アルゴリズム 66－1
（1999. 1. 27）

次数制限のある最短路木作成アルゴリズム

豊橋技術科学大学　情報工学系
伊藤 大雄[†], 藤田 正人[‡], 上原 秀幸, 横山 光雄
† ito@tutics.tut.ac.jp, ‡ fujita@yilab.tutics.tut.ac.jp

概要

情報ネットワークにおいて情報の送信元のノードが唯一で, それ以外のノードが受信ノードであるような放送型通信を考える。この時、各ノードが情報パケットをコピーする能力を持っているものとする。情報を配信するための最適な経路は、情報ネットワークにおいて送信元のノードを根とする最短路木を構成することで得られる。しかし、ノードごとにコピーすることのできる情報パケット数の上限を設けたネットワークを考えた場合、情報を配信するための経路においてノードごとに与えられた次数制限を満足する問題として扱う必要がある。本論文では、この時の最適な経路である次数制限を満たす最短路木を作成するアルゴリズムを提案する。また、このように次数制限を与えることで、問題の複雑さにおいて NP 完全に陥りやすいが、提案するアルゴリズムは多項式時間で動作する。

A Polynomial-Time Algorithm for Finding Degree Constrained Shortest Path Tree

Toyohasi University of Technology
Department of Information and Computer Sciences
ITO Hiro[†], FUJITA Masato[‡], UEHARA Hideki, YOKOYAMA Mituo
† ito@tutics.tut.ac.jp, ‡ fujita@yilab.tutics.tut.ac.jp

abstract

Let $G=(V,E)$ be a network with single source s and let $V-\{s\}$ be a set of Receivers. We consider a broadcast communication so that packets can be copied for every vertex. Then optimal route is shortest path tree rooted to s. Futhermore, we set an upper bound for a number of copying packets with every vertex. Copy number of a vertex is regarded as degree of the vertex. We propose an $O(D^{\frac{3}{2}}m\sqrt{n})$ time algorithm for constructing degree constrained shortest path tree rooted to s, where D is the maximum value of degree upper-bounds.

1 はじめに

情報ネットワークにおいて、多数のユーザーに対し同一情報を配信する通信形態が存在する。このような通信形態で、送信元ノードが唯一であるような一対多の情報ネットワークを考える。一対多通信には、放送型通信やマルチキャスト通信といった形態のものがあげられ、放送型通信はネットワーク上のすべての

ノードへ情報パケットを送信するもので、マルチキャスト通信は情報を必要とする受信ノードへの放送である。次に一対多通信の実現について述べると、一般的には送信元のノードで必要とされるだけ情報パケットをコピーし、受信ノードへ送信する手法がとられている（ユニキャスト通信 [1]）。しかし、この手法は受信ノードの数に比例してネットワーク上のトラフィックと送信元のノードの処理が増大する。このことから、マルチキャスト通信 [1] でみられるような、必要に応じて任意のノードでコピーを行うことによって、受信ノードへ情報パケットを送信する手法が検討されており、この手法はマルチメディアデータのような大容量データを扱うネットワークでは大変有効である。

本論文で扱う情報ネットワークにおいても、各ノードが情報パケットをコピーする能力を持つものとし、情報パケット 1 つにつき 1 通信回線が使用されるものと考える。ここで、一対多通信を実現する経路を選択する問題を考える。（以下、一対多経路選択問題と呼ぶ。）一対多通信の経路の構成法に関しては、さまざまな手法が検討されているが、一般的なものとして最短路木法 (Shortest Path Tree: SPT 法) があげられる。これは送信ノードから、各受信ノードまでの通信時間が最短である木を経路として求める手法である。この手法では各ノードでコピーすることのできる情報パケット数については考慮されていない。ここで、本論文ではノードごとにコピーすることのできる情報パケット数の上限が存在するネットワークを考える。これは言い換えると、各ノードで送信することのできる情報パケット数の上限であり、さらに言い換えると、構成される一対多通信の経路上における各ノードでの出次数の上限である。本論文では情報ネットワークの他に、このような各ノードでの出次数制限を入力として与えた場合の一対多経路選択問題を考え、この解を求める最短路木作成アルゴリズムを提案する。ただし、一対多通信の形態としては放送型通信を考え、受信ノードはネットワーク上の全ノードである場合に限って議論している。

