

平坦なグラフに対するコンパクトルーティング

沖田 正樹 岩間 一雄
京都大学情報学研究科

概要

近年, 現実的なネットワークモデルを用いて伸張係数 3 で各頂点のルーティングテーブルサイズを $O(n^{2/3} \log^{4/3} n)$ に抑えるコンパクトルーティングアルゴリズムが提案されている [2]. この伸張係数 3 は一般的な下限 [3] と一致し, 同じモデルを用いて伸張係数 3 未満に制限するとテーブルサイズの上下限が $(1 - o(1))n \log n$ まで増加してしまう具合の悪いネットワークが存在する [4]. それに対して, 本稿では平均的なグラフが持つ望ましい条件として平坦性という概念を導入し, グラフが $(\alpha, s, \gamma, \delta)$ -疑似平坦である時, 伸張係数 s ($s < 3$) でテーブルサイズ $O((n^{1-\alpha} \log n + \gamma n^\alpha) \log n)$ のコンパクトルーティングアルゴリズムを示す. 特に γ を定数に定めることができる時, テーブルサイズは $O(\sqrt{n \log n})$ まで削減することができる.

Compact Routing for Average-Case Networks

Masaki Okita Kazuo Iwama

Graduate School of Informatics, Kyoto University

Abstract

In [2], Cowen presented a universal compact routing algorithm with a stretch factor of three and a table-size of $O(n^{2/3} \log^{4/3} n)$, based on a simple and practical model. This stretch factor of three matches a general lower bound given in [3] and also matches a much tighter lower bound if we restrict the model [4]. This paper improves these worst-case bounds by using average-case models. The notion of *flatness* is introduced for average-case networks. If a given network is $(\alpha, s, \gamma, \delta)$ -almost-flat, then our new algorithm achieves a stretch factor of s and a table-size of $O((n^{1-\alpha} \log n + \gamma n^\alpha) \log n)$.

1 はじめに

近年, インターネットを初めとするパケットネットワークが急速に普及しており, それに伴ってルーティングアルゴリズムの研究もまた盛んに行われている. 一般的に, パケットルーティングでは任意の頂点間で最短経路を保証するように各頂点のルーティングテーブルが構成される. ところが, 必ずしも全ての頂点間で最短経路を保証しなければテーブルサイズの削減が可能であり, このような手法をコンパクトルーティングと呼ぶ. コンパクトルーティングは近似アルゴリズムの一種であり, 近似度に対応する伸張係数という概念が存在し, 任意の頂点間でアルゴリズムが定めるルーティング経路長が最短経路長の定数倍以下を保証する時その定数を伸張係数と呼ぶ. 一般的には, 伸張係数とルーティングテーブルサイズはトレードオフの関係にある.

ネットワークの頂点数を n とすると, 任意の頂点間で最短経路を保証するルーティングアルゴリズムでは, 各頂点のルーティングテーブルに $O(n \log n)$ の大きさを必要とする. 一方で Cowen[2] によって, 現実的かつ簡単なネットワークモデルを用いて伸張係数 3 でテーブルサイズ $O(n^{2/3} \log^{4/3} n)$ のコンパクトルーティングアルゴリズムが提案されている. また, 同じモデルを用いて伸張係数 3 未満を保証しようとすると, テーブルサイズの上下限が $(1 - o(1))n \log n$ になってしまうことも示されている [4].

ところで [4] で示されたネットワークは最悪の場合であり, 平均的なネットワークを対象とする事によって, 異なる結果を導き出せる. 本稿では, 平均的なネットワークが持つ望ましい性質として平坦性という概念を定義する. 直感的には, 平坦なグラフとはネットワークの各頂点が平均的に分散しているグラフのことである. 従って, 例えば, ある頂点から半径 r 以内の頂点数と半径 $2r$ 以内の頂点数を比べたとき, その数が定数倍程度になっているなら平坦であると考えられる. しかし, ネットワークはしばしば階層的になっている

場合がある。そこでは、より「上位」の頂点が存在し、数多くの高速リンクで他の頂点とつながっている。このような頂点の存在は平坦性を崩すことになる。本稿では、このような頂点でもある条件下で許すこととし、その様なネットワークを疑似平坦性を持つと呼ぶことにする。

そして、グラフが平坦性を満たす時、[2] のアルゴリズムに対して伸張係数とテーブルサイズの両方を削減するアルゴリズムを示す。つまり、グラフが $(\alpha, s, \gamma, \delta)$ -疑似平坦であるとき、我々の新しいアルゴリズムは、伸張係数 s でテーブルサイズ $O((n^{1-\alpha} \log n + \gamma n^\alpha) \log n)$ を実現する。 γ を定数と仮定することはそれ程不自然ではなく、その場合伸張係数をいくらでも 1 に近づけることが可能で、しかもテーブルサイズを $O(\sqrt{n \log n})$ に抑えることが可能になる。

以下、2章では Cowen のコンパクトルーティングアルゴリズム [2] を概説し、3章では平坦性の概念と提案アルゴリズムを示す。そして、4章で提案アルゴリズムの正しさの証明をする。

