アルゴリズム 73−5
(2000. 5. 19)

一般化安定集合問題に対する半正定値計画緩和

藤江 哲也
神戸商科大学 管理科学科
〒651-2103 神戸市西区学園西町 8-2-1
fujie@kobeuc.ac.jp

田村 明久
京都大学 数理解析研究所
〒606-8502 京都市左京区北白川追分町
tamura@kurims.kyoto-u.ac.jp

本論文では，Grötschel-Lovász-Schrijver による最大安定集合問題に対する凸集合緩和を，一般化安定集合問題へと拡張する．この凸集合上で線形目的関数を最大化する問題は多項式時間で解くことができる．これにより，パーフェクト双向グラフに対する一般化安定集合問題は多項式時間で解けることが示される．また，凸集合が多面体であるための必要十分条件は対応する双向グラフがパーフェクトであることを示す．

A Semidefinite Programming Relaxation for the Generalized Stable Set Problem

Tetsuya FUJIE
Department of Management Science
Kobe University of Commerce
Kobe 651-2103, JAPAN
fujie@kobeuc.ac.jp

Akihisa TAMURA
Research Institute for Mathematical Sciences
Kyoto University
Kyoto 606-8502, JAPAN
tamura@kurims.kyoto-u.ac.jp

In this paper, we generalize the theory of a convex set relaxation for the maximum stable set problem due to Grötschel, Lovász and Schrijver to the generalized stable set problem. We define a convex set which serves as a relaxation problem, and show that optimizing a linear function over the set can be done in polynomial time. This implies that the generalized stable set problem for perfect bidirected graphs is polynomial time solvable. Moreover, we prove that the convex set is a polytope if and only if the corresponding bidirected graph is perfect.

1 はじめに

各制約式がちょうど 2 つの変数から成る 0-1 整数計画問題は，最大安定集合問題を特殊な場合として含むため，一般化安定集合問題 (generalized stable set problem) とよばれる．$V = \{1,\dots,n\}$, $E, A, D \subseteq V \times V$ とする．このとき一般化安定集合問題は次のように定式化される：

$$
\text{(GSSP)}\quad \left|\begin{array}{llcll}
\text{Maximize} & \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x} & & & \\
\text{subject to} & x_i + x_j & \le & 1 & ((i,j) \in E), \\
 & x_i - x_j & \le & 0 & ((i,j) \in A), \\
 & -x_i - x_j & \le & -1 & ((i,j) \in D), \\
 & & x_i \in \{0,1\} & & (i \in V).
\end{array}\right.
$$

ただし，$\boldsymbol{w} \in R^V$ である．$A = D = \emptyset$ のとき，(GSSP) は無向グラフ $G = (V, E)$ に対する最大安定集合問題 (SSP) の定式化となる．そして，(GSSP) は双向グラフ (bidirected graph) $B = (V; E, A, D)$ に対する最大化問題としてみることができる．

(GSSP) および (GSSP) の線形不等式系は Johnson and Padberg [10], Bourjolly [1], Sewell [14], Ikebe and Tamura [9], Tamura [15, 16] などにより研究されている．また，(GSSP) の不等式は変数間の二項関係を表現しているため，(GSSP) に関する諸結果は 0-1 変数を含む整数計画問題に対する前処理に使われている．

(SSP) は，$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e}(= (1, \ldots, 1)^T)$ に限定しても，NP 困難であることが知られている．一方，パーフェクトグラフを含む幾つかのグラフについては，(SSP) が多項式時間で解けることも知られている．パーフェクトグラフの等価な表現が数多く知られているが，本論文では Chvátal [2] の結果 (定理 1.1) が重要である．ここで，定理 1.1 を述べるための準備をする．無向グラフ $G = (V, E)$ に対し，STAB(G) を，(SSP) の実行可能解集合の凸包と定義する．部分集合 $S \subseteq V$ の任意の 2 頂点 i, j について $(i, j) \notin E$ であるとき，S を G の安定集合という．すると，STAB$(G) = \{\chi^S \in \{0,1\}^V \mid S$ は G の安定集合 $\}$ と書くこともできる．ただし，χ^S は,「$\chi_i^S = 1 \Leftrightarrow i \in S\ (i \in V)$」を満たす特性ベクトルである．STAB$(G)$ の定義より，非負不等式

