単体的複体の shellability 判定

森山 園子
東京大学大学院 理学系研究科
情報科学専攻 今井浩研究室 修士課程 2 年

Abstract

shellability は組合せ分割と呼ばれる性質の 1 つで, 上限値問題や凸包形成において重要な概念として知られている. 通常の場合, 単体的複体の shellability 判定には facet 数の階乗時間を要する. そこで, 個々の単体的複体に対応する *h-assignment* という新しい概念を定義し, h-assignment の shellability 判定を facet の線形時間で判定可能とするアルゴリズムを与える. つまり, 単体的複体の shellability 判定は適切な h-assignment の生成に依存する. そこで, ある性質を満たす *division* という facet の部分集合を定義し, 単体的複体を division 集合に分割することで, 適切な h-assignment を効率よく生成するアルゴリズムも提案する.

Deciding shellable simplicial complexes

Sonoko Moriyama
Department of Information Science,
Faculty of Science, The University of Tokyo

Abstract

Shellability is one of combinatorial decomposition properties, and is famous for the upper bound theorem and convex hull construction. In general, it takes $O(\#facets!)$ time to dedide shellability of simplicial complexes. Then, we define a new concept, a *h-assignment*, corresponding to each simplicial complex, and give an algorithm which can decide shellability of h-assignments in $O(\#facets)$ time. Therefore, it is crucial for how we can generate appropriate h-assignments. Then, we define a set of facets satisfying some property, a *division*, divide a given simplicial complex into a set of divisions, and also give an algorithm to generate appropriate h-assignments efficiently.

1 Introduction

本研究では, *shellable* である単体的複体が有する性質の理解を目的としている. 単体的複体の facet の全順序がある位相的条件を満たす場合にその全順序を *shelling* といい, その性質を *shellability* という. shellability は, 単体的複体に対して定義された一連の組合せ分割と呼ばれる性質の 1 つで, 上限値問題や凸包形成において重要な概念として知られている.

組合せ分割における重要な問題として, 与えられた単体的複体がある性質を持つか否かを決定する効率的なアルゴリズムが存在するか, という判定問題がある. この決定問題は組合せ分割の分野で取り組むべき重要な問題であるにも関わらず, 既存研究は以下に示した研究のみとなっており, アルゴリズムに関する結果がほとんどないと言っても過言ではない.

- Gopal Danaraj and Victor Klee, *A presentation of 2-dimensional pseudomanifolds and its use in the design of a linear-time shelling algorithm*, Annals of Discrete Mathematics 2 (1978), 53-63.
- Adriano M. Garsia, *Combinatorial methods in the theory of Cohen-Macaulay rings*, Advances in Math. 38 (1980), 229-266.
- S. D. Noble, *Recognizing a partitionable simplicial complex is in NP*, Discrete Math. 152 (1996), 303-305.
- M. Hachimori, *Deciding constructibility of 3-balls with at most two interior vertices*, Discrete Math., to appear.

shellability に関しては, 2 次元擬多様体の shellability は facet 数の線形時間で判定可能という Danaraj & Klee(1978) による研究が唯一の結果であるが, 2 次元擬多様体を研究対象としているため, 特殊な場合の shellability 判定となっている. そこで, 本研究では研究対象を一般 d 次元の単体的複体とし, d 次元単体的複体の shellability を決定するアルゴリズムを提案している.

まず最初に, 本研究で用いる諸用語の定義その他を行う. 本研究の shellability 判定アルゴリズムの構成は, 各単体的複体に対応する h-vector を既存形式とは別の形式で再定義したこと (Proposition 2.13.) が大きな一歩となっている.

通常の場合, 単体的複体の shellability 判定には facet 数の階乗時間を要する. そこで, 個々の単体的複体に対応する *h-assignment* という新しい概念を定義し, h-assignment の shellability 判定を facet の線形時間で判定可能とするアルゴリズムを与える.

