アルゴリズム 76－7
（2001．1．19）

レンタルスキー問題に対する平均的競合比の解析

藤原 洋志　　岩間 一雄
京都大学大学院情報学研究科
〒606-8501 京都市左京区吉田本町
{fujiwara,iwama}@lab2.kuis.kyoto-u.ac.jp

あらまし　オンライン問題における競合比の解析は，通常最悪の場合に対して行われている．本稿では我々はレンタルスキー問題に対して平均の場合の解析を試みる．つまり，スキーに行く回数に指数分布を仮定したモデルを考え，平均的競合比を定義しこれについて考察を進める．そして結果としてこの考察における最適解が，最悪の場合に対してのオンラインアルゴリズムの最適解とかなり異なってくることを示す。

Average-Case Competitive Analysis for the Ski-Rental Problem

Hiroshi Fujiwara　　Kazuo Iwama
Graduate School of Informatics, Kyoto University, Kyoto 606-8501, Japan

Abstract Competitive analyses for on-line computation have been carried out almost always for the worst case. In this paper, we consider an average-case competitive analysis for the ski-rental problem. Namely, under the assumption that the number of times a skier goes to ski follows the geometric distribution, we define and analyze an average competitive ratio. It is proved that optimal solutions for this model can be quite different from those for the worst-case analysis.

1　はじめに

オンライン問題はオンライン競技者と敵対者のゲームであると位置付けられる．入力の初めの方で競技者がある戦略に従って行動を決めると，敵対者は，競技者が一度決めた行動を修正できないことを利用して，その後の入力として「意地の悪い」入力を選んで攻撃する．勿論，競技者もそれは分かっているので，そのような攻撃をできるだけ緩和できるように，後々のことを考えて現在の行動を決定するというゲームである．例えば有名なレンタルスキー問題 [1] を考えて見よう．競技者がスキーを早く買えば敵対者はその後でスキーに行かない様な入力を選ぶし，なかなかスキーを買わなければどんどんスキーに行くような入力を選ぶ．

このような敵対者の攻撃は，敵対者が「各時刻において自由に入力を選択できる」ことが許されて始めて可能になるのである．従って，敵対者のこの自由度が制限されるならオンラインゲームはそもそも成立しなくなる．自由度を制限する典型的な方法は入力の分布を仮定することである．入力の分布を仮定して平均的な議論をすることはアルゴリズムの様々な分野で研究されている人気の高いテーマであるが，オンライン問題に限ってはほとんど行なわれていない．その理由が上で述べたような懸念にある．即ち敵対者の能力を殺してしまってオンラインゲームの面白みがなくなってしまうことを恐れたからであるのは間違いない．実際，敵対者の能力を制限した研究は，競技者が乱数を利用できるという制限の弱いモデル（これは敵対者の能力は全く制限していないが，競技者の能力を上げているため相対的に敵

対者の能力が弱くなっているだけである）を除いてはほとんどない．Koutsoupias と Papadimitriou[2] の競技者が入力の分布の不完全な知識を持っているモデルと Raghavan[3] の入力がある統計的性質に従うモデルが知られている程度である．

本論文の目的はこのような研究者共通の認識が必ずしも正しくないことを示すことである．即ち，入力に自然な分布を仮定して，競技者がその分布に対して完全な知識を持っていたとしてもオンラインゲームは成立するし，実用的・理論的に興味深い結果を与えてくれることをしめす。具体的問題としてはレンタルスキー問題を取り上げる．

より具体的に述べると，我々は平均的競合比を解析するのである．競合比はある入力 x に対するオンラインのコストを最適のオフラインのコストで割ったものである．この値の x を変化させた時の最悪値が通常の定義である．我々はこの最悪値を，単に入力の分布に従って計算された期待値に置き換えるだけである．スキーレンタル問題の場合は，このように変更しても，オンラインアルゴリズム特有の「最初はレンタルで適当な時点で買うべきである」という戦略がベストになる．更に，スキーを買うべき時点が最悪評価の場合より前にずれ込む特徴があり，これが多くの消費者の行動により合致しているのではないかと考えている．

