アルゴリズム　85－3
（2002．7．25）

Submodularity of some classes of the combinatorial optimization games

岡本 吉央
スイス連邦工科大学・情報科学科

概要

協力ゲーム理論において劣モジュラ性は非常に重要な性質であると認識されている．本論では，最小彩色ゲームと最小頂点被覆ゲームが劣モジュラ性を有する場合の特徴づけを示す．この特徴づけにより，与えられたグラフに対する最小彩色ゲーム/最小頂点被覆ゲームが劣モジュラであるかどうかを判定することが多項式時間で出来ることが分かる．それに関連して，ゲーム理論におけるシャプレイ値，および，付随するマトロイド構造についても述べる．

Submodularity of some classes of the combinatorial optimization games

Yoshio Okamoto
Institute of Theoretical Computer Science, ETH Zürich

Abstract

Submodularity is considered as an important property in the field of cooperative game theory. In this report, we characterize submodular minimum coloring games and submodular minimum vertex cover games. These characterizations immediately show that it can be decided in polynomial time that the minimum coloring game or the minimum vertex cover game is submodular or not for a given graph. Related to these results, the Shapley values and the associated matroid structures are also investigated.

1　イントロダクション

本論では，最小彩色ゲームおよび最小頂点被覆ゲームの劣モジュラ性を考察する．一般に，組合せ最適化問題から派生する協力ゲームを組合せ最適化ゲームと呼び，すなわち，最小彩色ゲーム/最小頂点被覆ゲームは組合せ最適化ゲームの具体例になっている．最も古典的な組合せ最適化ゲームはShapley–Shubik [21] によって考えられた割当ゲームで，現在まで数多くの組合せ最適化ゲームが提案されている [1, 3]．

費用分担に関わる状況の幾つかは組合せ最適化ゲームとして定式化できる．一つ例を挙げる．携帯電話の会社を考えよう．この会社は基地局を幾つか持っており，それぞれの基地局に対して携帯電話がその基地局からの信号を受信できるエリアが決まっている．このとき，各基地局に周波数帯を割り当てたいのだが，携帯電話が信号を受信できるエリアとしてある場所を共有している基地局どうしには同じ周波数帯を割り当てられない．たくさんの周波数帯を用いることにはコストがかかるので，このコストを最小にしたい．この最小化問題は最小彩色問題として定式化でき，最適値は求められる．この次に問題としたいのは，このコストをそれぞれの基地局にどのよう

に分配するのか，ということになる．このような状況はゲーム理論的な状況であり，それを協力ゲームとして捉えると最小彩色ゲームが現れてくる．

本論では，最小彩色ゲーム/最小頂点被覆ゲームの劣モジュラ性について議論する．以下の節では，グラフ G 上の最小彩色ゲームが劣モジュラであるための必要十分条件，および，グラフ G 上の最小頂点被覆ゲームが劣モジュラであるための必要十分条件を示す．第 2 節で，最小彩色ゲーム/最小頂点被覆ゲームの劣モジュラ性の特徴づけを証明する．第 3 節では，これらのゲームにおけるシャプレイ値の式を与える．第 4 節では，マトロイドおよび組合せ最適化との関連を述べる．

2 最小彩色ゲーム/最小頂点被覆ゲームと劣モジュラ性

グラフに関する基本的な定義は省略する．基本的な定義に不明な点がある場合は，グラフ理論の教科書 (Diestel [6] など) を参照せよ．本論におけるグラフは有限で，かつ単純なものに限ることを注意しておく．グラフ $G=(V,E)$ の頂点集合 V，辺集合 E をそれぞれ $V(G)$，$E(G)$ で表記することもある．グラフ G の染色数を $\chi(G)$ で，最小頂点被覆のサイズを $\tau(G)$ で表記する．グラフ G の頂点部分集合 S によって誘導される部分グラフを $G[S]$ で表記する．

協力ゲーム (cooperative game) とは，有限集合 X に対して，$\gamma : 2^X \to \mathbb{R}$ として定義される関数 γ で $\gamma(\emptyset)=0$ を満たすもののことである．協力ゲームの**プレイヤー** (player) とは X の要素のことである．プレイヤーの集合 $S \subseteq X$ に対して，値 $\gamma(S)$ は S に属するプレイヤーが協力したときに S が負わなければならない最小コストである，と見なす．