2 コンパクトルーティング

ルーティングアルゴリズムとは、グラフ上の任意の頂点から任意の頂点へ情報（パケット）を正しく送るための経路を決定するアルゴリズムである。ここで、グラフとは頂点数 $|V| = n$ 、辺数 $|E| = m$ で、正の重み付き無向グラフ $G(V, E)$ を考える。また、各頂点はサイズ $O(\log n)$ -bit の一意な名前を持ち、頂点 v に対して $ID(v)$ あるいは単に v で表す。また、 v の次数、つまり v に接続している辺数を $dev(v)$ で表す。 u と v が隣接頂点である場合、 u から v へ接続している辺を u 側から見たとき、 u の v へのポートと呼び、その番号を $\{1, \dots, dev(u)\}$ の中から一意に対応付ける。頂点 u から v への最短経路は $d(u, v)$ で表し、またその距離も誤解の恐れがない限り $d(u, v)$ で表す。それに対して、 u から v へルーティングアルゴリズムで与えられる経路は $p(u, v)$ で表す。このとき、伸張係数は $\max_{u, v \in V} \frac{p(u, v)}{d(u, v)}$ で定義される。また、パケットの宛先アドレスは途中で変更できず、パケットには送信元の頂点アドレスは含まないとする。これはつまり、 u から v へ送られるパケットの場合に、 $p(u, v)$ 上の中間頂点 x から次に送るべき頂点が、単にパケットの宛先と x のルーティングテーブルのみで決定されるということの意味している。また、あるパラメータ k ($1 \leq k \leq n$) に対して、頂点 v に最も近い k 個の頂点集合を頂点 v の k 近傍集合と定義して、 $B_v(k)$ で表す。ここで頂点 x が y よりも v に近いとは、 $d(v, x) < d(v, y)$ であるか、あるいは $d(v, x) = d(v, y)$ かつ $ID(x) < ID(y)$ を満たす時である。反対に、頂点 v を k 近傍集合に含む頂点の集合を $B_v^{-1}(k)$ で表す。つまり、 $B_v^{-1}(k) = \{u \in V | v \in B_u(k)\}$ である。また、頂点 v と $B_v(k)$ に含まれる頂点 u との最短経路 $d(u, v)$ の中で最も長いものを $B_v(k)$ の半径 $r_v(k)$ と呼ぶ。つまり、 $r_v(k) = \max_{u \in B_v(k)} d(u, v)$ で定義する。

一般にルーティングアルゴリズムは各頂点 u に対して、受け取ったパケットの宛先頂点 v と、それを渡す u 上のポート番号 $e_u(v)$ とを対応付けるルーティングテーブルの項目 $(v, e_u(v))$ を、全ての宛先について計算する。ルーティングテーブルでは一つの項目につき $O(\log n)$ -bit を必要とするので、全頂点へのルーティング情報を持つことによって最短経路を保証する自明なアルゴリズムでは各頂点に対して $O(n \log n)$ -bit のテーブルサイズが必要になる。

次に、Cowen のコンパクトルーティングアルゴリズム [2] の概要を述べる。アルゴリズムは大きく分けて、各頂点に対してパケットのルーティング時に宛先として利用するラベルを計算するラベル付け、各頂点のルーティングテーブルを計算するテーブル作成、そして実際に各頂点でパケットを宛先によってどの経路に送るかを決定する経路決定アルゴリズムの三つに分かれる。Cowen のアルゴリズムの基本的な手法は、各頂点はその近傍の頂点への経路だけを自身のルーティングテーブルに保持しておき、遠方の頂点へはランドマークという特別な頂点への経路だけを保持することによって、テーブルサイズを削減することである。Cowen のアルゴリズムでは伸張係数 3 が保証され、テーブルサイズは $O(n^{2/3} \log^{4/3} n)$ で十分である。

2.1 ラベル付けアルゴリズム

ラベル付けアルゴリズムでは、まず各頂点 $v \in V$ に対して n^α 近傍集合を計算する。ここで、パラメータ α は、 $0 < \alpha < 1$ を満たす定数であるが、最後に最適化する。次に、各頂点 v の $B_v(n^\alpha)$ の集合をカバーする頂点集合 C を計算する。近傍集合のカバーについて、以下の定理を使う [5, 1].

定理 1 $G = (V, E)$ は重み付き無向グラフとする. そのとき, 頂点 v の n^α 近傍集合 $B_v(n^\alpha)$ に対して $|C| = O(n^{1-\alpha} \log n)$, かつ $\forall v \in V$ に対して $C \cap B_v(n^\alpha) \neq \emptyset$ を満たす集合 $C \subset V$ が存在する. この時, C は貪欲アルゴリズムによって時間 $\tilde{O}(m + n^{1+\alpha})$ 内で見つけられる.

さらに, $D = \left\{ v \in V \mid |B_v^{-1}(n^\alpha)| > n^{\frac{1+\alpha}{2}} \right\}$ と定義して, $L = C \cup D$ をグラフ G のランドマーク集合とする. そして各頂点 $v \in V$ に対して, v に最も近い頂点 $l \in L$ を v のランドマーク l_v と定義する. そしてラベル付けアルゴリズムでは, 各頂点 $v \in V$ に対して, そのラベルを $(v, l_v, e_{l_v}(v))$ と定める. ここで, $e_{l_v}(v)$ は l_v から v へパケットを最短経路で送るために必要な l_v 上のポート番号を示している.