平均の競合比と平均のコストを混同しないでほしい．実はオンライン問題の解析は競合比の概念が出されるより以前はほとんどがこの平均的コストを使って行なわれていた．簡単な例を見て欲しい．今スキーがレンタルだと 1 回 1 万円，一式買うと 10 万円かかるとする．(最悪の競合比をつかう場合は 9 回目までレンタル，10 回目に行く時に買うという戦略が競合比 1.9 で最適であることが分かっている.）いま極端な場合としてスキーに 6 回行く確率が 50%，20 回行く確率も 50%で他の回数は全て確率 0 という分布を考えてみる．2 つのオンラインアルゴリズムを考えてみる．(A) 最初に買う．(B)6 回目まではレンタル，7 回目に行く時に買う．(A) の平均のコストは 10 万，平均の競合比は $(10/6)\times 0.5+1.0\times 0.5=1.33$ である．(B) の平均のコストは $6\times 0.5+16\times 0.5=1.1$ 万円で (A) より悪い．しかし平均の競合比は $1.0\times 0.5+(16/10)\times 0.5=1.3$ で (A) より良い．このように平均のコストと使う時と平均の競合比を使う時でアルゴリズムの良さが完全に逆転する場合があるのである．この例は極端であまり良い例とはいえないが，より自然な分布を使ってた場合も両者の結果は大きく異なってくることが示される．平均的競合比は，平均的コストでも最悪の競合比でも得られない新しい知見を与えてくれる可能性が十分ある．

オンライン問題の競合比を使用した解析は多くの研究者を魅了してきた．しかしその一方で，ページング等の一部の問題では，経験的にはかなり異なった性能の 2 つのアルゴリズムであるのに競合比ではそれらの違いが出せないことが分かってきた．最悪値評価の欠点が現れた典型的な例であり，その様な例の存在がオンラインアルゴリズムの研究の停滞を招いているという指摘さえある．本稿の平均的競合比がこのような困難の突破口になることを期待している次第である．

2 レンタルスキー問題

準備としてレンタルスキー問題を定式化する．スキーを 1 回レンタルするコストを 1，スキーを購入するコストを s とする．スキーヤーは自分が何回スキーをするかは分からないという前提のもと，スキーを購入するまで何回 (k 回) スキーをレンタルするかを決定しなければならない．コストの表記は，スキーに行く回数を t として，$\mathrm{ALG}(k,t)$ で実際のスキーヤーのコストを表し，また $\mathrm{OPT}(t)$ でオフラインにおける，つまり t が既知である場合に最適なコストを表すものとする．これらは，

$$\mathrm{ALG}(k,t) = \begin{cases} t & : \ 0 \le t \le k \\ k+s & : \ k < t \end{cases} \tag{1}$$

$$\mathrm{OPT}(t) = \min(s,t) \tag{2}$$

と書ける．

いわゆるレンタルスキー問題はこのときの競合比 $\max_t \frac{\mathrm{ALG}(k,t)}{\mathrm{OPT}(t)}$ (すなわち最悪の場合のコスト比) を最小にする k を求める問題である．これについては解 $k = s - 1$ (競合比 $2 - 1/s$) が最適であることが知られている．

我々は，上に述べた最悪の場合の評価の代わりに，平均の場合の評価を考察する．すなわち，スキーに行く回数 t が，ある確率分布に従う問題を考える．

3 レンタルスキー問題に指数分布を仮定した平均的競合比

以下本稿ではレンタルスキー問題に関し，連続量のモデルを扱う．すなわち，t, s, k を正の実数とする．このとき最悪の場合の最適解は，$\max_t \frac{\mathrm{ALG}(k,t)}{\mathrm{OPT}(t)}$ を評価することにより，$k = s$ (競合比 2) と求まる．

その上で，スキーに行く回数 t がある確率分布に従う問題を考える．t の確率密度関数を $f(t)$ とする．ここで，**平均的競合比**

$$c(k) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{ALG}(k,t)}{\mathrm{OPT}(t)} \cdot f(t)dt \tag{3}$$

を定義する．これはコストの比をスキーに行く回数に関して平均したものである．この平均的競合比を最小とする k(すなわちレンタルする回数) がこの問題に対する最適なアルゴリズムとなる．