協力ゲーム γ が**劣モジュラ** (submodular，あるいは凹) であるとは，任意の $S,T \subseteq X$ に対して，不等式 $\gamma(S)+\gamma(T) \geq \gamma(S\cup T)+\gamma(S\cap T)$ が成立することである．これが意味することは次の通りである．S と $S\cap T$ という 2 つの部分集合に $T\setminus S$ のプレイヤー全体を付け加えたときのコストの増分はそれぞれ $\gamma(S\cup T)-\gamma(S)$ と $\gamma(T)-\gamma(S\cap T)$ となる．このときに，もとのプレイヤーの数が多いもの程 (つまり，$S\cap T$ よりも S の方が) このコスト増分は小さくなっているか同じである (つまり，$\gamma(S\cup T)-\gamma(S) \leq \gamma(T)-\gamma(S\cap T)$)，という条件が劣モジュラ性である．これはもとのプレイヤーの数が大きい程，そこに加わるインセンティブが大きくなることを意味し，自然な条件であることが分かる．また，協力ゲーム理論において劣モジュラ性は重要な性質を持っていることが知られている．例えば，劣モジュラゲームのコアは非空で，唯一の von Neumann-Morgenstern 解となり，Shapley 値はコアの重心となる [20]．また，劣モジュラゲームにおいてコアと交渉集合は一致し，カーネルは仁に一致する [15]．更に，劣モジュラゲームの τ 値は多項式時間で求めることができる [22]．しかし，本論の結果は最小彩色ゲームや最小頂点被覆ゲームにおいて劣モジュラ性が現れることは極めて稀であることを示している．

組合せ最適化ゲームを中心とした協力ゲーム理論に関しては Bilbao [1] および，Curiel [3] を参照せよ．また，劣モジュラ性は組合せ最適化，ネットワークフローの理論で重要な役割を果たすが，それに関しては Fujishige [9] を参照せよ．

本論では，グラフ $G=(V,E)$ から派生する協力ゲームを 2 つ扱う．グラフ G 上の**最小彩色ゲーム** (minimum coloring game) を関数 $\chi_G : 2^V \to \mathbb{N}$ で，任意の $S \subseteq V$ に対して $\chi_G(S)=\chi(G[S])$ と定義する．ここで，$G[S]$ は S が誘導する G の部分グラフである．グラフ G 上の**最小頂点被覆ゲーム** (minimum vertex cover game) を関数 $\tau_G : 2^E \to \mathbb{N}$ で，任意の $S \subseteq E$ に対して $\tau_G(S)=\tau((V,S))$ と定義する．ここで，(V,S) は $G=(V,E)$ の部分グラフであるが，誘導部分グラフであるとは限らないことに注意する．

以下が本論の主定理である．

定理 2.1. グラフ G に対して以下は同値である．

(A) 最小彩色ゲーム χ_G は劣モジュラ．

(B) G は $K^1\cup K^2$ に同型な誘導部分グラフを含まない．ここで，グラフ $K^1\cup K^2$ とは 3 頂点 a,b,c と 1 辺 ab から成るグラフである．

(C) G は完全 r-部グラフである．

定理 2.2. グラフ G に対して以下は同値である．

(A) 最小頂点被覆ゲーム τ_G は劣モジュラ．

(B) G は K^3 または P^3 に同型な部分グラフを含まない．ここで，K^3 は頂点数 3 の完全グラフ，P^3 は長さ 3 (すなわち，頂点数 4) の道 (パス) である．

(C) G の各連結成分は星 (スター) である．ここで，星とは二部グラフで一つの部集合の頂点数が 1 であるようなグラフである．1 頂点から成るグラフも星と見なすことにする．

これらの定理によりただちに，最小彩色ゲーム/最小頂点被覆ゲームの劣モジュラ性判定問題は多項式時間で解けることがわかる．

なお，最小彩色ゲーム/最小頂点被覆ゲームの平衡性判定問題および完全平衡性判定問題については，それぞれ Deng–Ibaraki–Nagamochi [4] および，Deng–Ibaraki–Nagamochi–Zang [5] で扱われている．

2.1　定理 2.1 の証明

まず，(A)⇒(B) を示す．つまり，G が $K^1 \cup K^2$ を誘導部分グラフとして含むとき，χ_G が劣モジュラにならないことを示す．そのために,「H が G の誘導部分グラフで，χ_G が劣モジュラであるとき，χ_H も劣モジュラである」という事実を利用する．この事実より，$\chi_{K^1 \cup K^2}$ が劣モジュラでないことを示すことで，(A)⇒(B) が示されたことになる．$\chi_{K^1 \cup K^2}$ が劣モジュラでないことを示すのは容易なので，ここでは省略する．

次に，(B)⇒(C) を示す．G が完全 r-部グラフであることと G の補グラフ $\bar{G}$ の全ての連結成分が完全グラフであることは同値であるので，つまり，$\bar{G}$ が完全グラフでないような連結成分 C を持つとき，G は $K^1 \cup K^2$ と同型な誘導部分グラフを含むことを示す．