つまり, 単体的複体の shellability 判定は適切な h-assignment の生成に依存する. そこで, ある性質を満たす *division* という facet の部分集合を定義し, 単体的複体を division 集合に分割することで, 適切な h-assignment を効率よく生成するアルゴリズムも提案する.

2 Preliminaries

2.1 Simplicial complexes

2.1.1 Basic definitions

Definition 2.1. A *simplicial complex* C is a set of simplices in some Euclidian space such that

- if $\delta \in C$ and τ is a face of δ, then $\tau \in C$, and
- if $\delta,\ \tau \in C$, then $\delta \cap \tau$ is a face of both δ and τ.

特に, 単体的複体が空でないとき, 空集合 $\emptyset$ は常に単体的複体の構成要素として含まれる.

単体的複体の次元が k であるとき, 単体的複体の構成要素は *faces* または *k-faces* と呼ばれる. 0-faces は *vertices*, 1-faces は *edges*, そして包含関係において極大となる face を *facets* という. また, 単体的複体の次元は各 facet の最大次元として定義される.

特に, 単体的複体の全ての facet が同じ次元であるとき, 純 (*pure*) であるという. 更に, 純な単体的複体において, どの 2 つの facet F と G に関しても

$$F = F_1,\ F_2, ...,\ F_k = G \quad \text{s.t. } F_i \text{ and } F_{i+1} \text{ has a common } (d-1)\text{-face, for each } 1 \leq i \leq k-1$$

を満たす facet 列が存在するとき, 強連結 (*strongly connected*) であるという.
強連結な単体的複体に対して更なる条件を付加することで, 特殊な単体的複体として擬多様体 (*pseudomanifold*) が定義される.

Definition 2.2. A *pseudomanifold* is a pure simplicial complex which is strongly conneted and every $(d-1)$-face is contained in at most two facets.

Lemma 2.3.

- The *boundaryRidge* δC of a pure d-dimensional simplicial complex C is the closure of $(d-1)$-dimensional faces which belongs to only one facet.
- The *boundaryFacet* contains at least one *boundaryRidge*.

この定義において, A の閉包 (*closure*) $\bar{A}$ とは, A を含む最小の単体的複体, つまり A における全ての face 集合を指す.

2.1.2 The number of faces: f-vectors & h-vectors

d次元単体的複体 C に対して, i-faces の数を $f_i(C)$ で示したベクトル $f(C) = (f_{-1}(C),\ f_0(C),\ f_1(C), ..., f_d(C))$ を C の *f-vector* という.

Definition 2.4. The *f-vector* of a d-dimensional simplicial complex C is the vector

$$f(C) = (f_{-1}(C),\ f_0(C),\ f_1(C), ..., f_d(C))$$

where $f_i(C)$ denotes the number of k-dimensional faces in C.

この f-vector と生成多項式 *f-polynomial* を関連づけて考える. この多項式から, もう 1 つの不変ベクトルである *h-vector* が以下に示す $f(C, x-1)$ の係数として定義される.

$$f(C, x-1) = h_0(C)x^{d+1} + h_1(C)x^d + \cdots + h_d(C)x + h_{d+1}(C).$$

Definition 2.5. The *h-vector* of a d-dimensional simplicial complex C is the vector

$$h(C) = (h_0(C),\ h_1(C),\ h_2(C), ..., h_{d+1}(C))$$

where $h_i(C)$ denotes the coefficient of *f-polynomial* $f(C, x-1)$.

これら 2 つのベクトルは線形変換により関係づけられるため, 一方のベクトルからもう一方のベクトルを unique に決定できる.

