

グラフにおける距離に基づくグラフの積*

柴田 幸夫 菊地 洋右

群馬大学工学部情報工学科

グラフの積をグラフにおける距離に基づいて考察し、関係積を導入した。関係積は2つのグラフと非負整数上の二項関係で表され、多くのグラフの積を表現できる。新しい積 (skew product, converse skew product) を定義し、今までに知られている積 (Cartesian product, Kronecker product, strong product, lexicographic product) との関係調べた。Cartesian product と skew product の関係において、hypercube についての新しい結果を導き、ある種の circulant graph の積表現が可能であることを示した。

Graph products based on the distance in graphs

Yukio Shibata and Yosuke Kikuchi

Department of Computer Science, Gunma University

It is known that there are four basic graph products. Properties of each product have been studied individually. We propose a unified approach to these products based on the distance in graphs, and new two products on graphs. The viewpoint of products based on the distance introduced here provides a family of products that includes almost known graph products as extremal ones and suggests new products. Also, we study relations among these six products. Finally, We investigate several classes of graph products in those context.

1 はじめに

グラフの積は位数の小さい2つのグラフからより位数の大きいグラフを作るために使われる。また、同じ積を反復して用いることによりグラフのクラスを構成することもできる。hypercubeはその一例である。

ここではグラフにおける距離という視点からグラフの積を考察する。距離の概念をグラフの積に導入することにより関係積 (relational product) を定義する。関係積を用いることでグラフの積の多くを統一的に記述できる。既存のよく知られている4つの積 (Cartesian product, Kronecker product, strong product, lexicographic product) について関係積による考察を行ない、さらに新しい2つの積 (skew product, converse skew product) を提案する。この6つの積についてそれぞれの関係を調べる。最後にいくつかのグラフのクラスへの斜積 (skew product), 関係積の応用について述べる。

2 関係積

グラフ G の頂点集合を $V(G)$ 、辺集合を $E(G)$ とする。 G における2頂点 u, v の距離 $d_G(u, v)$ を最短 $u-v$ path の長さとする。 path の長さは path 上の辺の数で定義する。グラフ G が非連結

*本研究は (財) テレコム先端技術研究支援センターの援助のもとに行なわれた。

グラフで u と v が異なる成分に属するとき $d_G(u, v) = \infty$ とする。本論文ではことわらない限りグラフは単純グラフであるとする。グラフ G_1 と G_2 の関係積 $(G_1, G_2; R)$ を次で定義する。

Definition 2.1. G_1, G_2 を単純グラフ、 R を非負整数の集合上の二項関係とする。このとき G_1, G_2 の関係積 (relational product) $(G_1, G_2; R)$ は次により定義される。

$$\begin{aligned} V(G_1, G_2; R) &= V(G_1) \times V(G_2), \\ ((u_1, v_1), (u_2, v_2)) &\in E(G_1, G_2; R) \\ &\Leftrightarrow (d_{G_1}(u_1, u_2), d_{G_2}(v_1, v_2)) \in R \end{aligned}$$

Definition 2.1 から関係積の性質として次があげられる。

Lemma 2.2.

- (1) $(G_1, G_2; R) \cup (G_1, G_2; R') \cong (G_1, G_2; R \cup R')$,
- (2) $(G_1, G_2; R) \cap (G_1, G_2; R') \cong (G_1, G_2; R \cap R')$,
- (3) $(G_1, G_2; R) \setminus (G_1, G_2; R') \cong (G_1, G_2; R) \setminus E(G_1, G_2; R')$,
- (4) $(G_1 \cup G_2, G_3; R) \cong (G_1, G_3; R) \cup (G_2, G_3; R)$,
- (5) $(G_1, G_2 \cup G_3; R) \cong (G_1, G_2; R) \cup (G_1, G_3; R)$,
- (6) $R \cap R' = \phi \Leftrightarrow E(G_1, G_2; R) \cap E(G_1, G_2; R') = \phi$. ■

Definition 2.1 を用いて現在知られている 4 つの積 Cartesian product, Kronecker product, strong product, lexicographic product は次のように記述される。