C の頂点集合を $V(C)$ で表わす．$|V(C)| \leq 2$ のときはただちに示すことができるので，$|V(C)| \geq 3$ を仮定する．C は $\bar{G}$ において完全誘導部分グラフではないので，C の 2 頂点 $a, b \in V(C)$ で $\bar{G}$ において隣接していないものが存在する．このとき，C は $\bar{G}$ の連結成分なので，a と b を結ぶような $\bar{G}$ の道が C の中に存在する．この道の頂点を並べて，$a = v_0, v_1, \ldots, v_k = b$ としよう．$i = \min\{j \in \{1, \ldots, k-1\} : a$ と v_j が $\bar{G}$ で隣接していない $\}$ と置く．ここで，a と b は隣接していないので，このような i は常に存在することに注意する．ゆえに，$\bar{G}[\{a, v_{i-1}, v_i\}]$ は長さ 2 の道である．すなわち，$G[\{a, v_{i-1}, v_i\}]$ は $K^1 \cup K^2$ と同型である．以上で，(B)⇒(C) が示された．

最後に，(C)⇒(A) を示す．つまり，G が完全 r-部グラフであるとき，χ_G が劣モジュラになることを示す．

$G = (V, E)$ を完全 r-部グラフとし，その各部集合を $V_1, V_2, \ldots, V_r$ とする．このとき，任意の $S \subseteq V$ に対して，$\chi_G(S) = |\{i \in \{1, \ldots, r\} : V_i \cap S \neq \emptyset\}|$ である．ここで，$\pi : 2^V \to 2^{\{1,\ldots,r\}}$ で，$\pi(S) = \{i \in \{1, \ldots, r\} : V_i \cap S \neq \emptyset\}$ と定義される写像を考える．この写像を使うと，$\chi_G(S) = |\pi(S)|$ と書けることが分かる．

完全 r-部グラフ G に対して写像 π に次の性質があることを確認してもらいたい：任意の $S, T \subseteq V$ に対して

- $\pi(S \cup T) = \pi(S) \cup \pi(T)$,
- $\pi(S \cap T) \subseteq \pi(S) \cap \pi(T)$.

これによって，χ_G の劣モジュラ性が次のように証明できる．

$$\begin{aligned}
&\chi_G(S) + \chi_G(T) \\
&\quad = |\pi(S)| + |\pi(T)| \\
&\quad = |\pi(S) \cup \pi(T)| + |\pi(S) \cap \pi(T)| \\
&\quad \geq |\pi(S \cup T)| + |\pi(S \cap T)| \\
&\quad = \chi_G(S \cup T) + \chi_G(S \cap T).
\end{aligned}$$

以上で，定理 2.1 の証明が完結した．

2.2　定理 2.2 の証明

まず，(A)⇒(B) を示す．つまり，G が P^3 または K^3 と同型な部分グラフを含むとき，τ_G は劣モジュラでないことを示す．ここで,「H が G の部分グラフで，τ_G が劣モジュラであるとき，τ_H も劣モジュラである」という事実を用いると，(A)⇒(B) を示すためには，τ_{P^3} および τ_{K^3} の両方とも劣モジュラでないことを示せば十分である．これを示すのは難しくないので省略する．

次に，(B)⇒(C) を示す．つまり，G の連結成分で星でないものが存在するとき，G が P^3 または K^3 と同型な部分グラフを含むことを示す．

G の連結成分 C が星でないとする．まず，C が二部グラフではない場合を考える．このとき，C は奇数長の閉路を持っている．この閉路の長さが 3 のときには，その閉路が K^3 になっている．この閉路の長さが 5 以上のときには，この閉路に沿って P^3 が存在することになる．次に，C が二部グラフである場合を考える．このとき，C は星ではないので，C の部分グラフとして P^3 が存在することになる．これで，(B)⇒(C) の証明は終わった．

最後に，(C)⇒(A) を示す．つまり，G の各連結成分が星であるとき，τ_G が劣モジュラになることを示す．

各連結成分が星であるようなグラフ $G=(V,E)$ の各連結成分を $C_1,\ldots,C_r$ とする．このとき，任意の $S\subseteq E$ に対して，$\tau_G(S)=|\{i\in\{1,\ldots,r\}: E(C_i)\cap S\neq\emptyset\}|$ となる．

ここで，$\pi:2^E\to 2^{\{1,\ldots,r\}}$ で，$\pi(S)=\{i\in\{1,\ldots,r\}: E(C_i)\cap S\neq\emptyset\}$ と定義される写像を考える．この写像を使うと，$\tau_G(S)=|\pi(S)|$ と書けることが分かる．

各連結成分が星であるグラフ G に対して写像 π に次の性質があることを確認してもらいたい：任意の $S,T\subseteq E$ に対して

- $\pi(S\cup T)=\pi(S)\cup\pi(T)$,
- $\pi(S\cap T)\subseteq\pi(S)\cap\pi(T)$.