特に本稿では，スキーに行く回数 t に**指数分布**を仮定する．すなわち確率密度関数として

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (\lambda > 0) \tag{4}$$

を用いる．t の平均値は $\int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}$ となることから，つまりパラメータ λ とは，スキーに行く回数の平均が $\frac{1}{\lambda}$ となるような数である．この指数分布は，ちょうど t 回スキーに行く確率 $(\lambda e^{-\lambda t}dt)$ と，t 回以上スキーに行く確率 $(e^{-\lambda t})$ との比が，t に依存しないというモデルである．

指数分布を仮定した平均的競合比は，式 (1), (2), (3), (4) より，区間毎に積分することで次のように求まる．

$0 < k \leq s$ のとき，

$$\begin{aligned} c(k) &= 1 - e^{-\lambda k} + (k+s)\int_k^s \frac{1}{t}\lambda e^{-\lambda t}dt + \frac{k+s}{s}e^{-\lambda s} \\ &= 1 - e^{-\lambda k} + \lambda(k+s)(\mathrm{Ei}(-\lambda s) - \mathrm{Ei}(-\lambda k)) + \frac{k+s}{s}e^{-\lambda s} \end{aligned} \tag{5}$$

ここで $\mathrm{Ei}(-x) = -\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt$ は積分指数関数とよばれ，初等関数では表されない．[4]

一方 $s < k$ のとき

$$c(k) = 1 + \frac{1}{\lambda s}e^{-\lambda s} - \left(\frac{1}{\lambda s} - 1\right)e^{-\lambda k} \tag{6}$$

と求まる．

また $c(k)$ を k で微分すると，

$0 < k < s$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{dc(k)}{dk} &= -\frac{s}{k}\lambda e^{-\lambda k} + \int_k^s \frac{1}{t}\lambda e^{-\lambda t}dt + \frac{1}{s}e^{-\lambda s} \\ &= -\frac{s}{k}\lambda e^{-\lambda k} + \lambda(\mathrm{Ei}(-\lambda s) - \mathrm{Ei}(-\lambda k)) + \frac{1}{s}e^{-\lambda s} \end{aligned} \tag{7}$$

となる．
一方 $s<k$ のとき

$$\frac{dc(k)}{dk}=\left(\frac{1}{s}-\lambda\right)e^{-\lambda k} \tag{8}$$

と計算される．

さらに後の考察のため $0<k<s$ のとき，

$$\frac{d^2c(k)}{dk^2}=\lambda e^{-\lambda k}\frac{1}{k^2}(\lambda s+s-k)>0 \tag{9}$$

が $\lambda>0$，$s-k>0$ より成り立つことを述べておく．

4　平均的競合比の解析

4.1　平均的競合比の増減

$k\to 0$ では $c(k)$ は，λ が有限なら式 (5) の定積分の項が $+\infty$ に発散することから，$c(k)$ も $+\infty$ に発散することが分かる．また次に述べるように $c(k)$ の増減は，λ と $\lambda^*=\frac{1}{s}$ との大小によって様子が異なる．

(i) $\lambda>\lambda^*$ の場合 (すなわち，スキーに行く回数の平均 $\frac{1}{\lambda}<s$)．
$0<k\le s$ では式 (9) と，式 (7) から $\lim_{k\to s-0}\frac{dc(k)}{dk}=\left(s-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda s}<0$ がいえ，$c(k)$ は単調減少する．一方 $s<k$ では式 (8)<0 となり単調減少である．そして $\lim_{k\to\infty}c(k)=1+\frac{1}{\lambda s}e^{-\lambda s}$ である．

k	0	$\cdots$	s	$\cdots$	$+\infty$
$c'(k)$		$-$		$-$	
$c(k)$	$+\infty$	$\searrow$	$1+e^{-\lambda s}$	$\searrow$	$1+\frac{1}{\lambda s}e^{-\lambda s}$