このように次数制限を与えることは、問題の複雑さのクラスという点で見ればNP 完全に陥りやすい。例えば、全域木問題に次数制限を与えた場合 [2, pp. 206] などがそうである。しかし、本論文で提案する次数制限のある最短路木作成アルゴリズムは、与えられる次数制限の最大値を D、ネットワークを構成するグラフ G の全ノード数を n、全てのノード間の通信回線数を m としたとき、$O(D^{\frac{3}{2}}m\sqrt{n})$ の多項式時間で動作する。（ここで $D = O(n)$ であることに注意）

2 章では、本論文で扱う一対多経路選択問題の定義と、経路選択問題の複雑さについて議論する。3 章では、次数制限のある最短路木作成アルゴリズムを提案し、その時間計算量についての評価を行ない、4 章でむすぶ。

2　一対多経路選択問題

2.1　定義

ここでは、本論文で扱う一対多経路問題の定義を行なう。本論文では、情報ネットワークを、単純有向グラフ $G = (V, E)$ で表現する。節点集合 V はネットワーク上のノードに対応し、枝集合 E はノード間の通信回線に対応する。ここで、それぞれの枝 $e \in E$ は実数の重み $l(e) > 0$ をもつ。これはノード間の通信回線での、情報パケット送信の際の遅延時間として与えられるものであるが、以下では便宜的に重み $l(e)$ を枝 e における距離の指標として扱う。また、各ノードでの情報パケットのコピー性能に対応する指標として出次数制限 $d(x)$　$(x \in V)$ が、各節点に与えられている。ここで、実際には、各節点においてコピーのもとになる情報パケットを受信して持っているので、出次数はコピー性能の上限 $d(x) + 1$ になるが、以下では簡略して、$d(x)$ を出次数の上限としてそのまま用いて考えている。

さらにグラフの入力の際には送信元のノードに対応する節点 s が与えられる。ここで、節点 s は節点集合 V の任意の 1 点とし、通信形態として放送型通信を考えているので、受信ノードは節点 s 以外の全節点である。このことから、構成される経路は節点 s を根とする有向木として扱うことができる。

これより、本論文で対象とする次数制限を持つ一対多経路探索問題を以下のように定義する。

[入力]

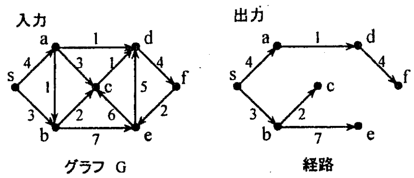
- 単純有向グラフ $G = (V, E)$
  (V: 節点集合, E: 枝集合)
- （送信元に対応する）節点 $s \in V$
- 距離 $l(e)$: 各枝 $e \in E$ のもつ実数の長さ
- 出次数制限 $d(x) \geq 0$　$(\forall x \in V)$

[問題]

- 節点 s を除く全ての節点 $r \in V - \{s\}$ において、節点 s からの経路が最短距離であり、かつ、全ての節点 $x \in V$ において出次数が $d(x)$ 以下で

あるような、節点 s を根とする有向最短路木の存在を判定し、存在する場合にそれを出力せよ。

具体的な例を図1に示す。



節点	s	a	b	c	d	e	f
次数制限 d(x)	2	2	2	1	1	0	0

図1. 一対多経路選択問題例

この例では、便宜的に節点をアルファベットで示している。また、枝の持つ長さは実数を許すが、簡略のためここでは整数で与えている。さらに、入力として各節点に出次数制限が与えられている。これらを入力とする次数制限を持つ一対多経路選択問題の出力は図1の右のようになる。それぞれの節点への経路は最短経路で、かつそれぞれの節点は出次数制限を満足している。