Lemma 2.3 単純グラフ G_1, G_2 に対してグラフの 4 種の積は関係積として次のように表現される。

- (1) Cartesian product : $G_1 \times G_2 = (G_1, G_2; \{(0, 1), (1, 0)\})$,
- (2) Kronecker product : $G_1 \otimes G_2 = (G_1, G_2; \{(1, 1)\})$,
- (3) strong product : $G_1 \odot G_2 = (G_1, G_2; \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\})$,
- (4) lexicographic product : $G_1[G_2] = (G_1, G_2; \{(0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), \dots\})$. ■

Lemma 2.3 よりこの 4 つの積がグラフの積の中で特殊なものであることがわかる。さらに Lemma 2.3 (1) ~ (3) は R の要素が 0, 1 の組合せのみから構成されている。0, 1 の組合せで R として考えられるものとして、この他に $R = \{(0, 1), (1, 1)\}$ と $R = \{(1, 0), (1, 1)\}$ がある。そこでこの 2 つの場合を用いた積を次のように定義し、それぞれ斜積、逆斜積と呼ぶことにする。

Definition 2.4. グラフ G_1, G_2 に対して斜積 及び逆斜積を次により定義する。

斜積 (skew product);

$$G = G_1 \square G_2 \text{ の頂点集合は } V(G) = V(G_1) \times V(G_2) \text{ であり、辺集合 } E(G) = \{((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \mid [u_1 = v_1 \text{ かつ } u_2 v_2 \in E(G_2)] \text{ または } [u_1 v_1 \in E(G_1) \text{ かつ } u_2 v_2 \in E(G_2)]\} \text{ を持つ。}$$

逆斜積 (converse skew product);

$$G = G_1 \diamond G_2 \text{ の頂点集合は } V(G) = V(G_1) \times V(G_2) \text{ であり、辺集合 } E(G) = \{((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \mid [u_2 = v_2 \text{ かつ } u_1 v_1 \in E(G_1)] \text{ または } [u_1 v_1 \in E(G_1) \text{ かつ } u_2 v_2 \in E(G_2)]\} \text{ を持つ。}$$

関係積 は単純グラフ上の距離で定義されているが、Definition 2.4 は隣接性で定義されているのでループのあるグラフに対しても適用できる。

Definition 2.4 より明らかに $G_1 \square G_2 = G_2 \diamond G_1$ である。

関係積と辺集合の濃度について次が成立する。

Lemma 2.6.

$$|E(G_1, G_2; \{(1, 1)\})| = 2|E(G_1)||E(G_2)|,$$

$$|E(G_1, G_2; \{(0, 1)\})| = |V(G_1)||E(G_2)|,$$

$$|E(G_1, G_2; \{(1, 0)\})| = |E(G_1)||V(G_2)|.$$

Lemma 2.6. より次を得る。

Lemma 2.7. $\alpha, \beta \in \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$, $\alpha \neq \beta$ とすると、

$$|E(G_1, G_2; \{\alpha, \beta\})| = |E(G_1, G_2; \{\alpha\})| + |E(G_1, G_2; \{\beta\})|$$

が成り立つ。

グラフの積として表現されるグラフの頂点の次数について考察する。

Lemma 2.8. u, v をそれぞれ G_1, G_2 の任意の頂点とする。このとき以下の等式が成立する。

$$\deg_{(G_1, G_2; \{(0, 1)\})}(u, v) = \deg_{G_2} v$$

$$\deg_{(G_1, G_2; \{(1, 0)\})}(u, v) = \deg_{G_1} u$$

$$\deg_{(G_1, G_2; \{(1, 1)\})}(u, v) = \deg_{G_1} u \deg_{G_2} v$$

Lemma 2.9. $\alpha, \beta \in \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$, $\alpha \neq \beta$ とする。このとき 頂点 u in G_1 と頂点 v in G_2 に対し

$$\deg_{(G_1, G_2; \{\alpha, \beta\})}(u, v) = \deg_{(G_1, G_2; \{\alpha\})}(u, v) + \deg_{(G_1, G_2; \{\beta\})}(u, v)$$

が成り立つ。

Lemma 2.9 より次が成り立つ。

Lemma 2.10. R を $\{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ の部分集合とする。頂点 u, v はそれぞれ G_1, G_2 での最大次数をもつ頂点であるとき $(G_1, G_2; R)$ の頂点 (u, v) は最大次数をもつ。同様に頂点 u, v がそれぞれ G_1, G_2 での最小次数をもつ頂点であるとき $(G_1, G_2; R)$ の頂点 (u, v) は最小次数をもつ。