$$x_i \geq 0 \quad (i \in V)$$

は STAB(G) の妥当不等式である．また，部分集合 $C \subseteq V$ の任意の 2 頂点 i, j について $(i, j) \in E$ であるとき，C は G のクリークとよばれ，クリーク不等式

$$\sum_{i \in C} x_i \leq 1 \quad (C : \text{クリーク})$$

は STAB(G) の妥当不等式である．よって，

$$\mathrm{QSTAB}(G) = \{\boldsymbol{x} \in R^V \mid \boldsymbol{x}\ \text{は非負不等式，クリーク不等式を満たす}\}$$

と定義すると，STAB$(G) \subseteq$ QSTAB(G) を満たす．そして，パーフェクトグラフは，多面体STAB(G), QSTAB(G) によって特徴付けられる．

定理 1.1 ([2]) G がパーフェクト $\iff$ STAB$(G) =$ QSTAB(G). ■

しかし，STAB(G) そして QSTAB(G) 上で線形関数を最大化する問題は NP 困難である [8].

Grötschel-Lovász-Schrijver [5] は，パーフェクトグラフに対する多項式解法を示した．関連する研究として [6, 7, 8, 13] がある．特に [7, 8] では，次の性質を満たす凸集合 TH(G) を導入した：

(α) STAB$(G) \subseteq$ TH$(G) \subseteq$ QSTAB(G).

(β) TH(G) 上で線形関数を最大化する問題は多項式時間で解くことができる．

G がパーフェクトの場合，(α) より STAB$(G) =$ TH$(G) =$ QSTAB(G) であり，TH(G) 上の最大化問題を解くことによって，(SSP) の最適解を多項式時間で求めることができる [8]. TH(G) の (等価な) 表現が [7, 13] に与えられている．Lovász-Schrijver [13] は，半正定値計画による TH(G) の表現を与えた．ここで，$\mathcal{S}^V$ を $V \times V$ 対称行列の集合とし，$\boldsymbol{A}$ が対称半正定値行列であるとき $\boldsymbol{A} \succeq \boldsymbol{O}$ と書くことにする．

定理 1.2 ([13])

$$\mathrm{TH}(G) = \left\{ \boldsymbol{x} \in R^V \;\middle|\; \begin{array}{lll} {}^\exists \boldsymbol{X} \in \mathcal{S}^V \text{ s.t.} & X_{ij} = 0 & ((i,j) \in E), \\ & X_{ii} = x_i & (i \in V), \\ & \boldsymbol{X} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \succeq \boldsymbol{O} & \end{array} \right\}.$$

■

半正定値計画問題は多項式時間で解けることが知られている ([11] など). したがって, (β) が確かに成り立つことがわかる. また, TH(G) について次の事実も示されている [7]:

(a) TH(G) のファセット ($|V|-1$ 次元面) は, 非負不等式またはクリーク不等式の正数倍である.

(b) TH(G) が多面体 $\Longleftrightarrow$ G がパーフェクト.

双向グラフのパーフェクト性は [9, 15, 16] において定義された. 本論文では, 定理 1.1の事実を基にして凸集合 GTH(B) を定義し, GTH(B) が TH(G) の性質 (α), (β), (a), (b) を有することを示す. 特に, (α), (β) より, パーフェクト双向グラフに対する (GSSP) が多項式時間で解けることが直ちに示される. 多項式時間で解けることは, パーフェクト双向グラフに対する (GSSP) を, パーフェクト無向グラフに対する (SSP) に変換することによって示されていた [14, 15, 16]. しかし, 本論文で半正定値計画緩和との関係を示したことにより, 無向グラフに対する (SSP) を使わない, より直接的なパーフェクト双向グラフに対する (GSSP) の解法が提示できた. 本論文で与えた我々の証明は, **Fujie-Kojima** [4] による, 半正定値計画緩和の凸二次不等式表現に基づいている. また, これらの証明は TH(G) に対しても適用可能であり, [7] とは異なる新しい証明を与えることができた.