2.2 テーブル作成アルゴリズム

テーブル作成アルゴリズムでは, 各頂点 $v \in V$ に対して以下のようにしてルーティングテーブルを作成する. まず, 全てのランドマーク $l \in L$ に対して, $(l, e_v(l))$ をテーブルに追加する. 次に, $v \notin L$ ならば任意のランドマーク $l \in L$ より近い全ての $u \in V$ に対して, $(u, e_v(u))$ をテーブルに追加する.

2.3 経路決定アルゴリズム

頂点 u に宛先が (v, w, p) であるパケット P が届いたとき, その経路は以下のような規則で決定する. もし, $u = v$ ならばパケットをホストプロセッサに渡すための特別なポートに送る. そうではないが, u のルーティングテーブルに $(v, e_u(v))$ が存在すればポート $e_u(v)$ に送る. そうではないが, u のルーティングテーブルに $(w, e_u(w))$ が存在すればポート $e_u(w)$ に送る. そうでなければ, ポート p に送る.

3 平坦なグラフと新アルゴリズム

2章で述べた Cowen のアルゴリズムと同様のネットワークモデルを用いて, より伸張係数を抑えるアルゴリズムを提案する. まず, 伸張係数を抑えるための基本的な考え方およびその問題点について述べる. そして, そのような問題点を回避するためにグラフに対して平坦性の概念を導入し, グラフ G が $(\alpha, s, \gamma_G, \delta)$ -疑似平坦であるとき, 伸張係数 s で各頂点のルーティングテーブルサイズ $O((n^{1-\alpha} \log n + \gamma n^\alpha) \log n)$ のコンパクトルーティングアルゴリズムを示す.

3.1 伸張係数の抑制

今, 図1のように頂点 u と u' からそれぞれ v へパケットを送る場合を想定し, 伸張係数2を実現することを考える. $B_v(n^\alpha)$ の半径を r_v として, $r_v \leq d(u', v) < 2r_v \leq d(u, v)$ とする. このとき, Cowen のアルゴリズムでは, 宛先 v のパケットは u, u' から v のランドマーク l_v を経て v に送られることになる. ところでランドマーク集合 L は各頂点の n^α 近傍集合をカバーするので, $d(l_v, v) \leq r_v$ が成り立つ. よって, アルゴリズムが与える u から v への経路 $p(u, v)$ は三角不等式より $p(u, v) \leq d(u, v) + 2d(l_v, v) \leq d(u, v) + 2r_v$ を満たす. 従って $d(u, v) > 2r_v$ より, u から v へパケットを送る時は伸張係数2が保証できる. しかし同様に u' について考えると $p(u', v) \leq d(u', v) + 2r_v$ となり, u' と v の最短経路 $d(u', v)$ が r_v に等しい時には伸張係数が3まで増加してしまう. このことから, v から半径 $2r_v$ 以内に含まれる頂点 u についてもルーティングテーブルに v への項目を保持すれば, Cowen と同じ手法で伸張係数2を保証できることが分かる.

一方で図2に, Cowen と同じモデルを用いて伸張係数3未満を実現する時, テーブルサイズが $(1 - o(1))n \log n$ まで増加してしまうグラフ例を示す [4]. 例えば, 頂点 u_1 のテーブルサイズを考える. u_1 とグラフ右側の頂点 v_1, \dots, v_s との間には全てコスト1の辺があるため, u_1 から他の頂点を経てグラフ右側の頂点へパケットを送ると伸張係数3未満を実現できない. ラベルを用いれば一つの宛先につき, ある頂点の項目を一つ削除できるが, それでも伸張係数3未満を保証するためには u_1 のルーティングテーブルには最低でも $n - 2\sqrt{n} + 1$ 個の項目が必要になる. 従って図2のようなネットワークでは任意のコンパクトルーティングアルゴリズムを用いても, Cowen のネットワークモデルを用いる限り伸張係数3未満を実現するにはテーブルサイズ $(1 - o(1)) \log n$ を必要とする頂点が存在する.

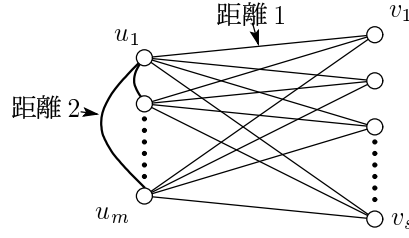
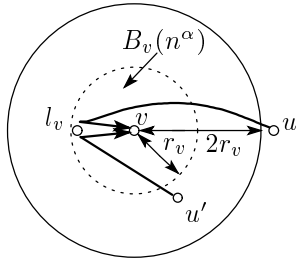


図 1: 頂点位置による伸張係数の変化 図 2: 伸張係数 3 未満でテーブルサイズが増加する場合

3.2 平坦性の定義

伸張係数を抑えるためには図 2 のようなグラフが問題になる。しかし、そのようなネットワーク構造は現実にはそれほど存在しない。そこで、本稿ではグラフに対して“平坦”という概念を導入する。まず、二つの定数 $0 < \alpha < 1$ と $1 < s < 3$ を定める。このとき、グラフ G の頂点 v に対してそのパラメータ $\gamma_v \geq 1$ を、頂点集合 $U = \{u \mid u \in V, d(u, v) \leq \frac{4}{s-1}r_v\}$ に含まれる頂点数が $\gamma_v \cdot n^\alpha$ となるように定義する。そして全頂点 $v \in V$ に対して、 $\gamma_v \leq \gamma$ を満たすパラメータ γ が存在すれば、 G は (α, s, γ) -平坦であると定義する。以後 γ は定数であると仮定するが、それによって一般性はほとんど失われない。