これによって，τ_G の劣モジュラ性が次のように証明できる．

$$\begin{aligned}
&\tau_G(S)+\tau_G(T)\\
&\quad=|\pi(S)|+|\pi(T)|\\
&\quad=|\pi(S)\cup\pi(T)|+|\pi(S)\cap\pi(T)|\\
&\quad\geq|\pi(S\cup T)|+|\pi(S\cap T)|\\
&\quad=\tau_G(S\cup T)+\tau_G(S\cap T).
\end{aligned}$$

以上で，定理 2.2 の証明が完結した．

3　シャプレイ値

協力ゲームにおける重要な概念としてシャプレイ値がある．シャプレイ値は限界貢献度の期待値として与えられるので，まず限界貢献度を定義する．要素数 n の有限集合 X 上の線形順序 $\leq_\pi$ を考える．このような線形順序は X 上の置換 $\pi\in S_n$ との間に自然な一対一対応があり，可能な線形順序は $n!$ 個だけあることになる (S_n で要素数 n の集合上の置換全体の集合を表す)．この線形順序 $\leq_\pi$ に対して，$X_\pi(i)=\{j\in X: j\leq_\pi i\}$ と置く．$i\in X_\pi(i)$ に注意する．ゲーム $\gamma:2^X\to\mathbb{R}$ に対して，プレイヤー $i\in X$ の線形順序 $\leq_\pi$ に関する**限界貢献度** (marginal contribution) $m^\gamma_\pi[i]\in\mathbb{R}$ を

$$m^\gamma_\pi[i]=\gamma(X_\pi(i))-\gamma(X_\pi(i)\setminus\{i\})$$

で定義する．これは，プレイヤーが次々に加わっていくことで X 全体を構成すると考えるときに，プレイヤー i が加わったときにどれだけコストが増えるのか，ということを表している．限界貢献度の定義より，$\sum\{m^\gamma_\pi[i]: i\in X\}=\gamma(X)$ が任意の $\pi\in S_n$ に対して成立することがわかる．

ゲーム $\gamma:2^X\to\mathbb{R}$ の**シャプレイ値** (Shapley value) $\varphi^\gamma\in\mathbb{R}^X$ とは，その第 i 成分が

$$\varphi^\gamma[i]=\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in S_n}m^\gamma_\pi[i]$$

によって定義されるベクトルである．つまり，プレイヤー i のシャプレイ値 $\varphi^\gamma[i]$ とは，S_n から一つの置換 π が等確率で選ばれたときの限界貢献度 $m^\gamma_\pi[i]$ の期待値である．シャプレイ値に対して $\sum\{\varphi^\gamma[i]: i\in X\}=\gamma(X)$ が成り立つことに注意する．

シャプレイ値の持つ重要な性質で対称性と呼ばれるものがある．(証明は省略する．) ここで，プレイヤー $i,j\in X$ が**対称** (symmetric) であるとは，任意の $S\subseteq X\setminus\{i,j\}$ に対して，$\gamma(S\cup\{i\})=\gamma(S\cup\{j\})$ を満たすことである．

補題 3.1. ゲーム $\gamma:2^X\to\mathbb{R}$ に対して，対称なプレイヤー $i,j\in X$ のシャプレイ値は等しい．つまり，$\varphi^\gamma[i]=\varphi^\gamma[j]$.

この節では，劣モジュラ最小彩色ゲームと劣モジュラ最小頂点被覆ゲームのシャプレイ値を表す式を求める．この式により，劣モジュラ最小彩色ゲームおよび劣モジュラ最小頂点被覆ゲームのシャプレイ値を求める問題は，グラフが入力として与えられているとき，簡単に (多項式時間で) 計算できることが分かる．

3.1　劣モジュラ最小彩色ゲームのシャプレイ値

劣モジュラ最小彩色ゲームのシャプレイ値の式を求める．定理 2.1 より，最小彩色ゲーム χ_G が劣モジュラとなるのは，G が完全 r-部グラフであるときで，そのときに限る．以後，G はこの性質を満たすものとする．$V_1,\ldots,V_r$ を G の部集合とする．このとき，同じ部集合 V_i に含まれる二つの頂点は対称なプレイヤーであることが分かる．というのは，$v\in V_i$ に対して，任意に $S\subseteq V\setminus\{v\}$ を取ってきたとき，$\chi_G(S)=\chi_G(S\cup\{v\})$ となるのは，S が V_i の要素を含んでいるときで，それ以外のときには，$\chi_G(S)=\chi_G(S\cup\{v\})-1$ となり，これは v を V_i から選ぶ方法に依存しないからである．補題 3.1 より対称なプレイヤーのシャプレイ値は等しいので，φ_i で V_i の要素のシャプレイ値を表すことにする．

プレイヤー $v \in V_i$ のシャプレイ値 φ_i を求めよう．まず，頂点集合 V 上の線形順序 $\leq_\pi$ を固定して，限界貢献度 $m_\pi^{\chi_G}[v]$ を考える．上の議論より，

$$m_\pi^{\chi_G}[v] = \begin{cases} 1 & (X_\pi(v) \cap V_i = \{v\}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