本論文の構成は次の通りである. 第 2 節では, 一般化安定集合問題に関する準備を行なう. そして, 第 3 節で本論文の結果を与える. 最後に, 第 4 節で証明の概略を述べる.

2 一般化安定集合問題

(GSSP) の制約式は次のように書き直すことができる:

$$\left.\begin{array}{rcrll} x_i & + & x_j & \le 1 & (i,j)\in E, \\ x_i & + & (1-x_j) & \le 1 & (i,j)\in A, \\ (1-x_i) & + & (1-x_j) & \le 1 & (i,j)\in D, \\ & & x_i \in \{0,1\} & & (i\in V). \end{array}\right\} \tag{1}$$

これにしたがって, 双向グラフ $B=(V;E,A,D)$ が定義できる. ただし, V は頂点集合であり, $E\cup A\cup D$ は辺集合である. さらに, $(i,j)\in E$ を $(+,+)$-辺, $(i,j)\in A$ を $(+,-)$-辺, $(i,j)\in D$ を $(-,-)$-辺というように, 各辺の両端には符号が付加されている. 双向グラフは **Edmonds-Johnson** [3] によって導入され, (GSSP) への適用は **Johnson-Padberg** [10] による. 以下, $\boldsymbol{x}\in\{0,1\}^V$ が (1) の実行可能解であるとき, $\boldsymbol{x}$ を B に対する実行可能解とよぶ.

双向グラフ $B=(V;E,A,D)$ の任意の 2 辺 $e_1=(i,j)$, $e_2=(j,k)$, ただし j での符号が異なるものに対して, i および k での符号がそれぞれ e_1 と e_2 に等しい辺 $e_3=(i,k)$ が存在するとき, B は推移的 (transitive) であるという. 不等式系 (1) において, 推移性は, e_1, e_2 に対応する不等式が存在するとき, これらの不等式から導かれる e_3 に対応する不等式も (1) に存在することを意味している. 与えられた双向グラフを推移的なものに変形するのは頂点数の多項式時間でできるので, 扱うグラフを推移的と仮定しても構わない. また, 双向グラフが自己ループや多重辺を持つとき, 変数を 0 または 1 に固定できたり, $x_i=x_j$ または $x_i=1-x_j$ という関係が導かれる. すると, 問題を変更することなく双向グラフを縮小することができる. 自己ループや多重辺を持たない双向グラフは単純 (simple) とよばれ, 以下では推移的かつ単純な双向グラフを扱う.

双向グラフ B に対し, GSTAB(B) を B の実行可能解集合の凸包と定義する. GSTAB(B) は STAB(G) の自然な一般化である. また, **Johnson-Padberg** [10] はクリークおよびクリーク不等

式の一般化を与えた．V の部分集合の組 $C = (C^+, C^-)$ が次の条件を満たすとき，双クリーク (biclique) とよぶ：

- $C^+ \cap C^- = \emptyset$,
- $C^+ \cup C^-$ の任意の 2 頂点間に辺 e が存在し，e の端点 i が C^+ に属するならば i の符号は $+$, i が C^- に属するならば i の符号は $-$ である．