2.2 経路選択問題に関する複雑さ

1章でも述べたが、グラフ関連の問題において次数制限などの制約を与えることにより、その問題の複雑さがNP完全に陥りやすいという傾向がある。その例として、本論文で扱う問題と類似した問題の NP 完全性を以下に紹介する。まず最初に、次数制限が与えられた全域木問題 [2] を紹介する。(以下、次数制限全域木問題と呼ぶ。) これは、出次数制限 $d \geq 1$ が与えられ、全ての節点において出次数が d 以下で抑えられるような全域木を求める問題である。この問題はすでに NP 完全性が証明されている。これは、$d \leq 1$ のとき、ハミルトン路問題となることからほぼ自明である。

次に、距離制限と次数制限が与えられた全域木問題を紹介する。(以下、距離次数制限全域木問題と呼ぶ。) これは文献 [3] をヒントに得た問題で、入力として単純有向グラフ G' と根となる節点 s が与えられ、グラフ G' の最短路における最遠点までの距離を L_{max} としたとき、これを経路長の上限とする距離制限と、前述したような出次数制限 d が与えられる。出力はこれらの制限を満足する全域木 T である。この問題もまた、NP 完全であることを証明する。

[証明]

距離次数制限全域木問題 $\in NP$ であることは自明であるので、距離次数制限全域木問題が既知の NP 完全問題に多項式時間で帰着することを次に示す。ここで、既知の NP 完全問題として、前述の次数制限全域木問題を用いる。この次数制限全域木問題の問題例を $G = (V, E)$ $(|V| = n,\ |E| = m)$ とする。このときの距離次数制限全域木問題の問題例を作成する。

それぞれ要素が $n-1$ 個の節点集合 V_+ と枝集合 E_+ を用意する。グラフ G 中の根となる節点 s から節点集合 V_+ を枝集合 E_+ を用いて図2のようにパス状に連結する。このようにすることで、経路の距離の上限 L_{max} において最大の値である $n-1$ を距離制限 $L_{max} = n-1$ とする距離次数制限全域木問題の問題例 $G' = (V', E')$ $(V' = V \cup V_+,\ E' = E \cup E_+)$ が得られ、これは $O(|V|) = O(n)$ 時間で作成可能である。

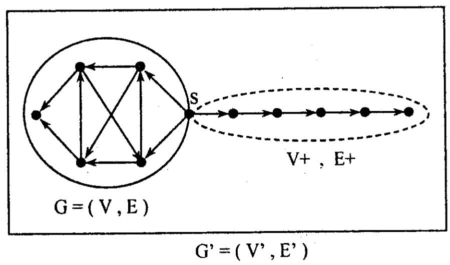


図2. 距離次数制限全域木問題の問題例

これより、問題例 G において出次数制限 d を満足する全域木が存在する時、問題例 G' において距離制限 $L_{max} = n-1$ と出次数制限 d を満足する全域木が存在することが明らかである。また反対に、問題例 G' において距離制限 $L_{max} = n-1$ と出次数制限 d を満足する全域木が存在する時、問題例 G において出次数制限 d を満足する全域木が存在することも明らかである。

よって、全域木問題に距離制限と次数制限が与えられた全域木問題が NP 完全問題であることが示された。 □

本論文で扱う問題に類似したこれらの問題は、次数や距離に制限を与えることで問題の複雑さという点で NP 完全のクラスに陥ってしまった例である。しかし、本論文で扱う次数制限を持つ一対多経路選択問題は、求める経路が全域木というだけでなく、各節点までの経路が最短距離であるという制約を導入し、また各節点に対して次数制限を与えることで、多項式時間で経路を選択することが可能であるアルゴリズムを実現することができた。