表 1: $\lambda>\lambda^*$ の場合の $c(k)$ の増減

(ii) $\lambda=\lambda^*$ の場合 ($\frac{1}{\lambda}=s$)．
$0<k\le s$ では式 (7) より $\lim_{k\to s-0}\frac{dc(k)}{dk}=\left(s-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda s}=0$ であることと (i) と同様の議論により非増加関数と分かる．一方 $s<k$ では $c(k)=1+e^{-1}$ で $c(k)$ は一定である．

k	0	$\cdots$	s	$\cdots$	$+\infty$
$c'(k)$		$-$		0	
$c(k)$	$+\infty$	$\searrow$	$1+e^{-1}$	$\rightarrow$	$1+e^{-1}$

表 2: $\lambda=\lambda^*$ の場合の $c(k)$ の増減

(iii) $\lambda<\lambda^*$ の場合 ($\frac{1}{\lambda}>s$)．
$0<k\le s$ では式 (9) と式 (7) から $\lim_{k\to s-0}\frac{dc(k)}{dk}=\left(s-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda s}>0$ がいえ，また

$$\lim_{k\to+0}\frac{dc(k)}{dk}=-\infty \tag{10}$$

であることから $0<k<s$ において $\frac{dc(k)}{dk}=0$ をみたす k がただ1つ存在する．
式 (10) は以下の様に証明することができる。式 (7) の定積分の項に注目し，$\frac{1}{t} \leq -\frac{1}{sk}(t-s)+\frac{1}{s} \quad (k \leq t \leq s)$ が成り立つことを用いると定積分が計算でき，

$$\frac{dc(k)}{dk} < \frac{1}{\lambda sk}\left\{\lambda s(1-\lambda s)e^{-\lambda k}+(1-\lambda k)(e^{-\lambda s}-e^{-\lambda k})\right\} \tag{11}$$

式 (11) で中括弧で囲まれる部分で $k=0$ とすると

$$e^{-\lambda s}-1+\lambda s-(\lambda s)^2 \tag{12}$$

式 (12) を $0<\lambda s<1$ をみたす λs についての関数と見なすと，これが有限の負の値をとることは容易に分かる．式 (11) の右辺は k に関して連続であり上に述べたことから $k \to 0$ のとき $-\infty$ に発散する．従って式 (10) が成り立つ． □
一方 $s<k$ では式 (8)>0 より単調増加となる．

k	0	$\cdots$	k_0	$\cdots$	s	$\cdots$	$+\infty$
$c'(k)$		$-$		$+$		$+$	
$c(k)$	$+\infty$	$\searrow$	$c(k_0)$	$\nearrow$	$1+e^{-\lambda s}$	$\nearrow$	$+\infty$

表 3: $\lambda<\lambda^*$ の場合の $c(k)$ の増減

(iv) $\lambda \to 0$ の場合 $(\frac{1}{\lambda} \to +\infty)$.
$0<k \leq s$ では容易に $c(k) \longrightarrow 1+\frac{k}{s} \quad (\lambda \to 0)$ が分かる．一方 $s<k$ では $c(k)=1+\frac{1}{\lambda s}\left(e^{-\lambda s}-e^{-\lambda k}\right)+e^{-\lambda k}$ であるが，ここで $h(x)=e^{-\lambda x}$ について平均値の定理を適用すると $e^{-\lambda s}-e^{-\lambda k}=-\lambda e^{-\lambda\theta}(s-k)$ となる $\theta \quad (s<\theta<k)$ が存在する．これを用いると $c(k) \longrightarrow 1+\frac{k}{s} \quad (\lambda \to 0)$ となる。以上より $\lambda \to 0$ ならば k の範囲に関わらず $c(k)$ は一次関数 $1+\frac{k}{s}$ に近づく．

4.2 $c(k)$ を最小化する最適解 k_0

以上より (i) の場合は，$c(k)$ が最小となる k は存在せず，つまりスキーは購入せずずっとレンタルした方が良い場合である．次に (ii) の場合は，$s<k$ をみたすすべての k について $c(k)$ は最小 (一定) の値をとることが分かった．また (iii) の場合には，以上より $c(k)$ が最小となる k は $0<k<s$ の範囲に唯一存在することが示され，すなわちその k が最適なレンタル回数となる．