3 グラフの積の間の関係について

グラフの積を距離を用いて考察する。この章で必要な定義を述べる。グラフ G が $|V(G)| = 1, |E(G)| = 0$ であるとき、自明なグラフと呼び K_1 と書く。位数 $n (n \geq 3)$ のサイクルを C_n とする。グラフ G が 2 部グラフであるとは $V(G)$ を分割してできる 2 つの部分集合 V_1, V_2 (partite set と言う) に対して各々の辺が V_1 の頂点と V_2 の頂点を結ぶようにできる V_1, V_2 が存在するときを言う。完全 2 部グラフ G は 2 部グラフであり、さらに partite set V_1, V_2 で任意の $u \in V_1$ と $v \in V_2$ に対して $uv \in E(G)$ であるときをいう。完全 2 部グラフについて $|V_1| = n_1, |V_2| = n_2$ であるとき、このグラフを K_{n_1, n_2} と表記する。グラフ G が完全グラフであるとは任意の異なる 2 頂点間に辺が存在するときを言い、 $|V(G)| = n$ であるとき、このグラフを K_n と表記する。

Theorem 3.1. \bullet を $G_1 \bullet G_2 = (G_1, G_2; R)$ となる R が存在するグラフの積とする。 R が対称な二項関係であるとき、 $G_1 \bullet G_2 \cong G_2 \bullet G_1$ である。

Proof. $(a, b) \in R$ かつ $(b, a) \in R$ とし、 $d_{G_1}(u_1, u_2) = a, d_{G_2}(v_1, v_2) = b$ とする。このとき (u_1, v_1) と (u_2, v_2) は $(G_1, G_2; R)$ において隣接する。また (u_1, v_1) と (u_2, v_2) は $(G_2, G_1; R)$ においても隣接している。よって示せた。

しかし、次の命題は成り立たない。 G_1 と G_2 が同型でない G_1, G_2 に対し、 $G_1 \bullet G_2 \cong G_2 \bullet G_1$ ならば R は対称な二項関係である。この命題に対する反例を挙げる。 $G_1 \cong C_5, G_2 \cong C_7$ とすると、 $(G_1, G_2; \{(1, 2)\}) \cong (G_2, G_1; \{(1, 2)\})$ である。明らかに R は対称ではない。

Corollary 3.2. Cartesian product, Kronecker product, strong product は同型という範囲で可換である。lexicographic product, 斜積, converse 斜積 は非可換である。 ■

次に今まで扱ってきた 6 つの積についてその相互の関係について述べる。

Theorem 3.3. G_1, G_2 を連結グラフとする。このとき以下の性質が成り立つ。

- 1) $G_1 \times G_2 \cong G_1 \otimes G_2 \Leftrightarrow G_1 \cong G_2 \cong C_n (n:\text{odd})$ または $G_1 \cong G_2 \cong K_1$,
- 2) $G_1 \times G_2 \cong G_1 \circ G_2 \Leftrightarrow G_1 = K_1$ または $G_2 = K_1$,
- 3) $G_1 \times G_2 \cong G_1[G_2] \Leftrightarrow G_1 = K_1$ または $G_2 = K_1$,
- 4) $G_1 \times G_2 \cong G_1 \square G_2 \Leftrightarrow G_1 = K_1$ または、 G_1 は 2 部グラフかつ $G_2 = K_2$,
- 5) $G_1 \times G_2 \cong G_1 \diamond G_2 \Leftrightarrow G_2 = K_1$ または、 $G_1 = K_2$ かつ G_2 は 2 部グラフ,
- 6) $G_1 \otimes G_2 \cong G_1 \circ G_2 \Leftrightarrow G_1 = K_1$ かつ $G_2 = K_1$,
- 7) $G_1 \otimes G_2 \cong G_1[G_2] \Leftrightarrow G_1 = K_1$ かつ $G_2 = K_1$,
- 8) $G_1 \otimes G_2 \cong G_1 \square G_2 \Leftrightarrow G_2 = K_1$,
- 9) $G_1 \otimes G_2 \cong G_1 \diamond G_2 \Leftrightarrow G_1 = K_1$,
- 10) $G_1 \circ G_2 \cong G_1[G_2] \Leftrightarrow G_2$ は自明なグラフまたは完全グラフ,
- 11) $G_1 \circ G_2 \cong G_1 \square G_2 \Leftrightarrow G_1 = K_1$,
- 12) $G_1 \circ G_2 \cong G_1 \diamond G_2 \Leftrightarrow G_1 = K_2$,
- 13) $G_1[G_2] \cong G_1 \square G_2 \Leftrightarrow G_1 = K_1$,
- 14) $G_1[G_2] \cong G_1 \diamond G_2 \Leftrightarrow G_2 = K_1$,
- 15) $G_1 \square G_2 \cong G_1 \diamond G_2 \Leftrightarrow G_1 \cong G_2$.