3　次数制限のある最短路木作成アルゴリズム

この章では、2章で定義した次数制限を持つ一対多経路選択問題を多項式時間で解く最短路木作成アルゴリズムを提案する。提案するアルゴリズムは、以下に述べる2つのステップから構成される。1つ目のステップは、入力されたグラフをもとに、送信元の節点 s から各受信ノードに対応する節点までの最短経路と、そのときの最短距離を表現するレベルグラフを作成する。2つ目のステップは、作成したレベルグラフと各節点での出次数制限を反映させた2部グラフを作成し、それに最大マッチング問題のアルゴリズムを適用することで、次数制限を持つ一対多経路選択問題の制約を満たす経路を得る。

3.1　レベルグラフの作成

ここでは、レベルグラフの作成の手順を紹介し、レベルグラフの持つ性質について説明する。

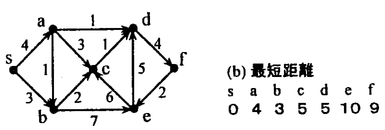
次数制限を持つ一対多経路選択問題の入力については2章で述べたが、レベルグラフの作成に必要な入力は、出次数制限以外の

- 単純有向グラフ $G=(V,E)$
- 節点 $s \in V$
- 距離 $l(e)$

のこの3つである（図3(a)）。レベルグラフを作成するための手順を以下に示す。

1. 最短路木アルゴリズムを用いて、節点 s から各節点までの最短距離を求める。

ここでは特に最短路木を求める必要はなく、各節点までの最短距離を求める。（図3(b)）



(a) グラフ G

図3. 手順 1

2. 全ての節点を、得た最短距離でソートし、距離の小さい順にレベルを割り当てる。

ソートを行なった結果、距離が等しい節点がいくつか存在する時は同じレベルに属するものとする。（図4）

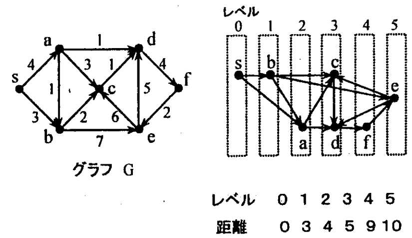


図4. 手順 2

3. レベル間の距離と各枝の距離が等しくない枝を除去する。

各枝を参照して、枝 e の両端点が属するレベル間の距離と枝 e の持つ長さ $l(e)$ を比較して、その距離が等しくない枝を除去する。また、レベルと距離の関係から、有向枝の方向がレベルが小さい方から大きい方に張られていない有向枝も除去される。これらの操作によって、図5のようなレベルグラフを得る。

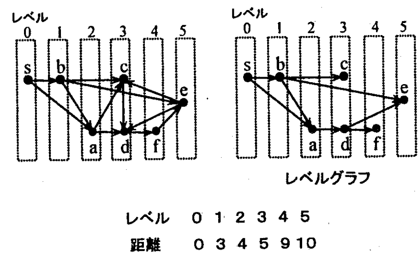


図5. 手順 3

次に得られたレベルグラフの性質について説明する。形状に関しては、レベルグラフはグラフ G の部分グラフとなっていて、有向枝の方向は全てレベルの小さい方から大きい方になっていて（図5では、左から右への方向）、閉路を持たない。また、上の手順で得られたレベルグラフの持つ性質として以下のことがあげられる。

1. 各レベルに含まれる節点において、そのレベルの持つ距離がグラフ G での最短距離になっている。

2. グラフ G における節点 s から各節点へ最短経路が、レベルグラフにおける節点 s から各節点への経路となっている。

このことから、レベルグラフはグラフ G における次数制限を持つ一対多経路選択問題の解である最短路木を構成する際の、各節点への最短経路の候補を抽出したものとして考えることができる。

3.2 次数制限が反映されている2部グラフの作成と経路の選択

ここでは、3.1 で作成したレベルグラフの性質と入力で与えられる各節点での出次数制限を反映させた2部グラフを作成する。そして、その2部グラフの最大マッチングを求めることで、出次数制限を持つ一対多経路選択問題の解となる経路が求められることについて考える。