Lemmma 2.6. From *f-vector*, the corresponding *h-vector* is given by the following formula:

$$h_k(C) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \begin{pmatrix} d+1-i \\ d+1-k \end{pmatrix} f_{i-1}(C).$$

この線形変換を解りやすく示しているのが, Pascal の三角形に似た差分表を使った *Stanlay's trick* として知られている手法である. f-vector の各項 f_i を Pascal の三角形の各行における最右エントリに, 1 を最左エントリに配置し, 他のエントリについては以下の計算を行うことで, 容易に h-vector を求められる.

upper right neighbor - upper left neighbor

2.2 Combinatorial decomposition properties

2.2.1 Shellability

Definition 2.7. An ordering of the facets $F_1,\ F_2, ..., F_t$ of a d-dimensional simplicial complex is a *shelling* if the following condition is satisfied:

$$(\bar{F_1} \cup \bar{F_2} \cup \cdots \bar{F_{i-1}}) \cap \bar{F_i} = \text{a pure } (d-1)\text{-dimensional simplicial complex for } 2 \leq i \leq t.$$

A simplicial complex is *shellable* if it admits a shelling.

一般の単体的複体において定義に従って shelling を構成する場合は, 条件式を満たすことに注意しつつ逐次的に構成するため, 非常に手間がかかる. しかし, ある性質を満たす特殊な単体的複体の場合は, shelling の最後に配置される facet F_t は必ず boundaryFacet となることが知られている.

Proposition 2.8.

- The maximum term $h_{d+1}(C)$ of the h-vector $(h(C) = (h_0(C),\ h_1(C),\ h_2(C), ..., h_{d+1}(C)))$ for a pure d-dimensional simplicial complex C is zero.
- The last facet in each shelling of C is a boundaryFacet.

つまり, 定義に従って逐次的に shelling を構成するのではなく, 最後に配置される facet が boundaryFacet であることを使って, shelling を逆順から恣意的に構成することが可能となる.

2.2.2 Partitionability

Definition 2.9. A simplicial complex C is *partitionable* if the set of facets C is partitioned into the sets of the form $\{\tau\ :\ \phi(\delta) \subseteq \tau \subseteq \delta\}$, where δ is a facet of C and $\phi(\delta)$(*restriction*) is a facxet of δ.

face poset において単体的複体 C が partitionable であるとは, (最上段要素を除いた) 単体的複体の face poset を最上段要素が facet となる interval に分割できる場合に対応する. また, partitionable な単体的複体のクラスの 1 つに shellable な単体的複体が存在する. つまり, shellable な単体的複体 C に対応する shelling $F_1,\ F_2, ..., F_t$ から簡単に partition を生成することができる.

Lemma 2.10.

- For F_1, we set $\phi(F_1) = \emptyset$.
- For F_i with $i \geq 2$, we set $\phi(F_i)$ to be the unique minimal face R_i of F_i which is not contained in $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_{i-1}$.

また, patitionable である純な単体的複体 C に関して, h-vector の各項 $h_i(C)$ を partitionability との関連から以下のように再定義できる.

Lemma 2.11. For a partitionable simplicial complex, we have

$$h_i(C) = \#\{\delta\ ;\ \dim \phi(\delta) = i - 1\}.$$

つまり, Lemma 2.10. で示した shelling から partition を構成する方法により, shelling $F_1,\ F_2, , ..., F_t$ から容易に h-vector を計算することが可能となる. また, h-vector は単体的複体の f-vector から一意に決定されるので, shelling から partition を構成するとき, この shelling の選択は h-vector の値に依存しない.

Lemma 2.12.

- If a pure d-dimensional simplicial complex C is partitionable, the h-vector is nonnegative.
- If C is shellable, the entry h_i counts the facets in a shelling whose restriction has size i, and this number is independent of the particular shelling chosen.

Lemma 2.11. から, $h_i(C)$ は, shelling の逐次的な構成において, $F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_{i-1}$ に新たな facet F_i を加えたとき, $F_j (0 \leq j \leq i-1)$ に含まれない F_i の最小 face(*restriction*) の次元が $i-1$ となる facet の数に対応する. 新たな facet F_i を加えた時点で構成された (partial)shelling は, 単体的複体 C における shellable な部分複体 (subcomplex) $C' = F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_{i-1} \cup F_i$ となる. 従って, d 次元単体的複体 C において, 新たな facet F_i の最小 face の次元が facet の次元 d でない, つまり $0 \leq k \leq d-1$ となるとき, facet F_i について以下の 2 点が導かれる.

