERS AND INTRACTABILITY.* W. H. FREEMAN AND COMPANY, San Francisco, 1978.