まず、3.1 で作成したレベルグラフに出次数制限を導入することを考える。出次数の制限はレベルグラフにおいても、その節点でコピーして送信することのできる情報パケット数の上限であると考えることができる。ここで1つの節点 x において、1つの情報パケットを受信する (Receive) 機能を持つ節点と、1つの情報パケットを送信する (Send) 機能を持つ節点に分割することを考える。(図 6(a))

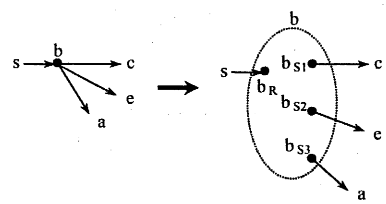


図6(a). 節点bの場合

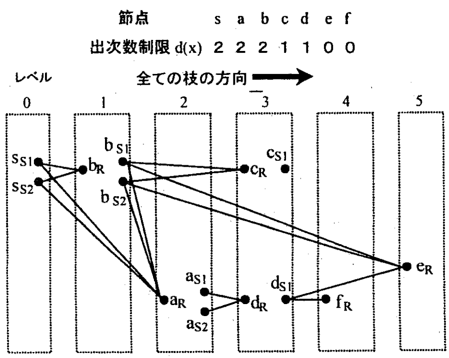


図6(b). レベルグラフの変形

経路が構成された時を考えると、受信する情報パケットは1つだけなので受信機能を持つ節点は1つあればよい。一方送信に関しては、送信する情報パケットが出次数制限分だけ必要となる可能性があるので、情報パケットを1つ送信する機能を持つ節点は出次数の制限の $d(x)$ 個だけ用意する必要がある。このようにレベルグラフにおいて、1つの節点 x を受信側と送信側でそれぞれ情報パケットを1つだけ扱うことのできる節点に分割することによって、出次数制限をグラフの形態として実現することができる。(図 6(b)：有向枝の矢印を省略している)

さらに、このレベルグラフを2部グラフに変形することを考える。上述のように変形したレベルグラフにおいて、送信機能を持つ節点からは枝が出ていて、受信機能を持つ節点には枝が入ってきている。このことに着目して、送信側の節点の集合を V_1、受信側の節点の集合を V_2 とすると、このレベルグラフは節点集合 V_1, V_2 から成る2部グラフとみなすことができる。(図7：有向枝の矢印を省略している)

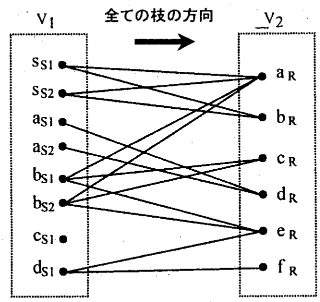


図7. 2部グラフの作成

この2部グラフにおいて以下の性質を持つことがいえる。

1. レベルグラフの各節点間の隣接関係はこの2部グラフで維持され、「グラフ G における節点 s から各節点への最短経路が、レベルグラフにおける節点 s から各節点への経路である」というレベルグラフの性質も、この2部グラフにおいても維持される。
2. レベルグラフ上で経路が選択された時、この2部グラフでの対応する枝を考えると、送信側の節点集合 V_1 と受信側の節点集合 V_2 のそれぞれの節点において、次数は1以下である。

これらの性質から、この2部グラフにおいて最大マッチング問題を適用することで、その最大マッチングで選ばれた枝の隣接関係を元の入力グラフに適用して得

られる経路が、次数制限を持つ一対多経路選択問題の解となることを証明する。このとき、もとの入力されたグラフを$G=(V,E)$ $(|V|=n,\ |E|=m)$、上述の手順で作成された2部グラフを$B=(V_1,V_2,E_B)$ $(|V_1|=n_B,\ |V_2|=n-1,\ |E_B|=m_B)$、2部グラフ$B$の最大マッチングを$M$、次数制限を持つ一対多経路選択問題の解である最短路木をTとする。

[証明]