- facet F_i は部分複体 C' における boundaryFacet である.
- F_i の最小 face(*restriction*) は $d - k$ つの boundaryRidge の交わりである.

そこで, Lemma 2.11. において partitionability との関連から再定義した h-vector の各項 $h_i(C)$ を, 更に shellable である純な単体的複体 C に関しては, shellability との関連から以下のように再定義できる.

Proposition 2.13. For a d-dimensional shellable simplicial complex C, we select one arbitrary shelling $F_1,\ F_2, ...,\ F_t$. Counting the number of boundaryRidges when one facet F_j is added to the previous set of facets $F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_{j-1}$, we can construct the h-vector of C.

- $i = 0$: $h_0(C) = 1$
- $1 \leq i \leq d+1$: $h_i(C) = \#\{F_j\ ;\ \#boundaryRidges \text{ in facet } F_j = d - i + 1\ (1 \leq j \leq t)\}$.

Proposition 2.13. により h-vector を解釈することで, shelling の構成について以下の 2 点が導かれる.

- $h_0(C)$ 項は, shelling の最初に配置される facet に対応する.
- $h_i(C)$ $(1 \leq i \leq d+1)$ 項は, shelling として facet が配置されたときに有する boundaryFacet の数が $d - i + 1$ である facet の数に対応する.

Lemma 2.12. より, shellable な単体的複体の h-vector の値は, h-vector を構成する際に用いる shelling に依存しない. 従って, 単体的複体に対して shelling は多数存在するが, facet が配置されたときに有する boundaryFacet の数に対応する facet の数は全ての shelling において一定である, つまり大きな意味での shelling の構成は 単体的複体の構成そのもの (h-vector) に依存することになる.

以降では, ここまでの定義を元に, 単体的複体に対応する h-vector について更なる分析を行うことで, *h-assignment* や *division* といった新しい概念を提起し, これらを用いて shellability 判定アルゴリズムを考えていく.

3 Deciding shellabiliity

3.1 h-assignment

Proposition 2.13. により, 単体的複体に対して shelling は多数存在するが, facet が配置されたときに有する boundaryFacet の数に対応する facet の数は全ての shelling において一定であることがわかった. つまり, d 次元の shellable な単体的複体 C の h-vector が

$$h(C) = (h_0(C) = n_0 = 1,\ h_1(C) = n_1, ...,\ h_d(C) = n_d,\ h_{d+1}(C) = n_{d+1}),\ \sum_{i=0}^{d+1} n_i = \#facets$$

として与えられた場合, shelling を構成する全 facet に対して $h_i(C)$ というラベルが n_i ずつ割り当てられていると考えることができる.

- $\#\ h_0(C) = n_0 = 1$: shelling の最初に配置される facet
- $\#\ h_1(C) = n_1$: $\#\{\#boundaryRidges = d$ である facet$\} = n_1$
- $\#\ h_2(C) = n_1$: $\#\{\#boundaryRidges = d-1$ である facet$\} = n_2$
- $\cdots$
- $\#\ h_d(C) = n_d$: $\#\{\#boundaryRidges = 1$ である facet$\} = n_d$
- $\#\ h_{d+1}(C) = n_{d+1}$: $\#\{\#boundaryRidges = 0$ である facet$\} = n_{d+1}$

このように, d 次元単体的複体 C の全 facet に対して, 単体的複体の h-vector の各項 $h_i(C)$ をラベルとして, 各項 $h_i(C)$ の数 n_i ずつ割り当てをすることにより構成された全体の割り当てを, *h-assignment* と定義する.