ところで、現実世界ではインターネットにおける IX (Internet eXchange) のように多数の頂点が接続している“上位頂点”が存在するネットワークが多々ある。しかしこのような頂点 v が一つでも存在すると、グラフが平坦性を満たさなくなる能性が高い。それは、その n^α 近傍集合の半径 r_v に対して半径 $\frac{4}{s-1}r_v$ に含まれる全頂点の近傍集合が n^α の定数倍以上の多くの頂点を含む場合が多いからである。そこである条件下であれば、このようなグラフを平坦であると見なせる概念として“疑似平坦性”を定義する。そのために、 γ_u と同様にパラメータ β_u と δ_u を定義する。つまり、 $d(u, v) \leq \frac{2}{s-1}r_v$ を満たすような頂点 $u \in V$ の数が $\beta_v \cdot n^\alpha$ となるように β_v を、また $d(u, v) \leq \frac{3s-1}{3-s} \frac{2}{s-1}r_v$ を満たすような頂点 $u \in V$ の数が $\delta_v \cdot n^\alpha$ となるように δ_v をそれぞれ定義する。そして、次のような頂点集合 $A \subset V$ を考える。

- (i) $\forall v \in V$ に対して、 v の $\delta_v n^\alpha$ 近傍集合との共有頂点数は最大で 1 である ($|B_v(\delta_v n^\alpha) \cap A| \leq 1$)。
- (ii) グラフ G から頂点集合 A を除いた G' は (α, s, γ) -平坦である。

このとき、グラフ G は $(\alpha, s, \gamma, \delta)$ -疑似平坦であると定義する。上記のようなネットワークでは上位頂点を集合 A に含めることができれば G から A を除いた G' は γ を定数に抑えることができるため、疑似平坦性を満たす。

以下では、グラフが $(\alpha, s, \gamma, \delta)$ -疑似平坦であるときに [2] に対して伸張係数とテーブルサイズの両方を削減するコンパクトルーティングアルゴリズムを提案する。

3.3 ラベル付けアルゴリズム

まず元のグラフ G に対して、各頂点 $v \in V$ の $B_v(n^\alpha)$ を計算する。そして [2] と同様にして、全ての $B_v(n^\alpha)$ をカバーする頂点集合 C を計算する。ここでランドマーク集合 L を $L = C$ とおき、各頂点 v に最も近い、ランドマーク集合に含まれる頂点をその頂点のランドマーク l_v をする。次に、各頂点 $v \in V$ の $B_v(\beta_v n^\alpha)$ を計算する。さらに $v \notin A$ に対しては、 G' 上での $\beta_v n^\alpha$ 近傍集合 $B'_v(\beta_v n^\alpha)$ も計算する。そして $\tilde{B}_v(\beta_v n^\alpha)$ を、 $v \in A$ ならば $B_v(\beta_v n^\alpha)$ 自身、 $v \notin A$ ならば $B'_v(\beta_v n^\alpha) \cup (A \cap B_v(\beta_v n^\alpha))$ と定義する。ここで $A \cap B_v(\beta_v n^\alpha)$ は、定義から高々一つしか頂点を含まないことに注意する。そして、新しいラベリングアルゴリズムでは各頂点 v に対して以下のようにしてラベルを決定する。

1. もし $\tilde{B}_v(\beta_v n^\alpha)$ が頂点 $a \in A$ を含むなら、頂点 v のラベルは $(v, l_v, e_a(v))$ とする。
2. そうではないが、 $l_{v'} = l_v$ をランドマークとする頂点 v' に対して $\tilde{B}_{v'}(\beta_{v'} n^\alpha)$ が頂点 $a \in A$ を含むなら、頂点 v のラベルは $(v, l_v, e_a(l_v))$ とする。

3. そうでなければ、頂点 v のラベルは、 $(v, l_v, *)$ とする。ここで、 $*$ は何にも利用しないことを表す。

3.4 テーブル作成アルゴリズム

各頂点 $u \in V$ のルーティングテーブルが保持する項目は以下のようにして決定する。

1. もし $u \notin A$ ならば、全ての $l \in L$ に対して $(l, e_u(l))$ を保持する。また、 $u \in \tilde{B}_v(\beta_v n^\alpha)$ となるような全ての頂点 v に対して $(v, e_u(v))$ を保持する。
2. もし $u \in A$ ならば、 $l = l_v$ とする v について $u \in \tilde{B}_v(\beta_v n^\alpha)$ が存在しないような $l \in L$ のみに対して $(l, e_u(l))$ を保持する。(逆にいえば、全ての $l \in L$ について項目を保持しておき、そのような v が存在すれば $(l, e_u(l))$ の項目を削除する。)

なお、以下では簡単化のために、誤解がない限り $\tilde{B}_v(\beta_v n^\alpha)$ を $B_v(\beta_v n^\alpha)$ で表す。