となること，つまり，線形順序 $\leq_\pi$ を V_i 上に制限したとき v_i がその中の最小元になっていること，が分かる．よって，シャプレイ値 φ_i は，$n = |V|$ として，

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \Pr_{\pi \in_{\mathrm{uar}} S_n} (X_\pi(v) \cap V_i = \{v\}) \\ &= \Pr_{\pi \in_{\mathrm{uar}} S_n} (v \leq_\pi u \quad \text{for all } u \in V_i) \\ &= \frac{1}{|V_i|} \end{aligned}$$

となる．

3.2 劣モジュラ最小頂点被覆ゲームのシャプレイ値

定理 2.2 より，最小頂点被覆ゲーム τ_G が劣モジュラとなるのは，G の各成分が星であるときであり，そのときに限る．以後，G はこの性質を満たすものとする．$C_1, \ldots, C_r$ を G の連結成分とする．同じ連結成分 C_i に含まれる二つの辺は対称なプレイヤーになる．補題 3.1 より，対称なプレイヤーのシャプレイ値は等しいので，C_i に含まれる辺のシャプレイ値を φ_i で表すことにする．

辺 $e \in C_i$ のシャプレイ値 φ_i を求めよう．まず，辺集合 E 上の線形順序 $\leq_\pi$ を固定して，限界貢献度 $m_\pi^{\tau_G}[e]$ を考える．これは，最小彩色ゲームのときの議論と同様にして，

$$m_\pi^{\tau_G}[e] = \begin{cases} 1 & (X_\pi(e) \cap E(C_i) = \{e\}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

となることが分かる．よって，シャプレイ値 φ_i は，$n = |E|$ として，

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \Pr_{\pi \in_{\mathrm{uar}} S_n} (X_\pi(e) \cap E(C_i) = \{e\}) \\ &= \Pr_{\pi \in_{\mathrm{uar}} S_n} (e \leq_\pi f \quad \text{for all } f \in E(C_i)) \\ &= \frac{1}{|E(C_i)|} \end{aligned}$$

となる．

4 マトロイドとの関連

本節では，定理 2.1，2.2 とマトロイドとの関連について述べる．マトロイド理論の詳細については，Murota [16]，Oxley [17] などを参照せよ．

4.1 マトロイドと貪欲アルゴリズム

マトロイド (matroid) とは有限集合 X と X の部分集合族 $\mathcal{I} \subseteq 2^X$ で次の性質を満たすものの対 $(X, \mathcal{I})$ のことである：

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$；

(I2) $S \in \mathcal{I}$ ならば，任意の $T \subseteq S$ に対して $T \in \mathcal{I}$；

(I3) $|S| > |T|$ を満たす $S, T \in \mathcal{I}$ に対して，ある $i \in S \setminus T$ が存在して $T \cup \{i\} \in \mathcal{I}$.

マトロイド $(X, \mathcal{I})$ の**独立集合** (independent set) とは，$\mathcal{I}$ の要素のことである．マトロイド $(X, \mathcal{I})$ に対して，関数 $\rho : 2^X \to \mathbb{N}$ を $\rho(S) = \max\{|T| : T \subseteq S, T \in \mathcal{I}\}$ で定義する．この関数 ρ はマトロイド $(X, \mathcal{I})$ の**階数関数** (rank function) と呼ばれる．マトロイドの階数関数は次の 3 つの性質を満たすことが知られている：

(R1) 任意の $S \subseteq X$ に対して，$0 \leq \rho(S) \leq |S|$；

(R2) 任意の $S \subseteq T \subseteq X$ に対して，$\rho(S) \leq \rho(T)$；

(R3) 任意の $S, T \subseteq X$ に対して，$\rho(S) + \rho(T) \geq \rho(S \cup T) + \rho(S \cap T)$.

逆に，整数値集合関数 $\rho : 2^X \to \mathbb{N}$ が上の 3 条件を満たすときに，$\mathcal{I} = \{I \subseteq X : |I| = \rho(I)\}$ とすると，$(X, \mathcal{I})$ はマトロイドになることが知られている．この意味において，性質 (R1)〜(R3) はマトロイドを特徴づけていると見なせる．

ここで，$K^1 \cup K^2$ と同型な誘導部分グラフを含まないグラフ G に対して χ_G が性質 (R1)〜(R3) を満たすことを確認しよう．性質 (R1) は容易に確認できる．性質 (R3) は定理 2.1 そのものである．性質 (R2) は次の補題から成立することがわかる．

補題 4.1. $|V \setminus S| \geq 1$ を満たす $S \subseteq V$ と $v \in V \setminus S$ に対して，$\chi_G(S) \leq \chi_G(S \cup \{v\}) \leq \chi_G(S) + 1$ が成立する．

証明. $c : S \to \{1, \ldots, k\}$ を $G[S]$ の最小彩色であるとする．すなわち，$\chi(G[S]) = k$ である．このとき，