補題 2.1 ([10]) 双クリーク $C = (C^+, C^-)$ について，双クリーク不等式

$$\sum_{i \in C^+} x_i + \sum_{i \in C^-} (1 - x_i) \leq 1$$

は GSTAB(B) に対する妥当不等式である． ■

さらに，$x_i \leq 1$, $x_i \geq 0$ は，それぞれ双クリーク $(\{i\}, \emptyset), (\emptyset, \{i\})$ に対する双クリーク不等式である．そこで，QSTAB(G) の一般化として，多面体

$$\mathrm{QGSTAB}(B) \ = \ \{\boldsymbol{x} \in R^V \mid \boldsymbol{x} \text{ は } B \text{ のすべての双クリーク不等式を満たす}\}$$

を定義する．このとき，補題 2.1より GSTAB$(B) \subseteq$ QGSTAB(B) である．そして，定理 1.1の一般化として，双向グラフ B は，推移的単純かつ GSTAB(B) = QGSTAB(B) を満たすときパーフェクトと定義する [9, 15, 16]．無向グラフと双向グラフのパーフェクト性には定理 2.2のような関係がある．ここで，双向グラフ $B = (V; E, A, D)$ に対し，無向グラフ $\underline{B} = (V, E \cup A \cup D)$ を定義する．

定理 2.2 ([9]) B がパーフェクト $\iff$ $\underline{B}$ がパーフェクト． ■

3 結果

任意の 0-1 ベクトル $\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^V$ に対して

$$\begin{array}{rcrcl}
x_i & + & x_j \leq 1 & \iff & x_i x_j = 0, \\
x_i & + & (1 - x_j) \leq 1 & \iff & x_i(1 - x_j) = 0, \\
(1 - x_i) & + & (1 - x_j) \leq 1 & \iff & (1 - x_i)(1 - x_j) = 0
\end{array}$$

が成り立つ．よって，

$$F_B = \left\{ \boldsymbol{x} \in R^V \;\middle|\; \begin{array}{rl}
x_i x_j = 0 & ((i,j) \in E), \\
x_i(1 - x_j) = 0 & ((i,j) \in A), \\
(1 - x_i)(1 - x_j) = 0 & ((i,j) \in D), \\
x_i^2 - x_i = 0 & (i \in V)
\end{array} \right\}$$

と定義すると GSTAB(B) = conv(F_B) であり，F_B は GSTAB(B) の 2 次等式系による表現を与える．また，

$$F_B = \left\{ \boldsymbol{x} \in R^V \;\middle|\; \begin{array}{ll}
X_{ij} = 0 & ((i,j) \in E), \\
X_{ij} = x_i & ((i,j) \in A), \\
X_{ij} = x_i + x_j - 1 & ((i,j) \in D), \\
X_{ii} = x_i & (i \in V), \\
\boldsymbol{X} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T = O &
\end{array} \right\}$$

であるから，

$$\mathrm{GTH}(B) \;=\; \left\{ \boldsymbol{x} \in R^V \;\middle|\; \begin{array}{lll} {}^\exists \boldsymbol{X} \in \mathcal{S}^V \text{ s.t.} & X_{ij} = 0 & ((i,j) \in E), \\ & X_{ij} = x_i & ((i,j) \in A), \\ & X_{ij} = x_i + x_j - 1 & ((i,j) \in D), \\ & X_{ii} = x_i & (i \in V), \\ & \boldsymbol{X} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \succeq \boldsymbol{O} & \end{array} \right\}.$$

と定義すると，$F_B \subseteq \mathrm{GTH}(B)$ である．さらに GTH(B) は凸集合であることが示されるので，GSTAB(B) $\subseteq$ GTH(B) となって，GTH(B) は (GSSP) に対する緩和問題を与える．特に

$$\boldsymbol{X} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \succeq \boldsymbol{O} \iff \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}$$

が成り立つので，緩和問題は半正定値計画問題となる．したがって，この緩和問題は多項式時間で解くことができ，GTH(B) は性質 (β) を有することがわかる．さらに，性質 (α) に関する次の定理が成り立つ．

定理 3.1 GSTAB(B) $\subseteq$ GTH(B) $\subseteq$ QGSTAB(B).