Proof. ここでは 1) と 4) についてだけ示す。証明にあたり次の定義を用いる。 p を G_1 において最大次数をもつ頂点 u_1 の次数とする。また q を G_2 において最大次数をもつ頂点 v_1 の次数とする。同様に r を G_1 において最小次数をもつ頂点 u_2 の次数、 s を G_2 において最小次数をもつ頂点 v_1 の次数とする。

1) (必要性) Lemma 2.2, 2.7, 2.8, 2.9, を組み合わせて次の等式を得る。

$$p + q = pq,$$

$$r + s = rs.$$

故に $p = q = 0$ または $p = q = 2$ かつ $r = s = 0$ または $r = s = 2$ となるので、次の場合に分けて示す。

場合 1. $p = q = 0$ のとき。このときは $r = s = 0$ である。明らかに $G_1 \cong G_2 \cong K_1$ である。

場合 2. $p = q = 2$ のとき。このとき $r = s = 2$ である。次数の条件から $G_1 \cong C_m$ and $G_2 \cong C_n$ である。P. M. Weichsel[7] により次が成り立つことが示されている。 G と H を連結グラフとする。 $G \otimes H$ が連結グラフとなる必要十分条件は G または H の少なくとも一方が奇サイクルを含むことである。

このことから m または n の一方は奇数である。

$m \neq n$ のとき、一般性を失わずに $m < n$ としてよい。 m が奇数ならば $G_1 \otimes G_2$ には m 個の頂点を共有する長さ $2m$ のサイクルが存在する。 m が偶数ならば n は奇数となり $G_1 \otimes G_2$ には n 個の頂点を共有する長さ $2n$ のサイクルが存在する。しかし いずれの場合においても $G_1 \times G_2$ に

はそのようなサイクルは存在しない。ゆえにこのとき $G_1 \times G_2$ と $G_1 \otimes G_2$ は同型とはならない。

$m = n$ のとき、 $G_1 = G_2 = C_n$ とする。 G_1 と G_2 の各頂点をラベル付けする。 $(a, b) \in V(G_1) \times V(G_2)$ は $n \times n$ 格子上の頂点として考えられる。 f を次のようなアフィン変換とする。 $f(a, b) = (\sqrt{2}(a \cos \theta + b \sin \theta) + c, \pm\sqrt{2}(b \cos \theta - a \sin \theta) + d)$, ただし、 $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{l\pi}{2}$ であり、 $c, d, l \in Z$ とする。さらに、 g を $g(a, b) = (h, k)$ なる変換とし、 $a \equiv h \pmod{n}$, $b \equiv k \pmod{n}$, $h < n, k < n$ を満たすものとする。このとき、 $g(f(a, b))$ は $G_1 \times G_2$ から $G_1 \otimes G_2$ への同型写像となる。ゆえに $G_1 \cong G_2 \cong C_n$, (n : odd) である。

(十分性) 明らか

4) (必要性) Definition 2.4, 2.8, 2.9, 2.10 より次の等式を得る。

$$p + q = q + pq,$$

$$r + s = s + rs.$$

よって $p = 0$ または $q = 1$ であり $r = 0$ または $s = 1$ となる。そこで次の場合について考える。

場合 1. $p = 0$ のとき。このとき $r = 0$ となり $G_1 \cong K_1$ である。

$$\begin{aligned} G_1 \times G_2 &= (K_1, G_2; \{(0, 1), (1, 0)\}) \\ &\cong (K_1, G_2; \{(0, 1)\}) \\ &\cong (K_1, G_2; \{(0, 1), (1, 1)\}) \\ &\cong G_1 \square G_2. \end{aligned}$$

