平面グラフの $\overline{C_7}$-彩色問題

上嶋 章宏 * 伊藤 大雄 *

* 京都大学大学院 情報学研究科 通信情報システム専攻

{uejima, itohiro}@kuis.kyoto-u.ac.jp

概要

本稿では，グラフの点彩色問題の一般化である，H-彩色問題を扱う (但し，H はグラフ)．特に H が奇数長閉路の補グラフ $\overline{C_p}$(p は節点数) である場合を取り上げ，以下の性質を示す：(1) m-彩色可能であるとき，かつそのときに限り，$\overline{C_{2m+1}}$-彩色可能であるような、グラフのクラスの提示，(2) 平面グラフの $\overline{C_7}$-彩色問題の NP-完全性の証明，(3) $\overline{C_7}$-彩色可能であるが，3-彩色不可能な平面グラフのクラスの提示.

$\overline{C_7}$-Coloring Problems of Planar Graphs

Akihiro UEJIMA* Hiro ITO*

* School of Informatics, Kyoto University, Yoshida-Honmachi, Kyoto, Japan, 606-8501

{uejima, itohiro}@kuis.kyoto-u.ac.jp

Abstract

This paper considers *H-coloring problem*, which is a generalization of the traditional coloring problem, where H is a graph. Especially, we deal with the case that H is the complement graph $\overline{C_p}$ of a cycle of order p. This paper presents as follows: (1) classes of graphs which are $\overline{C_{2m+1}}$-colorable iff m-colorable, (2) $\overline{C_7}$ -coloring problem of planar graphs is NP-complete, and (3) there exists a class of graphs which are not 3-colorable but $\overline{C_7}$-colorable.

1 はじめに

グラフの点彩色問題は，グラフの最適化問題の中で最も有名な問題の一つであり，数多くの研究がなされている [9]．本問題は，集合をごく単純な規則に従って分割する問題と言え，スケジューリング問題や回路の結線問題など多くの対象に応用し得る．本稿では，グラフの点彩色問題の一般化である，H-彩色問題を扱う (但し，H はグラフである)．本問題は，従来の点彩色問題に，“隣接点対に塗れないような異なる色対も存在し得る” という単純な一般化を加えた問題と言える．

本研究では単純無向グラフのみを扱う．グラフ $G = (V, E)$ に対し，その節点集合を $V(G)$，枝集合を $E(G)$ で表現することもある．$x \in V(G)$ に対し，$adj_G(x) := \{y|y \in V(G), (x, y) \in E(G)\}$ と定義し，x の**隣接点集合**と呼ぶ．グラフ G とその節点部分集合 $V' \subseteq V(G)$ に対し，グラフ $(V', \{(x, y)|x, y \in V', (x, y) \in E(G)\})$ を V' による G の**誘導部分グラフ**と呼ぶ．n 節点の完全グラフ，閉路をそれぞれ K_n，C_n で表す．グラフ G に対し，その補グラフ $(V(G), \{(x, y)|x, y \in V(G), (x, y) \notin E(G)\})$ を $\overline{G}$ で表現する．G，H をグラフとする．**準同形写像** $f : G \to H$ とは，$x, y \in V(G)$ が G の隣接点ならば $f(x), f(y)$ は H の隣接点となるような $V(G)$ から $V(H)$ への写像である [4]．定義より，準同形写像 $f : G \to K_n$ はグラフ G の n-彩色に一致する．これに対応付けて，準同形写像 $f : G \to H$ を G **の** H**-彩色**と呼ぶ．このとき、

H-**彩色問題**を次のように定義できる：
与えられたグラフ H に対し，

入力： グラフ G,
質問： グラフ G の H-彩色は可能か？

上記質問を肯定する準同形写像 f が存在するならば，f を G **から** H **への準同形写像**と呼び，G は H**-彩色可能**であると呼ぶ．但し，H が完全グラフの場合，後者を "G は $|V(H)|$**-彩色可能**" と，同様に H-彩色問題を $|V(H)|$**-彩色問題**と表現することもある．グラフ H に対し，H から H のどの真部分グラフへも準同形写像が存在しないならば，H を**極小**と呼ぶ．例えば，全ての完全グラフや奇数長閉路は極小なグラフである．