いま特に興味深いのは (iii) の $\lambda<\lambda^*$ $(\frac{1}{\lambda}>s)$ の場合である．なぜならばこの場合のみ平均的競合比 $c(k)$ を最小にする最適解 k_0 をもち，$0<k_0<s$ の範囲にただひとつ存在するからである．これは先に述べた最悪の場合の最適解 $k=s$ よりも小さい．なお，この (iii) とはスキーに行く回数の平均がスキーの購入コスト s より大きい場合を意味する．

それでは $c(k)$ を最小にする k_0 はどのような値をとるのであろうか．k_0 は λ によって決まり，式 (7)$=0$ の解であるが，これは解析的には解けない．以下ではパラメータ a を $a=s\lambda \quad (0<a<1)$ で定義し，a と k_0 との関係を調べる．ここで a とはすなわち，$\frac{1}{s}(=\lambda^*)$ に対する λ の比である．この a に対し，k_0 をニュートン法で計算すると図 2 に示す $k_0=k_0(a)$ のグラフになる．(グラフは $s=10$ の場合)

なお $k=k_0$ のときの平均的競合比 $c(k)$ は，次のようになる．

$$c(k_0)=1-(1-\lambda s-\frac{\lambda s^2}{k_0})e^{-\lambda k_0} \tag{13}$$

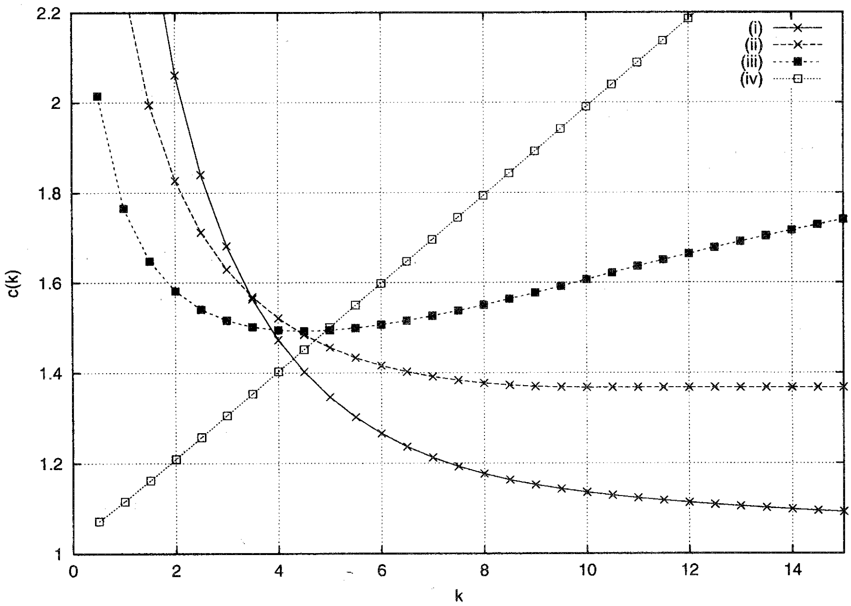

図 1: 平均的競合比 $c(k)$ のグラフ　($s = 10, \lambda = 0.2, 0.1, 0.05, 0.001$)