$G[S \cup \{v\}]$ の彩色 $c' : S \cup \{v\} \to \{1, \ldots, k, k+1\}$ を次のように構成する：$x \in S$ に対して $c'(x) = c(x)$, $c'(v) = k+1$. よって，$\chi_G(S \cup \{v\}) \leq k+1 = \chi_G(S) + 1$ となる．

一方，$\bar{c}' : S \cup \{v\} \to \{1, \ldots, l\}$ を $G[S \cup \{v\}]$ の最小彩色とする．すなわち，$\chi(G[S \cup \{v\}]) = l$ である．このとき，$G[S]$ の彩色 $\bar{c} : S \to \{1, \ldots, l\}$ を次のように構成する：任意の $x \in S$ に対して $\bar{c}(x) = \bar{c}'(x)$. よって，$\chi_G(S) \leq l = \chi_G(S \cup \{v\})$ となる． □

ここで，一般のグラフ G に対して χ_G は性質 (R1), (R2) を満たすことを補足しておく．更に χ_G が性質 (R3) を満たすことと G が $K^1 \cup K^2$ と同型なグラフを誘導部分グラフとして含まないことは，定理 2.1 により同値であるので，結局，定理 2.1 の条件と χ_G があるマトロイドの階数関数になることが同値になる．

では，G が $K^1 \cup K^2$ を誘導部分グラフとして含まないグラフであるとき，χ_G を階数関数として持つマトロイド $(V, \mathcal{I})$ はどんなものなのだろうか．独立集合 $I \in \mathcal{I}$ は $|I| = \chi(G[I])$ を満たす集合である．これは，I が G のクリーク (完全誘導部分グラフ) であることを意味する．つまり，G が $K^1 \cup K^2$ を誘導部分グラフとして含まないとき，$\mathcal{I}$ を G のクリーク全体の族とすると，$(V, \mathcal{I})$ はマトロイドになり，逆も成立することになる．一般に，性質 (I1)，(I2) を満たす有限集合族は**単体的複体** (simplicial complex) あるいは**独立システム** (independence system) と呼ばれ，グラフのクリーク全体の族は単体的複体になる．過去の文献で，これは**クリーク複体** (clique complex) と呼ばれているものである．

同様に，K^3 または P^3 と同型な部分グラフを含まないグラフ G に対して τ_G が性質 (R1)〜(R3) を満たし，逆も成立することが分かる．このとき，τ_G が特徴づけるマトロイド $(E, \mathcal{I})$ の独立集合 $I \in \mathcal{I}$ は G のマッチングになることが分かる．つまり，G が K^3 または P^3 と同型な部分グラフを含まないとき，$\mathcal{I}$ を G のマッチング全体の族とすると，$(E, \mathcal{I})$ はマトロイドになり，逆も成立することになる．一般に，グラフのマッチング全体の族は単体的複体になり，過去の文献で**マッチング複体** (matching complex) と呼ばれている．

マトロイドと組合せ最適化の関連として，最大重み基を求めるための貪欲アルゴリズムの妥当性がある．マトロイドの極大独立集合をそのマトロイドの**基** (base) と呼ぶ．事実として，B_1，B_2 がマトロイドの基であるとき，$|B_1| = |B_2|$ となることが知られている．

以下，(I3) を満たすかどうか分からない単体的複体 $(X, \mathcal{I})$ に対しても，独立集合，基などのマトロイドの用語を借用する．単体的複体 $(X, \mathcal{I})$ と非負の重みベクトル $w : X \to \mathbb{R}_+$ に対して，最大重み基を求める問題を考える：より形式的に記述すると

$$
\begin{array}{rl}
\text{最大化：} & \displaystyle\sum_{i \in B} w(i) \\
\text{条件：} & B \text{ は } (X, \mathcal{I}) \text{ の基}
\end{array}
$$

となる．この問題とマトロイドは以下の貪欲アルゴリズムによって関係づけられることが知られている：より詳細に記述すると，以下の貪欲アルゴリズムが任意の重みベクトル $w : X \to \mathbb{R}$ に対して最大重み基問題の最適解を与えるための必要十分条件は単体的複体 $(X, \mathcal{I})$ がマトロイドになることである [8, 18].