3.5 経路決定アルゴリズム

経路決定アルゴリズムは Cowen のアルゴリズムとまったく同様のアルゴリズムを用いることができる。

4 アルゴリズムの解析

4.1 ルーティングアルゴリズムとしての正当性

3章で示した新しいアルゴリズムがルーティングアルゴリズムとして正しく動作すること、つまり任意の頂点間で正しくパケットを送ることができることを示す。

補題 1 提案アルゴリズムは、各頂点 v に対して一意なラベルを与える。

証明 まず、頂点 $a_1, a_2 \in A$ がともに v の $\beta_v n^\alpha$ 近傍集合に含まれるような異なる頂点であるとする。この時、ラベル付けアルゴリズムは頂点 v に対して a_1 におけるラベル $(v, l_v, e_{a_1}(v))$ と、 a_2 におけるラベル $(v, l_v, e_{a_2}(v))$ の二つの異なるラベルを与えることになる。しかし、定義 $|A \cap B_v(\delta_v n^\alpha)| \leq 1$ および $B_v(\beta_v n^\alpha) \subseteq B_v(\delta_v n^\alpha)$ から、そのような頂点は高々一つしか存在しないため、このような状況は起こらない。

次に、頂点 v に対して図 3 のような関係にある二つの異なった頂点 v_1, v_2 が存在する場合を考える。つまり v_1 と v_2 は、(1) 三点のランドマークが等しく、(2) v_1 の $\beta_{v_1} n^\alpha$ 近傍集合に頂点 $a_1 \in A$ を含み、(3) v_2 の $\beta_{v_2} n^\alpha$ 近傍集合に頂点 $a_2 \in A$ を含み、(4) a_1 と a_2 は異なる頂点である、ような二つの頂点である。このとき、ラベル付けアルゴリズムは頂点 v に対して a_1 におけるラベル $(v, l_v, e_{a_1}(l_v))$ と、 a_2 におけるラベル $(v, l_v, e_{a_2}(l_v))$ の二つの異なるラベルを与えることになる。今、 a_1 から v_2 への最短経路 $d(a_1, v_2)$ を考える。以後、 r_1 と r_2 をそれぞれ $B_{v_1}(\beta_{v_1} n^\alpha)$ と $B_{v_2}(\beta_{v_2} n^\alpha)$ の半径とすると、 $d(a_1, v_1) \leq \frac{2}{s-1} r_1$ が成り立つ。また v_1 のランドマーク $l_{v_1} = l_v$ は v_1 の n^α 近傍集合に含まれるので、 $d(v_1, l_v) \leq r_1$ が成り立つ。同様に、 $d(l_v, v_2) \leq r_2$ も成り立つ。以上のことから三角不等式を用いて、 $d(a_1, v_2) \leq \frac{2}{s-1} r_1 + r_1 + r_2$ が成り立つ。一方で a_1 は v_2 の $\beta_{v_2} n^\alpha$ 近傍集合には含まれないので、 $d(a_1, v_2) > \frac{2}{s-1} r_2$ も成り立つ。以上から、 $\frac{2}{s-1} r_2 < d(a_1, v_2) \leq \frac{s+1}{s-1} r_1 + r_2$ が導き出され、従って $r_2 < \frac{s+1}{3-s} r_1$ が成り立つ。また、 v_1 と v_2 を逆にして同じ議論すれば $r_1 < \frac{s+1}{3-s} r_2$ も成り立つ。従って最終的に、 $d(a_1, v_2) < \frac{s+1}{s-1} \cdot \frac{s+1}{3-s} r_2 + r_2 = \frac{3s-1}{3-s} \cdot \frac{2}{s+1} r_2$ が得られる。これは、 a_1 から v_2 までの最短経路が v_2 の $\delta_{v_2} n^\alpha$ 近傍集合の半径よりも小さいということを意味する。従って、 a_1 は v_2 の $\delta_{v_2} n^\alpha$ 近傍集合に含まれる。ところが、これは v_2 の $\delta_{v_2} n^\alpha$ 近傍集合内に A に含まれる頂点を二つ以上持つことになるので、グラフ G が $(\alpha, s, \delta, \gamma)$ -疑似平坦であることに矛盾する。従って、このような場合には常に $a_1 = a_2$ が成り立ち、 v のラベルは一意に与えられる。□

補題 2 パケット $P = (v, l_v, p)$ は $B_v(\beta_v n^\alpha)$ 内では最短経路で送られる。

証明 今、 P を頂点 v の $\beta_v n^\alpha$ 近傍集合内にある頂点 $u \in B_v(\beta_v n^\alpha)$ から送る場合を考える。 $u \notin A$ の場合は、 u はルーティングテーブルに項目 $(v, e_u(v))$ を持っているのので、ポート $e_u(v)$ を経て最短経路 $d(u, v)$ 上の次の頂点 u' に送られる。

また、 $u = a \in A$ ならば P の宛先ラベルは $(v, l_v, e_a(v))$ となる。 a は頂点集合 A に含まれているので、 a のルーティングテーブルには項目 $(v, e_a(v))$ は存在しない。また、 a は v の $\beta_v n^\alpha$ 近傍集合に含まれているの