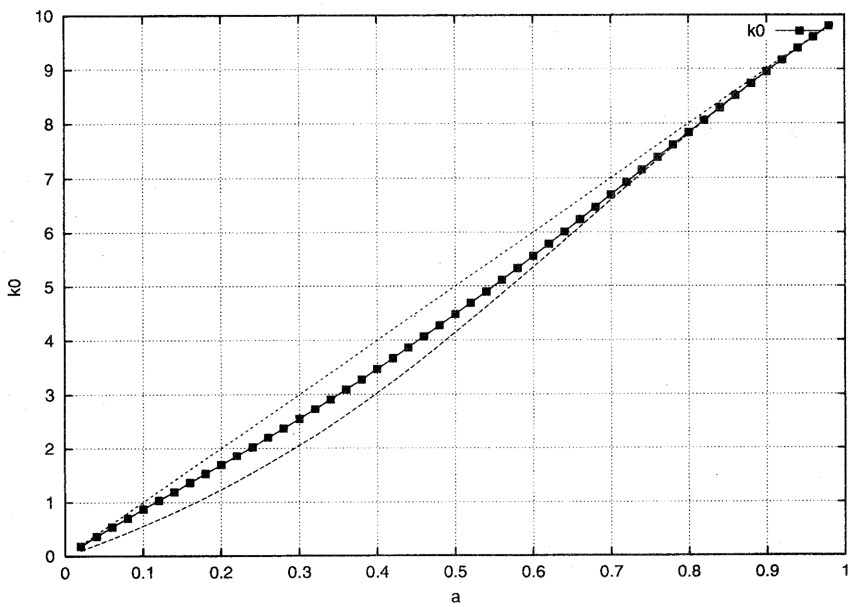

図 2: k_0-a グラフ (ただし薄い点線は後述する上限と下限, $s = 10$)

4.3 最適解 k_0 の範囲

最適解 k_0 については

$$s\left\{1-\frac{1}{a}+\sqrt{\left(1-\frac{1}{a}\right)^2+1}\right\}<k_0<sa \tag{14}$$

が成立する．これは以下の様に証明できる。$\frac{dc(k)}{dk}=0$ の解に関する議論であるが，式 (9) より $\frac{dc(k)}{dk}$ は単調増加であることが分かっている．

(上限) $\frac{dc(k)}{dk}$ の定積分の項に対し $\frac{1}{t}\geq\frac{1}{s}$ $(s\leq t\leq k)$ を適用すると，

$$\frac{dc(k)}{dk}>-\frac{s}{k}\lambda e^{-\lambda k}+\int_k^s\frac{1}{s}\lambda e^{-\lambda t}dt+\frac{1}{s}e^{-\lambda s}=(\frac{1}{s}-\frac{\lambda s}{k})e^{-\lambda k} \tag{15}$$

式 (15) の最後の式は $k=s^2\lambda=sa$ のとき 0 になる．したがって $\frac{dc(k)}{dk}=0$ の解 k_0 について $k_0<sa$ が成立する．

(下限) $\frac{dc(k)}{dk}$ の定積分の項に対し，$\frac{1}{t}\leq-\frac{1}{sk}(t-s)+\frac{1}{s}$ $(k\leq t\leq s)$ を適用すると，

$$\frac{dc(k)}{dk}<\left(\frac{1}{s}-\frac{\lambda s}{k}\right)e^{-\lambda k}+\frac{1}{sk}\int_k^s(s-t)\lambda e^{-\lambda t}dt \tag{16}$$

ここで定積分を計算せず，$e^{-\lambda t}<e^{-\lambda k}$ を用いると，

$$\frac{dc(k)}{dk}<\left(\frac{1}{s}-\frac{\lambda s}{k}\right)e^{-\lambda k}+\frac{\lambda}{sk}e^{-\lambda k}\int_k^s(s-t)dt=\frac{\lambda}{2sk}e^{-\lambda k}\left\{k^2-2\left(s-\frac{1}{\lambda}\right)k-s^2\right\} \tag{17}$$

式 (17) の最後の式は $k=s-\frac{1}{\lambda}+\sqrt{\left(s-\frac{1}{\lambda}\right)^2+s^2}=s\left\{1-\frac{1}{a}+\sqrt{\left(1-\frac{1}{a}\right)^2+1}\right\}$ のとき 0 になる．したがって $\frac{dc(k)}{dk}=0$ の解 k_0 について $s\left\{1-\frac{1}{a}+\sqrt{\left(1-\frac{1}{a}\right)^2+1}\right\}<k_0$ が成立する． □

5 平均的競合比と平均コスト

平均的競合比の解析の比較対象として平均コストの評価について少し述べる．今までの考察と同様に，スキーに行く回数 t に指数分布を仮定した場合の平均コスト $m(k)$ を次に示す．

$$m(k)=\int_0^\infty \mathrm{ALG}(k,t)\cdot f(t)dt=\left(s-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda k}+\frac{1}{\lambda} \tag{18}$$

この平均コストの増減も λ と $\lambda^*=\frac{1}{s}$ との大小によって様子が異なる．(i) $\lambda>\lambda^*$ なら k に対し単調減少で最小値なし．(ii) $\lambda=\lambda^*$ なら一定．(iii) $\lambda<\lambda^*$ なら単調増加で最小は $k=0$ のとき $m(0)=s$.