グラフの準同形写像や H-彩色問題は，グラフ同形と近い概念であることや彩色問題の単純な一般化であることから，興味深い問題として様々な視点から多くの研究がなされている [2, 6, 7, 8, 11, 12, 14, 15, 16]．本稿では特に，奇数長閉路の補グラフ $\overline{C_p}$-彩色可能なグラフのクラス，$\overline{C_p}$-彩色問題について解析を行う．本研究の動機と具体的な研究結果は以下に記す．我々は以前，全ての奇数長閉路の補グラフが極小であること，更に彩色可能なグラフのクラスの包含関係について以下の性質を示した [16]．但し，$\mathcal{L}(H)$ は H-彩色可能なグラフのクラスを，$X \subset Y$ は，Y が X を真に含むことを表す．

定理 1.1 *[16]* 任意の整数 $m \geq 2$ に対し，$\mathcal{L}(K_m) \subset \mathcal{L}(\overline{C_{2m+1}}) \subset \mathcal{L}(K_{m+1})$ である． □

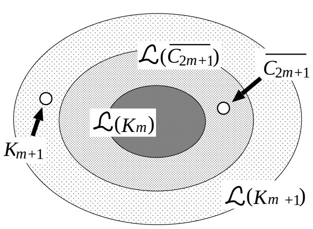

図 1: $\mathcal{L}(\overline{C_{2m+1}})$ の包含関係

定理 1.1 は，奇数長閉路の補グラフで彩色可能なグラフのクラスが，従来の単純な彩色可能なグラフのクラスの階層構造を細分するように存在し，無限に続く階層構造を有することを表す．本稿では，これらのクラス間の構造に着目し解析する．グラフの $\overline{C_{2m+1}}$-彩色は，$\mathcal{L}(\overline{C_{2m+1}})$ の階層構造の美しさも然る事ながら，様々な応用も考えられる．例えば，$\overline{C_7}$-彩色は次のような 1 週間のスケジューリング問題をモデル化できる．"どのメンバも複数の仕事に参加しており，各仕事は所属するメンバ全てを集め，週 1 日を要する．どのメンバも 2 日連続して仕事には従事しないという制限の基，1 週間のスケジュールを決定する" という問題は，各仕事とメンバの関係をモデル化したグラフ G を，1 週間各曜日の関係を示すグラフ $\overline{C_7}$ で彩色する問題に帰着できる．

本稿では以下の性質を示す．

定理 1.2 グラフ G が *chordal graph* であるならば，G が m-彩色可能であるとき，かつそのときに限り，G は $\overline{C_{2m+1}}$-彩色可能である．但し，$m \geq 2$ は整数． □

定理 1.3 グラフ G が内部極大平面グラフであるならば，G が m-彩色可能であるとき，かつそのときに限り，G は $\overline{C_{2m+1}}$- 彩色可能である．但し，$m \geq 2$ は整数． □

このように，いくつかの有名なグラフのクラスに関して，m-彩色と $\overline{C_{2m+1}}$-彩色が同値である．グラフ G を平面に限定した場合を考える．任意の平面グラフ G は 4-彩色可能であるが，平面グラフ G の 3-彩色問題は NP-完全であることが知られている [3]．また，[8] の結果より，一般のグラフの $\overline{C_{2m+1}}$-彩色問題は NP-完全となる (但し，m は自然数)．本稿では，定理 1.1 より，3-彩色と 4-彩色の中間にあたる $\overline{C_7}$-彩色に関して次の定理を示す．