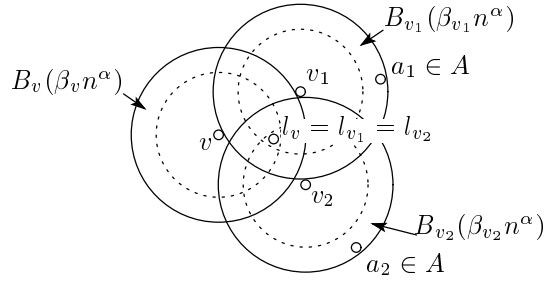


図 3: ラベルが一意に与えられない場合

で a のルーティングテーブルには v のランドマーク l_v の項目 $(l_v, e_a(l_v))$ も存在しない. 従って, a のルーティングテーブルにはパケット P のラベルのうち, 一つ目と二つ目の頂点に対する項目がともに存在しないので, ポート $e_a(v)$ を経て最短経路 $d(u, v)$ 上の次の頂点 u' に送られる. 以上により, v の $\beta_v n^\alpha$ 近傍集合内の任意の頂点 u に到着したパケット $P = (v, l_v, p)$ は最短経路 $d(u, v)$ 上の次の頂点 u' へ送られる. このとき, P は最短経路上を通過しているので u' は u よりも v に接近しているのは明らかであり, $d(u', v) \leq d(u, v)$ が成り立つ. ここで, u は v の $\beta_v n^\alpha$ 近傍集合に含まれるから, 必然的に u' も v の $\beta_v n^\alpha$ 近傍集合に含まれる. ゆえに, u を u' に置き換えて上記の議論を繰り返せば, u' でもまたパケット P は v への最短経路 $d(u', v)$ 上の次の頂点に送られる. 以下同様にして, 最終的にパケット P は頂点 v に到達する. 従って, パケット P は任意の頂点 $u \in B_v(\beta_v n^\alpha)$ から最短経路 $d(u, v)$ で v へ送られる.

なお, 定義より v の $\beta_v n^\alpha$ 近傍集合内には A に含まれるような a 以外の頂点 a' は存在しない. ゆえに, そのような頂点 a' 上でパケット $P = (v, l_v, e_a(v))$ を本来送るべきポート $e_{a'}(v)$ ではなく, 誤ったポート $e_a(v)$ に送ってしまうということは起らない. \square

定理 2 アルゴリズムは, 任意の頂点 u からパケット $P = (v, l_v, p)$ を正しい宛先 v に送ることができる.

証明 まず u が v の $\beta_v n^\alpha$ 近傍集合内にあるとすれば, 補題 2 より P は最短経路 $d(u, v)$ で正しい頂点 v へ送られる. 次に, 頂点 u が v の $\beta_v n^\alpha$ 近傍集合に含まれないとする. このとき, パケット P の送られる経路は以下の様になる.

1. $u \notin A$ ならば, u のルーティングテーブルに v の項目 $(v, e_u(v))$ は存在しない. しかし, v の $\beta_v n^\alpha$ 近傍集合に含まれるか否かによらず, v のランドマーク l_v の項目 $(l_v, e_u(l_v))$ は存在する. 従って, l_v への最短経路 $d(u, l_v)$ 上にあるポート $e_u(l_v)$ に送る.
2. 一方, $u = a \in A$ でなおかつ l_v をランドマークとするような全ての頂点 v' について a が v' の $\beta_{v'} n^\alpha$ 近傍集合に含まれない, つまり a が v から十分遠いとする. この時には, a には v の項目 $(v, e_a(v))$ は存在しないが v のランドマーク l_v の項目 $(l_v, e_a(l_v))$ が存在するので, この場合も l_v への最短経路 $d(a, l_v)$ 上にあるポート $e_a(l_v)$ に送る.
3. 最後に, そのような v' が一つでも存在した場合, つまり a が v からそれほど遠くない場合を考える. このとき a には v の項目 $(v, e_a(v))$ も, l_v の項目 $(l_v, e_a(l_v))$ も存在しない. ところが, このような場合には v のラベルは $(v, l_v, e_a(l_v))$ となっている. 従って, この場合でも l_v への最短経路 $d(a, l_v)$ 上にあるポート $e_a(l_v)$ に送る.

ここで, 補題 1 よりこのようなラベルは一意に与えられる. つまり l_v をランドマークとする全ての頂点 v' に対して v' の $\beta_{v'} n^\alpha$ 近傍集合内の A に含まれる頂点は a 以外はあり得ないことが分かる. 従って, この場合もパケット P は正しく l_v への最短経路上にあるポート $e_a(l_v)$ に送られる.

ゆえに, いずれの場合も P は l_v へ最短経路で送られる. ここで, l_v は v の $\beta_v n^\alpha$ 近傍集合に含まれる. 従って, l_v から v へは補題 2 により正しく最短経路で送られる. \square

4.2 伸張係数

定理 3 アルゴリズムの伸張係数は s である。

証明 頂点 u から頂点 v へパケット $P = (v, l_v, p)$ を送る場合のアルゴリズムの伸張係数を考える。まず、 u が v の $\beta_v n^\alpha$ 近傍集合に含まれるとする。このとき、補題 2 により u から v へは最短経路 $d(u, v)$ でパケット P が送られる。従って、この場合にはアルゴリズムが与える経路 $p(d, v)$ はその最短経路 $d(u, v)$ に等しい。