このように，我々の行った平均的競合比の解析とこの平均コストの評価はかなり異なる．確かに $\lambda>\lambda^*$ の場合では，両者共にずっとレンタルすることが最適である．しかし，$\lambda<\lambda^*$ の場合では，平均的競合比の解析では最適解 $k=k_0$ (>0)，平均コストの評価では最適解 $k=0$ となる．すなわち平均コストの評価では，有限で正の最適解は存在しない．

6 おわりに

指数分布を仮定したレンタルスキー問題に対する平均の場合の評価を解析してきたが，この問題における結果は，$\lambda<\lambda^*$ $(\frac{1}{\lambda}>s)$ の場合，つまりスキーに行く回数の平均値がスキーの購入コストより大

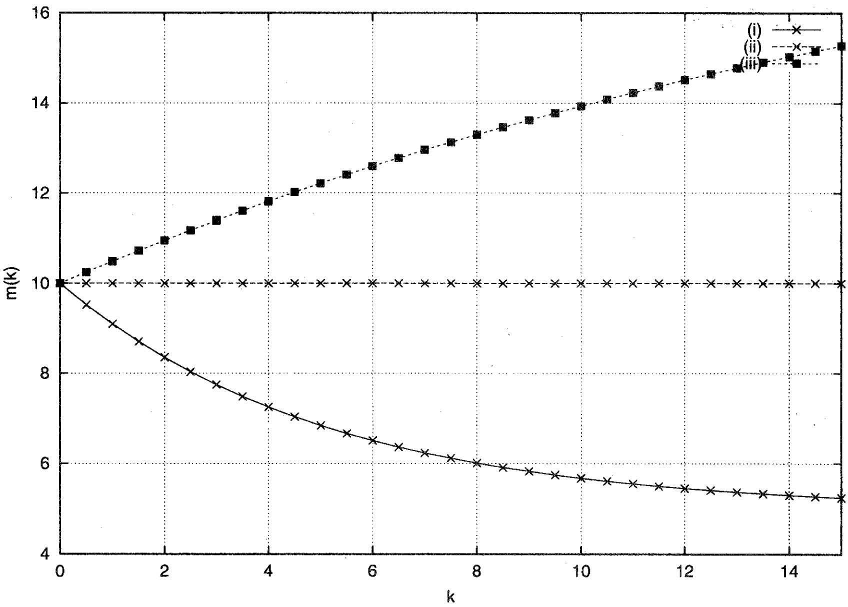

図 3: 平均コスト $m(k)$ のグラフ $(s=10, \lambda=0.2, 0.1, 0.05)$

きい場合には，最悪の場合の評価の解 $k=s$ より，早くスキーを購入する方が良いということを示している．そして，その最適解 k_0 は λ の一次関数 $s^2\lambda$ よりも小さい．さらに，スキーに行く回数の平均 $\frac{1}{\lambda}$ が大きくなるにしたがって，それに反比例して k_0 は小さくなる．

この結果は，問題の意味に立ち戻ると，スキーがコスト s で購入出来るとき (実際にはレンタルに対する購入の比だが)，その s 回もレンタルを繰り返さないだろう，むしろもっと早い時期に購入してしまうだろう，という直観と一致しているようで大変面白い．また，一般に行われている最悪の場合の評価が本当に良いのだろうか，という疑問を投げかける結果でもある．

謝辞 4.3 節で有用なコメントをいただいた本学岡部寿男博士に感謝します．

参考文献

[1] Richard M. Karp, "On-Line Algorithms Versus Off-line Algorithms: How Much is it Worth to Know the Future?", *Proc.IFIP 12th World Computer Congress*, Vol.1, pp.416-429, 1992.

[2] E.Koutsoupias and C.Papadimitriou, "Beyond competitive analysis," *Proc.IEEE FOCS*,pp.394-400, 1994.

[3] P.Raghavan, "A statistical adversary for on-line algorithms," *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*,7,pp.79-83, 1992.

[4] 森口 繁一, 宇田川かね久, 一松 信, "数学公式 I", 岩波書店, 1956.