場合 2. $q = 1$ のとき。このとき $s = 1$ となり $G_2 \cong K_2$ である。

ここで G_1 が奇サイクルを含むとすると、 $G_1 \times G_2$ は奇サイクルを含むが $G_1 \square G_2$ は奇サイクルを含まない。よって G_1 は 2 部グラフでなければならない。

(十分性) $G_1 \cong K_1$ のときは明らか。

G_1 は 2 部グラフ $G_2 = K_2$ とする。 G_1 と G_2 の各頂点を次のようにラベル付けする。 $V(G_1) = \{u_1, u_2, \dots, u_s, u'_1, u'_2, \dots, u'_t\}$, $V(G_2) = \{0, 1\}$ 。ただし、 $1 \leq i, j \leq s, (u_i, u_j) \notin E(G_1)$ であり $1 \leq l, m \leq t, (u'_l, u'_m) \notin E(G_1)$ とする。このとき

$$\begin{aligned} V(G_1 \times G_2) &= V(G_1 \square G_2) \\ &= \{(u_1, 0), (u_2, 0), \dots, (u_s, 0), (u_1, 1), (u_2, 1), \dots, (u_s, 1), \\ &\quad (u'_1, 0), (u'_2, 0), \dots, (u'_t, 0), (u'_1, 1), (u'_2, 1), \dots, (u'_t, 1)\} \end{aligned}$$

となる。そこで写像 ϕ を次で定義する。

(i) ϕ は $V(G_1 \times G_2)$ から $V(G_1 \square G_2)$ への写像。

(ii) $\phi((u_h, k)) = (u_h, k), 1 \leq h \leq s, k = 0, 1$

(iii) $\phi((u'_l, 0)) = (u'_l, 1), \phi((u'_l, 1)) = (u'_l, 0)$

このとき ϕ は $G_1 \times G_2$ から $G_1 \square G_2$ への同型写像となる。 ■

4 関係積と斜積 および 逆斜積の応用

4.1 2 部グラフと関係積

Theorem 3.3 において異なるグラフの積からできるグラフで同型となるものは極めて単純なグラフである場合がほとんどである。Theorem 3.3.4) に示したように Cartesian product と斜積の間には良い関係がある。2 部グラフには多くの重要なグラフのクラスがあるので、それらについて考察する。

$P_n = a_0 a_1 a_2 \cdots a_n$ をパスとし、 $C_m = b_0 b_1 b_2 \cdots b_{m-1}$ をサイクル、 $K_2 = c_0 c_1$ を次数 2 の完

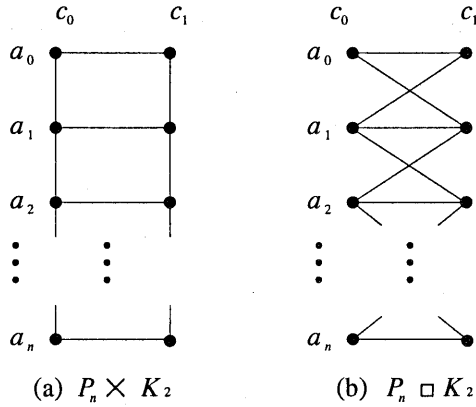


図 1: (a) $P_n \times K_2$ and (b) $P_n \square K_2$

全グラフとする。簡便のため b の添字は m を法とするものとする。 $G_1 \cong P_n, G_2 \cong K_2$ とすると $P_n \times K_2 \cong P_n \square K_2$ (Fig. 1 参照) となる。 $P_n \square K_2$ は 2 重らせん構造を表現する方法と考えることもできる。