次に、 u が v の $\beta_v n^\alpha$ 近傍集合に含まれない場合を考える。定理 2 で述べた様にパケットは u から v のランドマーク l_v へ最短経路 $d(u, l_v)$ で送られ、 l_v から v まで最短経路 $d(l_v, v)$ で送られる。以下、 v の n^α 近傍集合の半径を r_v とし、 $d(u, v) = A$, $d(u, l_v) = B$, $d(l_v, v) = C$ とおく。すると v のランドマーク l_v は v の n^α 近傍集合に含まれるので、 $C \leq r_v$ が成り立つ。一方で、仮定から u は v の $\beta_v n^\alpha$ 近傍集合に含まれないので $A > \frac{2}{s-1} r_v$ である。また、三角不等式より $B \leq A + C$ が言える。アルゴリズムが与える経路 $p(u, v)$ は、 u から l_v を経て v に到達するので、 $p(u, v) = d(u, l_v) + d(l_v, v) = B + C$ となる。従って、 u から v へパケット P を送る場合にアルゴリズムが与える経路とその最短経路の比は、 $\frac{p(u, v)}{d(u, v)} = \frac{B+C}{A} \leq \frac{A+2C}{A} = 1 + \frac{2C}{A} \leq 1 + \frac{2r_v}{\frac{2}{s-1} r_v} = s$ で与えられ、 s を上回らない。

しかし、実際には u から l_v へ伝送する経路上でルーティングテーブルに v の項目 $(v, e_x(v))$ を持つ頂点 x が存在する場合がある。このような場合は、 x は v の $\beta_v n^\alpha$ 近傍集合に含まれることになる。従って、補題 2 より x から v へは最短経路で送られる。このとき三角不等式より x から v に最短経路で送られた場合の経路は $d(u, x) + d(x, v) \leq d(u, l_v) + d(l_v, v)$ が成り立つ。従って、 x から v へ最短経路で送られた時の方が、 v のランドマーク l_v を経由した時よりも経路が長くなることはない。ゆえに、この場合でもアルゴリズムが与える経路とその最短経路の比が s を上回ることはない。□

4.3 テーブルサイズ

最後に、本稿のルーティングアルゴリズムが与える各頂点のテーブルサイズの上限を示す。まず、次の補題が必要になる。

補題 3 グラフ $G' = (V', E')$ が (α, s, γ) -平坦であるとき、 $|B_v^{-1}(\beta_v n^\alpha)| \leq \gamma n^\alpha$ for $\forall v \in V'$

証明 頂点 v に対して、 v を $\beta_v n^\alpha$ 近傍集合に含むような頂点のうちで最も離れている頂点を a を考える。さらに、 b を任意の $B_v^{-1}(\beta_v n^\alpha)$ に含まれる頂点とする。このとき、三角不等式から a から b への最短経路 $d(a, b)$ は $d(a, b) \leq d(a, v) + d(v, b)$ で表される。さらに、 a の定義から $d(v, a) \geq d(v, b)$ が成り立つ。従って、 a から b へ至る経路には少なくとも a から v を経て b に至る経路が存在して、それは a から v までの最短経路 $d(a, v)$ を使って $d(a, b) \leq d(a, v) + d(v, b) \leq 2d(a, v)$ で表される。

このとき $v \in B_a(\beta_a n^\alpha)$ であるから、 r_a を a の n^α 近傍集合の半径とすると、 a から v への最短経路 $d(a, v)$ は $d(a, v) \leq \frac{2}{s-1} r_a$ と言えるので、 $d(a, b) \leq \frac{4}{s-1} r_a$ が成り立つ。従って、 $b \in B_a(\gamma_a n^\alpha)$ が成り立つ。さらに b は任意の $B_v^{-1}(\beta_v n^\alpha)$ に含まれる頂点であるから、結局 $B_v^{-1}(\beta_v n^\alpha) \subseteq B_a(\gamma_a n^\alpha)$ が成り立つ。つまり、 $|B_v^{-1}(\beta_v n^\alpha)| \leq |B_a(\delta_a n^\alpha)| = \delta_a n^\alpha \leq \delta n^\alpha$ が成り立つ。□

定理 4 各頂点のルーティングテーブルサイズの上限は $O((n^{1-\alpha} \log n + \gamma n^\alpha) \log n)$ で与えられる。

証明 定理 1 よりランドマーク数は $|L| = O(n^{1-\alpha} \log n)$ で与えられる。そして、 A に含まれる頂点 a のルーティングテーブルの項目数の上限は $|L|$ で与えられる。

また、 A に含まれない頂点 v がルーティングテーブルに持つべきなのは、全てのランドマークへの項目と自分の近傍の頂点、つまり $B_v^{-1}(\beta_v n^\alpha)$ に含まれる頂点への項目である。今、グラフ G は $(\alpha, s, \gamma, \delta)$ -疑似平坦であるとしているので、この場合の $B_v^{-1}(\beta_v n^\alpha)$ は正確には $\{u | v \in \tilde{B}_u(\beta_u n^\alpha)\}$ と定義される。従って、以後、これを $B_v^{-1}(\beta_v n^\alpha) = \{u | v \in B_u(\beta_u n^\alpha)\}$ と混合しないために $\tilde{B}_v^{-1}(\beta_v n^\alpha)$ と表記する。今 u も A に含まれないとすると、 $\tilde{B}_u(\beta_u n^\alpha) = B'_u(\beta_u n^\alpha) \cup (A \cap B_u(\beta_u n^\alpha))$ となる。ここで $v \notin A$ であるから、 v が $\tilde{B}_u(\beta_u n^\alpha)$ に含まれるならば、結局 $B'_u(\beta_u n^\alpha)$ にも含まれることになる。つまり、 $\tilde{B}_v^{-1}(\beta_v n^\alpha)$ に含まれる頂点のうちで A に含まれない頂点の集合を $B_v^{-1'}(\beta_v n^\alpha)$ とする (つまり、 $B_v^{-1'}(\beta_v n^\alpha) = \tilde{B}_v^{-1}(\beta_v n^\alpha) - A$ とする) と、補題 3 より $|B_v^{-1'}(\beta_v n^\alpha)| \leq \gamma n^\alpha$ で与えられる。従って、後は A に含まれる $u \in B_v^{-1}(\beta_v n^\alpha)$ の