定理 1.4 平面グラフの $\overline{C_7}$-彩色問題は *NP*-完全である． □

定理 1.3，1.4 は平面グラフ上の 3-彩色と $\overline{C_7}$-彩色が近いのではないかと思わせるが，我々は $\overline{C_7}$-彩色可能で 3-彩色不可能な平面グラフを無数に含む，ある平面グラフのクラスを定義する．

本稿の構成は，第 2 節で定理 1.2，1.3 の証明，第 3 節で定理 1.4 の証明，第 4 節で $\overline{C_7}$-彩色可能で 3-彩色不可能な平面グラフを数多く含む，ある平面グラフのクラスの定義，最後第 5 節でまとめを記す．

2 m-彩色と $\overline{C_{2m+1}}$-彩色が同値なグラフのクラス

グラフ G が誘導部分グラフとして長さ 4 以上の閉路を持たないとき，G を **chordal** と呼ぶ．平面グラフ G に対し，少なくとも外面以外の全ての面が三角形となるような G の平面描画が存在するならば，G を**内部極大平面グラフ**と呼ぶ．定義より，内部極大平面グラフは極大平面グラフを含む．本節では，定理 1.2，1.3 を示す．まず，これらの定理の証明に必要な性質を以下に記す．

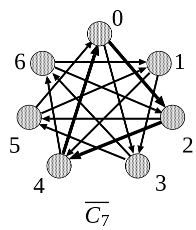

図 2: $\overline{C_7}$ への方向付け

長さ 7 の閉路の補グラフ $\overline{C_7}$ の枝を図 2 のように方向付けする．方向付けた $\overline{C_7}$ に注目すると，長さ 3 の閉路は全て有向閉路になっており，長さ 4 の有向閉路は存在しないことが分かる．従って，以下の補題が得られる．

補題 2.1 グラフ G を考える．G が $\overline{C_7}$-彩色可能であるならば，全ての長さ *3* の閉路が有向閉路となり，どの長さ *4* の閉路も有向閉路とはならないような，グラフ G の枝の方向付けが存在する． □

また，補題 2.2 は [1, 13] で，補題 2.3 は [5] で示されている．

補題 2.2 *[1, 13] chordal graph* G は，$adj_G(v)$ がクリークとなる節点 $v \in V(G)$ を持つ．*(*このような節点 v を **simplicial vertex** と呼ぶ．*)* □

補題 2.3 *[5]* 極大平面グラフ G が *3*-彩色可能であるとき，かつそのときに限り，G の全ての節点は偶次数である．□

定理 1.1 より，$\mathcal{L}(K_p) \subset \mathcal{L}(\overline{C_{2p+1}})$ なので，定理 1.2, 1.3 の証明では，“G が $\overline{C_{2p+1}}$-彩色可能であるならば，G は p-彩色可能である” ことのみを示す．

定理 1.2 の証明） G が $\overline{C_{2p+1}}$-彩色可能であると仮定する．$K_{p+1} \notin \mathcal{L}(\overline{C_{2p+1}})$ であり，G が $\overline{C_{2p+1}}$-彩色可能であるので，G は部分グラフとして K_{p+1} を含まない．よって，G の simplicial vertex v(補題 2.2) の次数は $p-1$ 以下となり，クリーク $adj_G(v) \cup \{v\}$ の要素数は p 以下である．$V(G)-\{v\}$ による G の誘導部分グラフ G' は明らかに chordal であり，G' を G と置き換えて，同様の議論を繰り返し適用できる．このとき，G から順に削除していった節点の列を $v_1, v_2, \cdots, v_n$ とする．$\{v_i, v_{i+1}, \cdots, v_n\}$ による G の誘導部分グラフにおいて，v_i の次数は $p-1$ 以下なので，G 全体の p-彩色が帰納的に可能である． □

定理 1.3 の証明） G が $\overline{C_{2p+1}}$-彩色可能であると仮定する．G が平面グラフであるので，$p \geq 4$ の場合は常に成立する．$p=2$ の場合を考える．$K_3 \notin \mathcal{L}(\overline{C_5})$ より，内部極大平面グラフ G は triangle-free なグラフとなる．つまり G は森となり，G が 2-彩色可能であることは明らか．よって以下では，$p=3$ の場合を考える．補題 2.1 より，G の少なくとも外面上にない全ての節点は偶次数となる．

グラフ G を 2 つ用意し，それぞれの外面上にある，対応する節点同士を同一視することで得られるグラフ G' を考える (図 3).