$G_1 \cong C_{2k}, G_2 \cong K_2$ とする。このとき $C_{2k} \times K_2 \cong C_{2k} \square K_2$ となる。 $C_{2k+1} \square K_2$ はメビウスの帯のようになる。 $C_{2k+1} \square K_2$ は長さ $4k+2$ のサイクルを含む。よって $(0, 1) \in R$ によってできた辺を取り除くと長さ $4k+2$ のサイクルとなる。メビウスの帯では帯の中線に沿って切ると、もとのメビウスの帯の長さの 2 倍の帯ができる。特に $G_1 \cong C_3$ ならば $C_3 \square K_2 \cong K_{3,3}$ となる。

次に hypercube Q_n について考察する。 n -次元 hypercube Q_n は次のように再帰的に定義される。 $Q_1 = K_2$ とし $Q_n = Q_{n-1} \times K_2$ とする。 Q_n は 2^n 個の頂点をもつ。 Q_n は次のように構成できることが知られている。各頂点を $a_1 a_2 \dots a_n$ とラベル付けする。各 a_i は 0 または 1 である。 Q_n の 2 頂点を 2 進の数列とみて 1 箇所だけ異なるときにその 2 頂点は隣接する。 hypercube Q_n は 2 部グラフであり、Theorem 3.3 から次が成り立つ。

Theorem 4.1. $Q_1 = K_2,$

$$Q_n = Q_{n-1} \times K_2 = K_2 \times Q_{n-1} \cong Q_{n-1} \square K_2 \cong K_2 \diamond Q_{n-1}, (n \geq 2)$$

Q_n を $Q_{n-1} \times K_2$ によって構成すると $Q_{n-1} \times K_2$ の頂点のラベルは $a_1 a_2 \dots a_{n-1} 0$ と $a_1 a_2 \dots a_{n-1} 1$ と書くことができる。 $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ を Q_{n-1} でのラベル付けとする。このとき、 $a_1 a_2 \dots a_{n-1} b$ と $a'_1 a'_2 \dots a'_{n-1} b'$ が隣接する必要十分条件は $b = b'$ かつ $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ と $a'_1 a'_2 \dots a'_{n-1}$ が Q_{n-1} において隣接しているとき、または $a_i = a'_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) かつ $b \neq b'$ のときである。(例 . 図 2(a)) 一方、 $Q_{n-1} \square K_2$ について、 $Q_{n-1} \times K_2$ と同じラベル付けを用いればその隣接性は $b \neq b'$ かつ $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ と $a'_1 a'_2 \dots a'_{n-1}$ が Q_{n-1} において隣接しているとき、または $a_i = a'_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) かつ $b \neq b'$ により与えられる。このようにして、例として図 2(b) のグラフが得られる。同様にして $K_2 \diamond Q_3$ が図 2(c) のように得られる。図 2 の 3 つのグラフは全て同型であるが、3 種類のラベリングがあり、 hypercube の異なるラベリングが異なる積に対応している例としてとらえることができる。

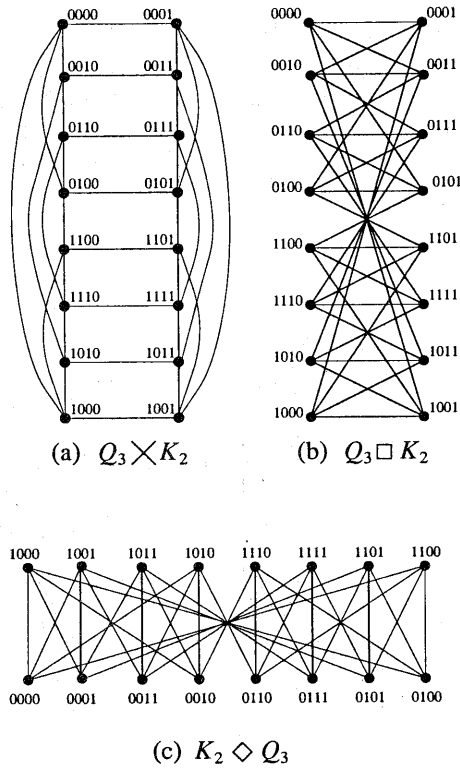


図 2: (a) $Q_3 \times K_2$, (b) $Q_3 \square K_2$ and (c) $K_2 \diamond Q_3$

4.2 Circulant graphs と関係積

ある種の circulant graph は関係積で表現できる。与えられた正整数 p に対し、 n_1, n_2, \dots, n_k を整数の列で

$$0 < n_1 < n_2 < \dots < n_k < (p+1)/2$$

を満たすものとする。このとき circulant graph $C_p(n_1, n_2, \dots, n_k)$ とは p 個の頂点 v_1, v_2, \dots, v_p をもち、頂点 v_i は $v_{i \pm n_j} \pmod{p}$ なる各頂点と隣接する。この値 n_i を jump size と呼ぶ。