個数が分かれば良い. $u \in A$ とすると, $\tilde{B}_u(\beta_u n^\alpha) = B_u(\beta_u n^\alpha)$ となる. 今, グラフ G が (α, s, γ_G) -平坦であると言えるように, (定数に限定しない) パラメータ γ_G を定義する (元々, グラフは $(\alpha, s, \gamma, \delta)$ -疑似平坦である, つまりグラフ $G' = G - A$ に対して (α, s, γ) -平坦であるから, $\gamma \leq \gamma_G$ が成り立つ). このとき, 補題 3 より, $|B_v^{-1}(\beta_v n^\alpha)| \leq \gamma_G n^\alpha$ が成り立つ. ところで, 頂点 w の n^α 近傍集合の半径を r_w とすると, $\delta_w n^\alpha$ 近傍集合の半径は, $\frac{3s-1}{3-s} \frac{2}{s-1} r_w$ で与えられる. 従って, $s = 1$ のとき, その半径は最小となり w の $\beta_w n^\alpha$ 近傍集合の半径に一致する. このとき, A の定義から w の $\delta_w n^\alpha$ 近傍集合内, つまり $\beta_w n^\alpha$ 近傍集合内には, A に含まれる頂点が高々一つしか存在しないことになる. 従って, $B_v^{-1}(\beta_v n^\alpha)$ 内にあり A に含まれる頂点は高々 $|B_v^{-1}(\beta_v n^\alpha)| / |B_w(\beta_w n^\alpha)| \leq \gamma_G n^\alpha / \beta_w n^\alpha = \gamma_G / \beta_w$ 個しか存在しない. ここで, 頂点 w は $B_v^{-1}(\beta_v n^\alpha)$ の中で最も β_w が小さいような頂点であるとする. ところで, $\gamma_G n^\alpha$ 近傍集合はグラフの全ての頂点を含んだとき, つまり $\gamma_G n^\alpha = n$ のときが最大である. 従って, γ_G の上限は, $\gamma_G \leq n^{1-\alpha}$ で与えられる. また, 頂点 w の $\beta_w n^\alpha$ 近傍集合が n^α 近傍集合よりも小さくなることはあり得ないので, β_w の下限は 1 で与えられる. 従って, $B_v^{-1}(\beta_v n^\alpha)$ 内にあり A に含まれる頂点は, 結局, $n^{1-\alpha}$ を越えることはない.

以上より, A に含まれない頂点 v がルーティングテーブルに持つべき項目数の上限は, 最終的に $O(n^{1-\alpha} \log n + n^{1-\alpha} + \gamma n^\alpha) = O(n^{1-\alpha} \log n + \gamma n^\alpha)$ となる. 明らかに, 頂点 $v \notin A$ の方がランドマークへの項目だけを保持すればよい A に含まれる頂点よりも項目数が多くなる. さらに, 各項目には $O(\log n)$ -bit が必要であるから, 結局, 各頂点のルーティングテーブルサイズの上限は, $O((n^{1-\alpha} \log n + \gamma n^\alpha) \log n)$ で与えられる. さらに, γ が定数であるという条件の元でテーブルサイズが最小になるよう α を最適化してやれば $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\log \gamma^{-1} + \log \log n}{2 \log n}$ と定めたときに, 各頂点のテーブルサイズは $O(\sqrt{\gamma n \log n}) = O(\sqrt{n \log n})$ まで削減することができる. \square

参考文献

- [1] B. Awerbuch, A. Bar-Noy, N. Linial, and D. Peleg. Compact Distributed Data Structures for Adaptive Routing. In *Proc. 21st ACM Annual Sympo. on Theory of Computing*, pages 479–489, 1989.
- [2] L. J. Cowen. Compact Routing with Minimum Stretch. In *Proc. 10th SODA*, pages 255–260. ACM-SIAM, January 1999.
- [3] C. Gaville and M. Gengler. Space-Efficiency for Routing Schemes of Stretch Factor Three. In *4th SIROCCO*, pages 162–175. Computer Technology Institute, July 1997.
- [4] K. Iwama and A. Kawachi. Compact Routing with Stretch Factor of Less Than Three. In *Proc. 19th PODC*, page 337. ACM, August 2000. (A longer version is in *Proc. 21th PDCS*, pages 223–228. IASTED, November 2000.).
- [5] L. Lovász. On the ratio of optimal integral and fractional covers. *Discrete Mathematics*, pages 383–390, 1975.