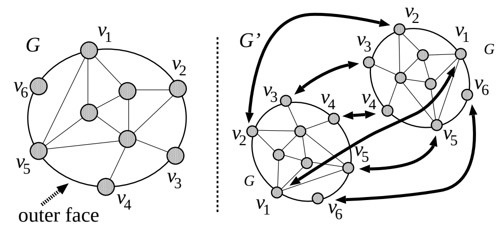

図 3: G と極大平面グラフ G'

G' において，元のグラフ G の外面上以外にあった節点は全て偶次数のままである．G の外面上にあった任意の節点 v を考える．G' での v の次数は $d_{G'}(v) = d_G(v) + (d_G(v)-2) = 2(d_G(v)-1)$ である．従って G' は，全ての節点は偶次数であり，かつ，全ての面が三角形な平面グラフを形成する．補題 2.3 より，G' は 3-彩色可能であり，その部分グラフ G が 3-彩色可能であることは明らか (G' が平面グラフであることに注意). □

3 平面グラフの $\overline{C_7}$-彩色問題の NP-完全性

本節では，定理 1.4 を証明する．平面グラフの $\overline{C_7}$-彩色問題が NP に属すことは自明である．以下では，平面 3SAT[10] から平面グラフの $\overline{C_7}$-彩色問題への多項式時間帰着を示す．[8] での証明では，グラフの平面性を特に意識すること無く証明を進めており，これを利用して，定理 1.4 の証明を行うことは困難であると考える．

定義 3.1 平面 *3SAT* とは，論理式 $B = \{c_1, \cdots, c_m\}$ から構成される以下のグラフ $G(B)$ が平面グラフであるような *3SAT* である *(*但し，変数の集合を $\{v_1, \cdots, v_n\}$ とする*)*：$N = \{c_j | 1 \leq j \leq m\} \cup \{v_i | 1 \leq i \leq n\}$，$A = \{\{c_j, v_i\} | v_i \in c_j \ or \ \overline{v_i} \in c_j\} \cup \{\{v_i, v_{i+1}\} | 1 \leq i < n\} \cup \{\{v_n, v_1\}\}$ であるグラフ $G(B) = (N, A)$*(*図 *4* 参照*)*.

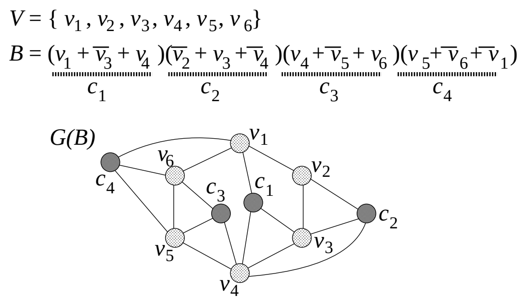

図 4: 平面 3SAT と $G(B)$

定理 1.4 の証明)　“平面 3SAT から平面グラフの $\overline{C_7}$-彩色問題への多項式時間帰着” を示す．本証明に必要な重要な構造を図 5 に示す．図 5 の左上のグラフの $\overline{C_7}$-彩色は，図示した彩色とその対称な彩色のみである．左上のグラフとその $\overline{C_7}$-彩色を便宜的に図 5 の下の二種類を使って表現する．