Definition 2.14. [h-assignment] For a d-dimensional simplicial complex, the assignment of $\#\ h_i(C) = n_i$ in h-vector is called a *h-assignment.*

Example 2.15. The h-vector, $h(C) = (h_0(C) = n_0 = 1,\ h_1(C) = n_1 = 3,\ h_2(C) = n_2 = 6,\ h_3(C) = n_3 = 1)$, $\sum_{i=0}^{3} n_i = \#facets = 11$, is given, and the h-assignments for this h-vector are the following:

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}
$h_0(C)$	$h_1(C)$	$h_1(C)$	$h_1(C)$	$h_2(C)$	$h_2(C)$	$h_2(C)$	$h_2(C)$	$h_2(C)$	$h_2(C)$	$h_3(C)$
$h_1(C)$	$h_2(C)$	$h_1(C)$	$h_3(C)$	$h_0(C)$	$h_2(C)$	$h_2(C)$	$h_2(C)$	$h_2(C)$	$h_2(C)$	$h_1(C)$
$h_1(C)$	$h_2(C)$	$h_1(C)$	$h_0(C)$	$h_2(C)$	$h_2(C)$	$h_2(C)$	$h_3(C)$	$h_2(C)$	$h_2(C)$	$h_1(C)$
$h_1(C)$	$h_1(C)$	$h_2(C)$	$h_3(C)$	$h_2(C)$	$h_0(C)$	$h_2(C)$	$h_2(C)$	$h_2(C)$	$h_1(C)$	$h_2(C)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

ここで, Proposition 2.8. を再考する. Proposition 2.8. では, h-vector の最大項 $h_{d+1}(C)$ がゼロとなる特殊な単体的複体の shelling において最後に配置される facet は boundaryFacet となることを述べており, この事実を使って shelling を逆順から恣意的に構成することが可能となる. 確認するが, 存在する boundaryFacet の中で shelling の最後に配置されるものが少なくとも 1 つ存在するのであって, 全ての boundaryFacet が shelling の最後に配置されるのではない.
しかし, 予め boundaryFacet に対して h-vector の各項 $h_i(C)$ がラベルとして与えられていれば, つまり, h-assignment 付きの単体的複体であれば, boundaryFacet に存在する boundaryRidges の数を調べることで, shelling の最後に配置しうる boundaryFacet か否かを Proposition 2.13. により決定することができる.

従って, h-vector の最大項 $h_{d+1}(C)$ がゼロとなる特殊な単体的複体において, この "h-assignment 付きの単体的複体" を入力とした場合は, Proposition 2.8. と Proposition 2.13. により $O(\#facets)$ 時間で shellability が判定可能となる.

Proposition 2.16. If the maximum term $h_{d+1}(C)$ of the h-vector $(h(C) = (h_0(C),\ h_1(C),\ h_2(C), ..., h_{d+1}(C)))$ for a pure d-dimensional simplicial complex C is zero, we give one h-assignment to C. Then, we can decide the last facet of a shelling by checking the following conditions:

- The last facet in each shelling of C is a boundaryFacet.
- The number of boundaryRidges in this boundaryFacet is equal to $d - i + 1$ w.r.t. the label $h_i(C)$.

Therefore, we can decide shellability of C in $O(\#facets)$.

しかし, Lemma 2.12. より shellable な単体的複体の h-vector の値は非負であるので, h-vector の最大項は一般的にはゼロでなく正の値を取る. つまり, Proposition 2.16. で示した h-vector の最大項 $h_{d+1}(C)$ がゼロとなる特殊な単体的複体における shellability 判定を使うためには, 単体的複体の shellability を保存した上で h-vector の最大項の値を正からゼロにする必要がある.