また，性質 (a), (b) を一般化した次の定理を示すことができる．

定理 3.2 GTH(B) のファセット ($|V|-1$ 次元面) は，双クリーク不等式の正数倍である．

定理 3.3 GTH(B) が多面体 $\iff$ B がパーフェクト．

定理 3.3，そして定理 3.3 の系として導かれる次の事実は，パーフェクト双向グラフの特徴付けを与える．

系 3.4

- GTH(B) = GSTAB(B) $\iff$ B がパーフェクト．
- GTH(B) = QGSTAB(B) $\iff$ B がパーフェクト． ■

4 証明の概略

Fujie-Kojima [4] (関連する論文として [12]) による半正定値計画緩和の凸二次不等式表現を GTH(B) に適用すると，次の結果を得る．

補題 4.1

$$\mathrm{GTH}(B) = \left\{ \boldsymbol{x} \in R^V \;\middle|\; \begin{array}{r} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{x} - 2\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} M_{ij} x_i - 2\sum_{(i,j)\in D} M_{ij}(x_i + x_j - 1) - \sum_{i \in V} M_{ii} x_i \le 0 \\ \left(\begin{array}{ll} M_{ij} = 0 & ((i,j) \notin E \cup A \cup D), \\ \boldsymbol{M} \succeq \boldsymbol{O} & \end{array} \right) \end{array} \right\}.$$ ■

定理 3.1，定理 3.2，定理 3.3 の証明は，この凸二次不等式表現を用いる．

4.1　定理 3.1 の証明

$\mathrm{GSTAB}(B) \subseteq \mathrm{GTH}(B)$ であることは既に説明したので，$\mathrm{GTH}(B) \subseteq \mathrm{QGSTAB}(B)$ が成り立つことを示せばよい．そこで，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{GTH}(B)$ とし，$C = (C^+, C^-)$ を双クリークとする．そして $\boldsymbol{p} \in R^V$ を

$$p_i = \begin{cases} 1 & (i \in C^+), \\ -1 & (i \in C^-), \\ 0 & (i \notin C^+ \cup C^-) \end{cases}$$

とし，$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^T$ と定義する．このとき，双クリークの定義より $M_{ij} = 0$ $((i,j) \notin \boldsymbol{E} \cup \boldsymbol{A} \cup D)$ が成り立ち，さらに $\boldsymbol{M} \succeq \boldsymbol{O}$ である．また，$\boldsymbol{x}(C) = \sum_{i \in C} x_i$ $(C \subseteq V)$ とおくと

$$\begin{aligned} 0 \geq\ & \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{x} - 2 \sum_{(i,j) \in A} M_{ij} x_i - 2 \sum_{(i,j) \in D} M_{ij}(x_i + x_j - 1) - \sum_{i \in V} M_{ii} x_i \\ =\ & (\boldsymbol{x}(C^+) - \boldsymbol{x}(C^-) + |C^-|)(\boldsymbol{x}(C^+) - \boldsymbol{x}(C^-) + |C^-| - 1) \end{aligned}$$

と計算することができる．よって

$$-|C^-| \leq \boldsymbol{x}(C^+) - \boldsymbol{x}(C^-) \leq 1 - |C^-|. \tag{2}$$

を得るが，(2) は

$$0 \leq \sum_{i \in C^+} x_i + \sum_{i \in C^-} (1 - x_i) \leq 1.$$

と等価である．したがって，$\boldsymbol{x}$ は双クリーク不等式を満たし，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{QGSTAB}(B)$ であることが証明された．

4.2　定理 3.2 の証明

$D = \emptyset$ である双向グラフ $B = (V; E, A, D)$ に限定して定理 3.2 を証明する．この仮定は一般性を失うものではないが，その証明は省略する．

定理 3.2を証明するために次の集合を考える：

$$K = \left\{ \boldsymbol{x} \in R^n \;\middle|\; \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{x} + \pi \leq 0 \quad \left(\begin{pmatrix} \pi & \boldsymbol{q}^T/2 \\ \boldsymbol{q}/2 & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix} \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}_+ \right) \right\}.$$