(i) 2部グラフの最大マッチング数が$n-1$であるならば、出次数制限を満足する最短路木が存在する。

2部グラフBの節点集合は2つの独立節点集合V_1,V_2から成り、E_Bのどの枝もV_1の節点とV_2の節点を結んでいる。この2部グラフの最大マッチングMにおいて、最大マッチング数が$n-1$よりも小さい時は、得られる経路の枝数が$n-1$よりも小さくなることになり、このときは一対多の経路が存在しない。このことから、最大マッチング数が$n-1$以上の時を考える。しかし、このとき、2部グラフBの節点集合V_2の節点数が$n-1$であることから、節点集合V_2の全ての節点がマッチされる、マッチング数$n-1$の場合のときのみ最大マッチングMとなる。このことと、レベルグラフが閉路を持たないことから、性質1によって、どの受信側の節点からでも最大マッチングされた枝に沿って送信側の節点をたどっていくと、必ず送信元の節点sに到達することがいえる。これより、最大マッチングでマッチされた枝をもとの入力グラフGに適用して得られる経路は、節点sから各節点への経路であり、性質1からこの経路は出次数制限を満足する最短路木Tとなる。

(ii) 出次数制限を満足する最短路木が存在する時、対応する枝が2部グラフの最大マッチングである。

出次数制限を満足する最短路木Tの枝に対応する2部グラフB中の枝について考える。Tは節点sから各節点までの経路を構成するので、各節点における入次数は1である。言い換えると受信する情報パケットが1つ必ず存在することを意味するので、2部グラフBの受信側の節点集合V_2は枝を必ず持つ。また性質2を満たすように最短路木Tの枝を2部グラフB中の枝に割り当てることができるので、この割り当てた枝集合をマッチングとすると、そのマッチング数は$n-1$となり、このとき最大マッチングMとなる。

これより、入力されたグラフから作成された2部グラフにおいて、最大マッチング問題を適用することで次数制限を持つ一対多経路選択問題の解である、出次数制限を満足する最短路木を得ることができることがいえた。 □

図8に、図7の2部グラフを最大マッチングすることで得た経路を示す。最大マッチングされた枝は実線で示し、それ以外の枝は点線で示している。また、ここでは有向枝の矢印を省略している。

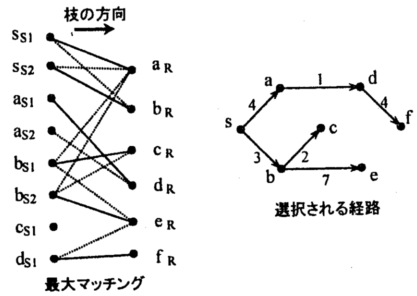


図8. 最大マッチング

3.3 提案アルゴリズムの時間計算量

ここでは、3.1と3.2で行なう手順で実現する提案アルゴリズムの時間計算量について議論する。

3.1で説明した、入力グラフGをもとにレベルグラフを作成するのに必要な時間計算量について考える。手順1の最短路木アルゴリズムとしてヒボナッチヒープを用いたダイクストラ法を用いるとすると、この時の時間計算量は$O(n\log n+m)$[4]である。ここで、さらに高速なアルゴリズムとして、枝の長さが整数であるグラフにおける線形時間の最短路木アルゴリズム[5]が提案されている。この文献[5]では、枝の長さが実数の場合においても線形時間の最短路木アルゴリズムが可能であると述べられている。しかし、今回の提案アルゴリズムでは手順2でソートを行なうことで、結局$O(n\log n)$時間が必要なため、手順1,2で必要な時間計算量は$O(n\log n+m)$時間として考えることができる。手順3では各枝を参照しているので$O(m)$時間で実行でき、よってレベルグラフの作成に必要な時間計算量は$O(n\log n+m)$時間である。

次に3.2で説明した、レベルグラフをもとに2部グラフを作成するのに必要な時間計算量を考える。これは、2部グラフを作成する際に行なったレベルグラフの変形にかかる時間計算量に等しい。レベルグラフの変形で行なう各節点での受信側と送信側の分解での手間は、出次数制限の最大値をDとすると、最悪