Theorem 4.2. $p = 4k + 2$ とする (k は自然数)。このとき circulant graph $C_p(n_1, n_2, \dots, n_k)$ は関係積で表すことができる。

Proof. $C_m(1) \cong C_m$ かつ $C_p \cong (C_{2k+1}, K_2; \{(1, 1)\})$ より $C_p(1) \cong (C_{2k+1}, K_2; \{(1, 1)\})$ を得る。このとき 次のような対応が得られる。

- (i) $C_{4k+2}(2t+1) = (C_{2k+1}, K_2; \{(2t+1, 1)\})$, $(2t+1 \leq k)$,
- (ii) $C_{4k+2}(2t+1) = (C_{2k+1}, K_2; \{(r, 1)\})$, $(2t+1 > k)$,
- (iii) $C_{4k+2}(2t) = (C_{2k+1}, K_2; \{(2t, 0)\})$, $(2t \leq k)$,
- (iv) $C_{4k+2}(2t) = (C_{2k+1}, K_2; \{(s, 0)\})$, $(2t > k)$,

ここで r と s はそれぞれ $r = 2k - 2t$, $s = 2k + 1 - 2t$ を満たすものとする。上の対応を用いることで $C_{4k+2}(n_1, n_2, \dots, n_k)$ は $(C_{2k+1}, K_2; R)$ として表現される。■
 この定理によりある種の circulant graph はサイクルと K_2 の relational product であることがわかる。例として図4を挙げる。図の2つのグラフは同型であり、(a)は $C_{14}(3, 4)$ であり、(b)は $(C_7, K_2; \{(3, 1), (4, 0)\})$ である。

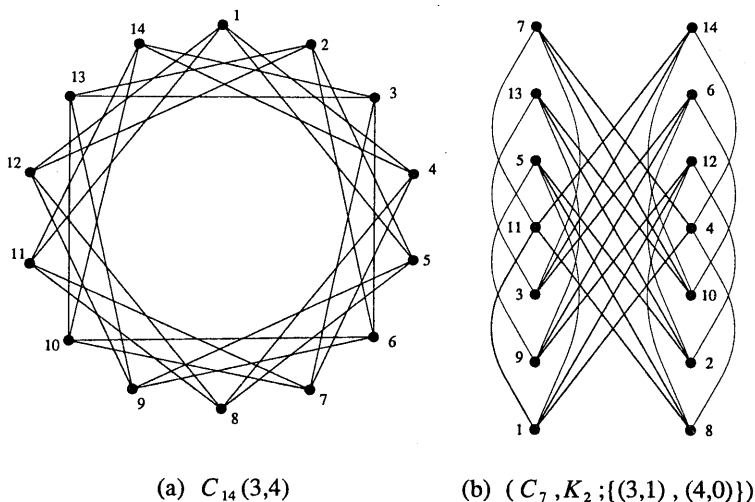


図 3: (a) $C_{14}(3, 4)$ (b) $(C_7, K_2; \{(3, 1), (4, 0)\})$

参考文献

- [1] F. Buckley and F. Harary, *Distance in Graphs*, Addison-Wesley, Reading, California, 1989.
- [2] G. Chartrand and L. Lesniak, *Graphs & Digraphs, 3rd Ed.*, Chapman & Hall, Reading, London, 1996.
- [3] F. Harary, J. P. Hayes and H. J. Wu, A survey of the theory of hypercube graphs, *Comput. Math. Applic.*, 15(1988) 277-289.
- [4] V. Puš, A remark on distances in products of graphs, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 28(1987) 233-239.
- [5] G. Sabidussi, Graph multiplication, *Mathematische Zeitschrift*, 72(1960) 446-457.
- [6] G. Sabidussi, The composition of graphs, *Duke Math. J.*, 26(1959) 693-696.
- [7] P. M. Weichsel, The Kronecker product of graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 13(1962) 47-52.