ただし，$\mathcal{P} \in \mathcal{S}^{1+n}$ は閉凸錐であり，

$$\mathcal{Q}_+ = \left\{ \begin{pmatrix} \pi & \boldsymbol{q}^T/2 \\ \boldsymbol{q}/2 & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix} \;\middle|\; \boldsymbol{Q} \in \mathcal{S}^n,\ \boldsymbol{Q} \succeq \boldsymbol{O} \right\} \subseteq \mathcal{S}^{1+n}$$

である．$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}_+$ を用いた K の表現は [12] による．そして，補題 4.1 における $\mathrm{GTH}(B)$ の表現は

$$\mathcal{P} = \mathrm{cone} \left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{0}^T \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_{ij} \end{pmatrix} \;\middle|\; (i,j) \in E \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -e_i^T \\ -e_i & \boldsymbol{E}_{ij} \end{pmatrix} \;\middle|\; (i,j) \in A \right\} \\ \cup \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -(e_i + e_j)^T \\ -(e_i + e_j) & \boldsymbol{E}_{ij} \end{pmatrix} \;\middle|\; (i,j) \in D \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -e_i^T/2 \\ -e_i/2 & \boldsymbol{E}_{ij} \end{pmatrix} \;\middle|\; i \in V \right\} \end{array} \right)$$

とすることで得られる．ただし，$\mathrm{cone}(P)$ は P によって生成される錐，e_i は第 i 要素を 1 に持つ単位ベクトルとし，$\boldsymbol{E}_{ij}$ は，$i \neq j$ のとき $e_i e_j^T + e_j e_i^T$，$i = j$ のとき $e_i e_i^T$ として定義される行列である．

定理 4.2 K は full-dimensional (n 次元) であると仮定し，F を K のファセット ($n-1$ 次元面) とする．このとき，

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} + \pi = 0 \quad ({}^\forall\boldsymbol{x} \in F)$$

を満たす $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \pi & \boldsymbol{q}^T/2 \\ \boldsymbol{q}/2 & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix} \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}_+$ が存在する．さらに $\boldsymbol{Q} \neq \boldsymbol{O}$ の場合，$\boldsymbol{p} \in R^n$，$\alpha, \beta \in R$ が存在して

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} + \pi = \left(\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{x} - \alpha\right)\left(\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{x} - \beta + \alpha\right)$$

と書くことができる． ■

GSTAB(B) は full-dimensional である [10] ので，定理 4.2 が適用できる．すなわち，F を GTH(B) のファセットとすると，

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} - 2\sum_{(i,j)\in A} M_{ij}\boldsymbol{x}_i - \sum_{i\in V} M_{ii}\boldsymbol{x}_i = \left(\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{x} - \alpha\right)\left(\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{x} - \beta + \alpha\right) = 0 \quad ({}^\forall\boldsymbol{x} \in F),$$

そして $M_{ij} = 0$ $((i,j) \notin E \cup A)$ を満たす $\boldsymbol{M} \succeq \boldsymbol{O}$ が存在する．この場合 $\boldsymbol{M} \neq \boldsymbol{O}$ は明らかであり，また $D = \emptyset$ を仮定していたことに注意する．すると

$$p_i^2 + 2\sum_{j:(i,j)\in A} p_i p_j = \beta p_i \ (i \in V), \tag{3}$$

$$\alpha(\beta - \alpha) = 0 \tag{4}$$

を得る．(4) より GTH(B) の妥当不等式

$$\left(\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{x} - \alpha\right)\left(\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{x} - \beta + \alpha\right) \leq 0$$

は

$$0 \leq \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{x} \leq \beta$$

と等価であることが示される．そして，(3) より次の定理が証明できる．

定理 4.3 $0 \leq \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{x} \leq \beta$ は，それぞれ双クリーク不等式の和で表現できる． ■