で $O(Dn)$ 時間である。また、各節点を分解することによって隣接関係を維持するための枝を張るためにかかった手間は、同様に出次数制限の最大値 D を用いて最悪で $O(Dm)$ 時間である。これより、レベルグラフをもとに 2 部グラフを作成するために必要な時間計算量は $O(Dn + Dm)$ 時間である。

さらに、作成した 2 部グラフの最大マッチングを求めるために必要な時間計算量を考える。作成した 2 部グラフの節点数は各節点での受信側と送信側の分解により $O(Dn)$ で、枝数は $O(Dm)$ となる。最大マッチングを求めるアルゴリズムとして、Hopcroft-Karp の最大マッチングアルゴリズム [6] を用いると、最大マッチングを求めるのに必要な時間計算量は $O(Dm\sqrt{Dn}) = O(D^{\frac{3}{2}}m\sqrt{n})$ 時間となる。

よって提案アルゴリズムの動作に必要な時間計算量は、出次数制限の最大値 D を用いて表現すると、全体で $O(D^{\frac{3}{2}}m\sqrt{n})$ 時間で実行が可能である。これより、提案するアルゴリズムが多項式時間で次数制限を持つ一対多経路選択問題を解くことがいえた。

4 むすび

本研究では、次数制限を持つ一対多経路選択問題において、出次数制限を満たしかつ送信元節点から各受信節点までの経路が最短である最短路木を解として出力する、多項式時間アルゴリズムを提案した。一般にグラフ問題において次数制限の制約を導入することによって、問題の複雑さのクラスがより複雑になる傾向があるが、本研究で定義した次数制限を持つ一対多経路選択問題においては、各節点において出次数制限を与え、また送信元節点から各受信節点までの経路が最短距離であるという制約を与え、逆に問題の制約を多くすることで多項式時間で解を得るアルゴリズムを提案することができた。

今回、本論文で定義した次数制限を持つ一対多経路選択問題において、ネットワーク上の受信ノードが送信元以外の全てのノードである放送型通信の場合を扱ったが、今後の課題としては、マルチキャスト通信の場合のように、任意の受信ノード集合を、さらに入力として与えた場合においても、次数制限を満たしかつ送信元ノードから任意の受信ノードへの経路が最短距離である部分最短路木を解として出力する多項式時間アルゴリズムが存在するかを調べることがあげられる。ただし、送信元ノードから任意の受信ノードへの経路が最短距離である部分最短路木問題は多項式時間で解くことができるが、これに次数制限が加わることによってこの問題が NP 完全になってしまうのかについては微妙である。またこの問題に類似したものとして Steiner 木問題 [2, pp. 208-209] が存在し、これは NP 完全であることがすでに証明されている。

参考文献

[1] ユニキャストとマルチキャスト. http://www.map.chiba-u.ac.jp/~akihiro/unimul.html.

[2] Michael R. Garey and David S. Johnson, COMPUTERS AND INTRACTABILITY: A Guide to the Theory of NP-Completeness, W. H. FREEDMAN AND COMPANY, 1979.

[3] 山形 孝幸, 藤井 章博, 根元 義章, "マルチキャスト通信向け経路決定アルゴリズムの提案と評価," 電子情報通信学会論文誌 D-I, Vol. J80, No. 9, pp. 739-744, 1997.

[4] M. L. Fredman and R. E. Tarjan, "Fibonacci heaps and their uses in improved network optimizationalgorithms," J. ACM34, pp. 596-615, 1987.

[5] Mikkel Thorup, "Undirected Single Source Shortest Paths in Linear Time," FOCS97, pp12-21, 1997.

[6] J. E. Hopcroft and R. M. Karp, "An $n^{\frac{5}{2}}$ algorithm for maximum matching in bipartite graphs," SIAM J. Computing, Vol. 2, pp. 225-231, 1973.