ここで, この h-vector の最大項に貢献する facet の性質について考える. d 次元単体的複体の h-vector の最大項 h_{d+1} は Proposition 2.13. より,

$$h_{d+1}(C) = \#\{F_j\ ;\ \#boundaryRidges \text{ in facet } F_j = d - (d+1) + 1 = 0\ (1 \le j \le t)\}$$

として特徴づけられる. 従って, h-vector の最大項に貢献する facet が shelling の構成要素として配置するとき boundaryRidge がゼロである, つまり facet に関する face 集合において facet を除く全ての face 集合が既出した状況で, この facet が配置されたことがわかる. 特に, 2 次元の場合を考えると, この h-vector の最大項に貢献する facet は単体的複体に対して蓋のように配置されることから, *cover facet* と命名する.

Definition 2.17. In a d-dimensional simplicial complex, the facet contributing to the maximum term $h_{d+1}(C)$ of h-vector is called a *cover facet*.

(最上段要素を除いた) 単体的複体の face poset について, Lemma 2.10. に従って任意の shelling から partition を生成すると, この cover facet を含む partition は facet のみを要素として含む特殊な partition となる. この特殊な partition を単体的複体の face lattice から削除した場合, 最上段要素である facet に位置する要素が face poset から減少するだけで, 他の partition 集合には何も影響がない. つまり, partition 集合の元である shelling においても, shelling から cover facet が削除されただけで, 他の shelling の構成にも何の影響もないと言える.

Proposition 2.18. Shellability of a simplicial complex is not destroyed, if all cover facets are deleted.

Example 2.19. All facets are given as $\{12,\ 13,\ 34,\ 35,\ 36,\ 45,\ 56\}$. We select one shelling, $\{12,\ 13,\ 34,\ 35,\ 45,\ 36,\ 56\}$, and generate a set of partitions from this shelling.

shelling	12	13	34	35	45	36	56
partitions	$\{12,\ 1,\ 2,\ \emptyset\}$	$\{13,\ 3\}$	$\{34,\ 4\}$	$\{35,\ 5\}$	$\{45\}$	$\{36,\ 6\}$	$\{56\}$

If we delete all cover facets in this partition, $\{45,\ 56\}$, the following partition is generated:

shelling	12	13	34	35	$--$	36	$--$
partitions	$\{12,\ 1,\ 2,\ \emptyset\}$	$\{13,\ 3\}$	$\{34,\ 4\}$	$\{35,\ 5\}$	$--$	$\{36,\ 6\}$	$--$

We can find that the rest of partitions are not destroyed, and shellability is also preserved after deleting all cover facets. But, if we delete *not* cover facets, the rest of partitions are reconstructed, or shellability is always not preserved as follows:

shelling	12	13	34	$--$	45	36	56
partitions	$\{12,\ 1,\ 2,\ \emptyset\}$	$\{13,\ 3\}$	$\{34,\ 4\}$	$--$	$\{45,\ \mathbf{5}\}$	$\{36,\ 6\}$	$\{56\}$

shelling	12	$--$	34	35	45	36	56
partitions	$\{12,\ 1,\ 2,\ \emptyset\}$	$--$	$\{34,\ 4\}$	$\{35,\ \mathbf{3}\}$	$\{45,\ \mathbf{5}\}$	$\{36,\ 6\}$	$\{56\}$

In both of cases, the rest of partitions are reconstructed into a new set of partitions. Particularly in the second case, shellability is also destroyed.

従って, Proposition 2.16. と Proposition 2.18. により, "h-assignment 付きの単体的複体" を入力とした場合は $O(\#facets)$ 時間で shellability が判定可能となることが示された.

Proposition 2.20. Given a pure d-dimensional simplicial complex C, we give one h-assignment to C. First, we delete all facets labeled h_{d+1} from C. Then, we can decide the last facet of a shelling by checking the following conditions:

- The last facet in each shelling of C is a boundaryFacet.
- The number of boundaryRidges in this boundaryFacet is equal to $d-i+1$ w.r.t. the label $h_i(C)$.

Therefore, we can decide shellability of C in $O(\#facets)$.