アルゴリズム： 貪欲アルゴリズム

入力： 単体的複体 $(X, \mathcal{I})$ および $w : X \to \mathbb{R}_+$；

Step 1: $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_n$ となるように $X = \{1, \ldots, n\}$ を整列する；

Step 2: $S \leftarrow \emptyset$；

Step 3: $i = 1$ から n まで以下繰り返し
　　$S \cup \{i\} \in \mathcal{I}$ ならば $S \leftarrow S \cup \{i\}$；
　繰り返し終わり

Step 4: S を出力．

単体的複体 $(X, \mathcal{I})$ がクリーク複体，マッチング複体であるとき，最大重み基問題はそれぞれ，最大重みクリーク問題，最大重みマッチング問題になることに注意する．一般のグラフ G に対して知られていることは，最大重みクリーク問題が NP 困難であり [13]，最大重みマッチング問題は多項式時間で解くことができるが，現在知られている多項式時間アルゴリズムは貪欲アルゴリズムほど単純なアルゴリズムではない [7]，ということである．これらの詳細については組合せ最適化の教科書 (Cook–Cunningham–Pulleyblank–Schrijver [2] や Korte–Vygen [14] など) でも見ることができる．

以上の議論を総合すると，以下のような結論に至る．

系 4.2. $G = (V, E)$ をグラフ，$(V, \mathcal{I})$ を G のクリーク複体とする．このとき，定理 2.1 の諸条件と以下の条件は同値である．

1. $(V, \mathcal{I})$ はマトロイド.

2. 任意の非負重みベクトル $w : V \to \mathbb{R}_+$ に対して，最大重みクリーク問題は貪欲アルゴリズムによって解くことができる.

系 4.3. $G = (V, E)$ をグラフ，$(E, \mathcal{I})$ を G のマッチング複体とする．このとき，定理 2.2 の諸条件と以下の条件は同値である.

1. $(E, \mathcal{I})$ はマトロイド.

2. 任意の非負重みベクトル $w : E \to \mathbb{R}_+$ に対して，最大重みマッチング問題は貪欲アルゴリズムによって解くことができる.

4.2 他の関連する最適化問題

有限集合 X に対して二つの集合関数 $\gamma : 2^X \to \mathbb{R}$ と $\eta : 2^X \to \mathbb{R}$ を考える．解釈として，$S \subseteq X$ を選んだときにかかる費用が $\gamma(S)$ で得られる収益が $\eta(S)$ であると考える．このとき，

$$\begin{array}{rl} \text{最大化：} & \eta(S) - \gamma(S) \\ \text{条件：} & S \subseteq X \end{array}$$

という問題を考える．この枠組は**収益収集最適化問題** (prize-collecting optimization problem) の一般化であり，収益収集問題の中ではシュタイナー木や巡回セールスマンに関しては様々な研究 (例えば，[10]) がある.

ここでは，γ が χ_G である場合を考える．つまり，与えられたグラフ $G = (V, E)$ と収入関数 $\eta : 2^V \to \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{array}{rl} \text{最大化：} & \eta(S) - \chi_G(S) \\ \text{条件：} & S \subseteq V \end{array}$$

という問題を考える．この問題の例として次のような状況がある．携帯電話の基地局の候補が幾つかあり，それを V とする．このとき，より多くの基地局を採用するとそれだけ収益が見込めるが，逆に費用もかかる．特に，採用された基地局同士でエリアを共有してしまうと，異なる周波数帯を割り当てなくてはいけなくなるので，採用した基地局 $S \subseteq V$ に対応する彩色数 $\chi_G(S)$ が費用として効いて来る．このようなときに，基地局の効果的な採用の仕方として $\eta(S) - \chi_G(S)$ を最大化するような $S \subseteq V$ を選んでくる，というのがこの例での状況である.

収益 η が非負の線形関数であるときを考える．つまり，ある非負ベクトル $p : V \to \mathbb{R}$ を用いて，$\eta(S) = \sum\{p_i : i \in S\}$ と書くことができる場合である．まず，一般の G と線形関数 η に対して，$\eta(S) - \chi_G(S)$ を最大化する問題は NP 困難であることは簡単に分かる．というのは，各 p_i が十分大きな値をとるような線形関数 η を考えると，V そのものがこの問題の最適解になり，このときは結局もとの最小彩色問題を解かなくてはならないからである.

つまり，次の興味の対象としては，どのようなときに多項式時間で解くことができるのか，という問題が挙がってくる．簡単な観察として，η が線形で γ が劣モジュラである場合は，この最適化問題が劣モジュラ関数最小化問題に帰着でき，強多項式時間で解ける [11, 12, 19] ということが分かる．ただ，γ が χ_G であるときは，G が定理 2.1 で述べられている条件を満たさないといけないので，このアプローチで解くことができる問題はかなり限られてくることが分かる．しかし，η が線形で G の最大重み安定集合が多項式時間で求められるような場合 (例えば，G が理想グラフ [11]，線グラフのとき) は，次のアルゴリズムによって多項式時間で $\eta - \chi_G$ の最適解を求めることができる.

入力：グラフ $G = (V, E)$，非負ベクトル $p : V \to \mathbb{R}$;

Step 1: $I \leftarrow \emptyset$；

Step 2: $I = V$ となるまで以下繰り返し

- **Step 2-1:** p を重みとして，$G[V \setminus I]$ の最大重み安定集合 I' を求める；
- **Step 2-2:** $\eta(I) \geq \eta(I \cup I') - 1$ ならば，繰返しを抜ける；
- **Step 2-3:** そうでないときは，$I \leftarrow I \cup I'$；

繰返し終わり；

Step 3: I を出力.