定理 4.3 および GSTAB(B) の多面体構造に関する結果 [10] より，ファセット F は $0 \leq \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{x}$ または $\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{x} \leq \beta$ で表現されるが，いずれの場合も不等式は双クリーク不等式になることが証明される．

4.3 定理 3.3 の証明

B がパーフェクトのとき GSTAB(B) = GTH(B) = QGSTAB(B) が成り立つので，GTH(B) は多面体である．

次に，GTH(B) を多面体と仮定する．このとき，定理 3.2 より

$$\text{GTH}(B) = \text{QGSTAB}(B) \tag{5}$$

が成り立つ．さらに，次の定理が証明できる：

定理 4.4 QGSTAB(B) の非整数端点は GTH(B) に含まれない． ■

定理 4.4 および (5) より，GTH(B) の端点集合は QGSTAB(B) の整数端点集合，すなわち GSTAB(B) の端点集合と一致する．したがって，GTH(B) = GSTAB(B) となる．以上より，GSTAB(B) = GTH(B) = QGSTAB(B) となって，B はパーフェクトであることが証明された．

参考文献

[1] J. M. Bourjolly, "An Extension of the König-Egerváry Property to Node-Weighted Bidirected Graphs," *Mathematical Programming* **41** (1988) 375–384.

[2] V. Chvátal, "On Certain Polytopes Associated with Graphs," *Journal of Combinatorial Theory ser.B* **18** (1975) 138–154.

[3] J. Edmonds and E. L. Johnson, "Matching: A Well-Solved Class of Integer Programs," in *Combinatorial Structures and their Applications*, (R. Guy, H. Hanani, N. Sauer and J. Shönheim, eds.), Gordon and Breach (1970).

[4] T. Fujie and M. Kojima, "Semidefinite Programming Relaxation for Nonconvex Quadratic Programs," *Journal of Global Optimization* **10** (1997) 367–380.

[5] M. Grötschel, L. Lovász and A. Schrijver, "The Ellipsoid Method and Its Consequences in Combinatorial Optimization," *Combinatorica* **1** (1981) 169–197.

[6] M. Grötschel, L. Lovász and A. Schrijver, "Polynomial Algorithms for Perfect Graphs," *Annals of Discrete Mathematics* **21** (1984) 325–356.

[7] M. Grötschel, L. Lovász and A. Schrijver, "Relaxations of Vertex Packing," *Journal of Combinatorial Theory ser.B* **40** (1986) 330–343.

[8] M. Grötschel, L. Lovász, and A. Schrijver, *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, (Springer, New York, 1988).

[9] Y.T. Ikebe, A. Tamura, "Perfect Bidirected Graphs," Report CSIM96–2, Department of Computer Science and Information Mathematics, University of Electro-Communications, Tokyo.

[10] E.L. Johnson and M.W. Padberg, "Degree-Two Inequalities, Clique Facets, and Biperfect Graphs," *Annals of Discrete Mathematics* **16** (1982) 169–187.

[11] 小島政和, "半正定値計画問題と内点法," 応用数理 **6** (1996) 16–25.

[12] M. Kojima and L. Tunçel, "Cones of Matrices and Successive Convex Relaxations of Nonconvex Sets," *SIAM Journal on Optimization* **10** (2000) 750–778.

[13] L. Lovász and A. Schrijver, "Cones of Matrices and Set Functions and 0-1 Optimization," *SIAM Journal on Optimization* **1** (1991) 166–190.

[14] E. C. Sewell, "Binary Integer Programs with Two Variables per Inequality," *Mathematical Programming* **75** (1996) 467–476.

[15] A. Tamura, "The Generalized Stable Set Problem for Perfect Bidirected Graphs," *Journal of Operations Research Society of Japan* **40** (1997) 401–414.

[16] A. Tamura, "Perfect $(0, \pm 1)$-Matrices and Perfect Bidirected Graphs," *Theoretical Computer Science* **235** (2000) 339–356.