3.2 division

前章で, "h-assignment 付きの単体的複体" の shellability は $O(\#facets)$ 時間で判定可能であることを示した. 従って, 単体的複体を入力とした shellability 判定においては, 適切な h-assignment を如何に効率よく生成するかが重要となる. この場合も, h-vector の最大項に対応するラベル $h_{d+1}(C)$ の生成とそれ以外のラベル $h_i(C)$ $(0 \leq i \leq d)$ の生成とを分けて考える.

まず最初に, h-vector の最大項 $h_{d+1}(C)$ を決定するため, 最大項 $h_{d+1}(C)$ に貢献する n_{d+1} つの cover facet を効率よく特定したい. しかし, 単体的複体そのものから shelling における cover facet の特定はできないので, 単純に考えると全ての組合せ ${}_{\#facets}C_{n_{d+1}}$ を考える必要がある. そこで, 新しい概念としてある性質を満たす *division* という facet 集合を定義する.

Definition 2.21. [division] A set of facets generated by the following algorithm is called a *division*:

- Generate a dual graph satisfying the following conditions:
  - Define a facet(d-face) as one *vertex* in a dual graph, and
  - for two facets, which connect the ridge connected with ≤ 2 facets, link two *vertices* with one *edge*.
- Define a set of facets corresponding one connected component in a dual graph, as one *division*.

Definition 2.21. のアルゴリズムでは, 最大でも $O((\#facets)^2)$ 時間で division 集合を生成できる. 単体的複体を division 集合に分割した理由は, Definition 2.21. により生成した divison が以下の性質を満たすためである.

Lemma 2.22. In a d-dimensional simplicial complex, divisions satisfy the following conditions:

- The number of divisions is $\geq n_{d+1}$ $(h_{d+1}(C) = n_{d+1})$.
- One division includes one cover facet.

従って, 単純に考えると全ての組合せ ${}_{\#facets}C_{n_{d+1}}$ を考えなくてはならないが, Lemma 2.22. の性質を用いることで

- (cover facet が存在すると仮定した) n_{d+1} 個の division 集合を選択.
- 各 division から cover facet を 1 つ選択.

とできるので, 調べるべき組合せの数をかなり制限できる. しかし, 最悪の場合は division の数が $\#facets$ となってしまうので, 全ての組合せを調べる必要がある.

次に, $h_i(C)$ $(0 \leq i \leq d)$ に対応するラベルの生成であるが, これについてはまだ conjecture の域を脱していないので, ここでは明示しない.

従って, 現段階のアルゴリズムでも, 調べるべき h-assignment の数は最悪でも

$$\frac{(\#facets)!}{n_{d+1}! \times n_d! \times \cdots n_2! \times n_1! \times n_0!}$$

となり, h-assignment 付きの単体的複体の shellability 判定は $O(\#facets)$ で判定可能であるので, 全体の計算時間は h-assignment の生成数となる. 通常の shellability 判定では $O((\#facets)!)$ 時間を要することから, このアルゴリズムでは 上式の分母にあたる $n_{d+1}! \times n_d! \times \cdots n_2! \times n_1! \times n_0!$ だけ計算時間を減少させることができる.

例えば, $h = (1, 3, 6, 1)$, $\#facets = 11$ である単体的複体の場合, 通常の shellability 判定では $11! = 39916800$ の計算時間となるが, h-assignment を考えることで $11!/(6! \times 3! \times !!) = 9240$ とすることができるため, 判定に要する時間が格段に減少することがわかる.

Proposition 2.23. If the h-vector of a pure d-dimensional simplicial complex C is $h(C) = (h_{d+1}(C),\ h_d(C), ...,\ h_2,\ h_1,\ h_0)$, it takes the following time to decide shellability of C:

$$O(\frac{(\#facets)!}{n_{d+1}! \times n_d! \times \cdots n_2! \times n_1! \times n_0!}).$$

References

[1] Günter M. Ziegler. Graduate Texts in Mathematics 152 *Lectures on Polytopes*. Springer-Verlag(1994)