基本的にこのアルゴリズムでは，すべての $k \in \{1, \ldots, \chi(G)\}$ に対して，$\chi_G(S_k) = k$ となる最大重み頂点部分集合 S_k を求め，そのときの目的関数値 $\eta(S_k) - k$ と S_{k-1} に対する目的関数値 $\eta(S_{k-1}) - (k-1)$ を比べている．重要な観察は $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots$ となるような $S_1, S_2, \ldots$ が存在することである．これによって，このアルゴリズムの妥当性が分かる.

ここで，η が優モジュラ (つまり，$-\eta$ が劣モジュラ) である場合を考える．線形関数は優モジュラであ

るから，この状況は η が線形関数である場合の一般化になっている．このとき，G が定理 2.1 の条件を満たすときは，やはり劣モジュラ関数最小化問題のアルゴリズム [11, 12, 19] を用いてこの問題が強多項式時間で解けることが分かる．しかし，それ以外のときにどのようにして多項式時間で解けるのか，あるいは解けないのか，ということはよく分かっていないことである．

謝辞

この研究は The Berlin-Zürich Joint Graduate Program "Combinatorics, Geometry, and Computation" (CGC) による助成を受けて行なわれました．また，柏原賢二先生，塩浦昭義先生，八森正泰先生にはこの研究に関する貴重なコメントを頂きました．感謝いたします.

参考文献

[1] J.M. Bilbao, *Cooperative Games on Combinatorial Structures*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2000.

[2] W.J. Cook, W.H. Cunningham, W.R. Pulleyblank and A. Schrijver, *Combinatorial Optimization*, John Wiley and Sons, New York, 1998.

[3] I.J. Curiel, *Cooperative Game Theory and Applications: Cooperative Games Arising from Combinatorial Optimization Problems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[4] X. Deng, T. Ibaraki and H. Nagamochi, Algorithmic aspects of the core of combinatorial optimization games, *Mathematics of Operations Research* **24**, 1999, 751–766.

[5] X. Deng, T. Ibaraki, H. Nagamochi and W. Zang, Totally balanced combinatorial optimization games, *Mathematical Programming* **87**, 2000, 441–452.

[6] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer-Verlag, New York, 1997. The second edition, 2000.

[7] J. Edmonds, Path, trees, and flowers, *Canadian Journal of Mathematics* **17**, 1965, 449–467.

[8] J. Edmonds, Matroids and the greedy algorithm, *Mathematical Programming* **1**, 1971, 127–136.

[9] S. Fujishige, *Submodular functions and optimization*, North-Holland, Amsterdam, 1991.

[10] M.X. Goemans and D.P. Williamson, A general approximation technique for constrained forest problems, *SIAM Journal of Computing* **24**, 1995, 296–317.

[11] M. Groötschel, L. Lovász and A. Schrijver, *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, 1988. The second edition, 1993.

[12] S. Iwata, L. Fleischer and S. Fujishige, A combinatorial strongly polynoial time algorithm for minimizing submodular functions, *Journal of the ACM* **48**, 2001, 761–777.

[13] R.M. Karp, Reducibility among combinatorial problems, in: R.E. Miller and J.W. Thatcher, eds., *Complexity of Computer Computations*, Plenum Press, New York, 1972, 85–103.

[14] B. Korte and J. Vygen, *Combinatorial Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[15] M. Maschler, B. Peleg and L. Shapley, The kernel and bargaining set of convex games, *International Journal of Game Theory* **2**, 1972, 73–93.

[16] K. Murota, *Matrices and Matroids for Systems Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[17] J. Oxley, *Matroid Theory*, Oxford University Press, New York, 1992.

[18] R. Rado, Note on independence functions, *Proceedings of the London Mathematical Society* **7**, 1957, 300–320.

[19] A. Schrijver, A combinatorial algorithm minimizing submodular functions in strongly polynomial time, *Journal of Combinatorial Theory Series B* **80**, 2000, 346–355.

[20] L. Shapley, Cores of convex games, *International Journal of Game Theory* **1**, 1971, 11–26. Errata is in the same volume, 1972, pp. 199.

[21] L. Shapley and M. Shubik, Assignment games I. the core, *International Journal of Game Theory* **1**, 1972, 111–130.

[22] S. Tijs, Bounds fo the core and the τ-value, in : O. Moeschlin and P. Pallaschke, eds., *Game Theory and Mathematical Economics*, North Holland, Amsterdam, 1981, 123–132.

Yoshio Okamoto
Institute of Theoretical Computer Science
Department of Computer Science
ETH Zürich
ETH Zentrum, CH-8092
Zürich, Switzerland
E-mail: okamotoy@inf.ethz.ch