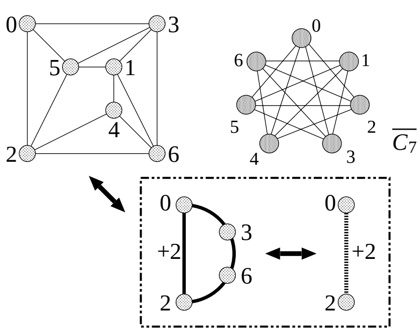

図 5: 定理の証明に使用するグラフとその $\overline{C_7}$-彩色

B を平面 3SAT の入力として与えられる，任意の節の集合とする．以下では，B が充足可能であるとき，かつそのときに限り，$\overline{C_7}$-彩色可能であるようなグラフ G を構成する．以降，$\overline{C_7}$ 上の 3 つの色を特殊な色として扱う: 色 2 を 3SAT での真に，色 5 を偽に対応させるように，色 0 を使用．G の構成に使用する，いくつかの構成要素を以下に示す．

図 6(a) は，両端の節点 x を色 0 で彩色すると，上下の 2 つの節点 v は色 2 または 5 のいずれか一方でのみ彩色可能となる．同様に (b) は，両端の節点 x を色 0 で彩色すると，上下の節点対 $v, \overline{v}$ は片方を色 2，もう片方を色 5 でのみ彩色可能である．それぞれ，図中右側のように，便宜的に書く．

B の各節に対応する，G の構成要素を示す．図 7 の左図において，節点 y を色 2 で，節点 v_i, v_j, v_k を色 2 または 5 のいずれかで彩色すると仮定する (後述の，G 全体の

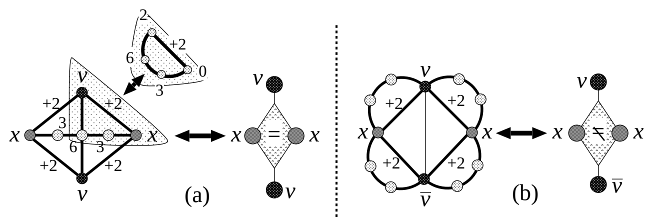

図 6: G の構成要素 (1)

構成でこの仮定を実現している)．このとき，v_i, v_j, v_k 全てが色 5 で彩色されていた場合のみ，このグラフは $\overline{C_7}$-彩色不可能である．これを図中右側のように，表現する．

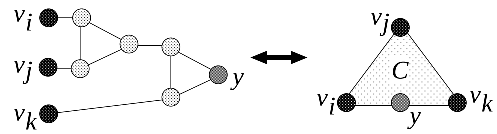

図 7: G の構成要素 (2)

G の構成において，G の平面性を維持するために必要となる構成要素を図 8 に示す．図 8 の左側のグラフにおいて，2 つの節点 x を共に色 0 で，左右 2 つの節点 y を色 2 で彩色すると仮定する (この仮定も先と同様，G 全体での構成で実現する)．このとき，上下の 2 節点 v は色 2 または 5 の一方のみでしか彩色できない構成になっている．なお，図 7，8 の構成要素は，[3] で示された図をそのまま，或いは少し変更を加えて構成している．

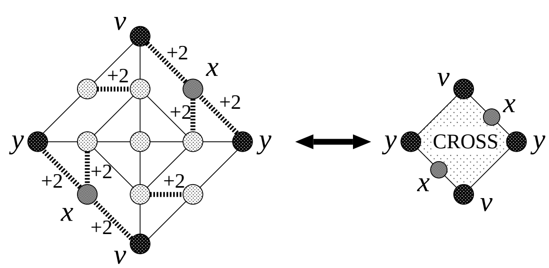

図 8: G の構成要素 (3)

$G(B)$ からの G の構成法：　平面 3SAT の任意の問題例 B に対応する平面グラフ $G(B)$ が存在する．それを元に，グラフ G を以下のように構成する．図 9 のように，特殊な 2 節点 $SV0$，$SV2$ と置き，$G(B)$ の各節点・枝を上記構成要素で置き換えて，平面に配置する．

更に，各項の節点に対応する構成要素の節点 y を節点 $SV2$ に構成要素 “=” を使って接続する (図 10)．その際，

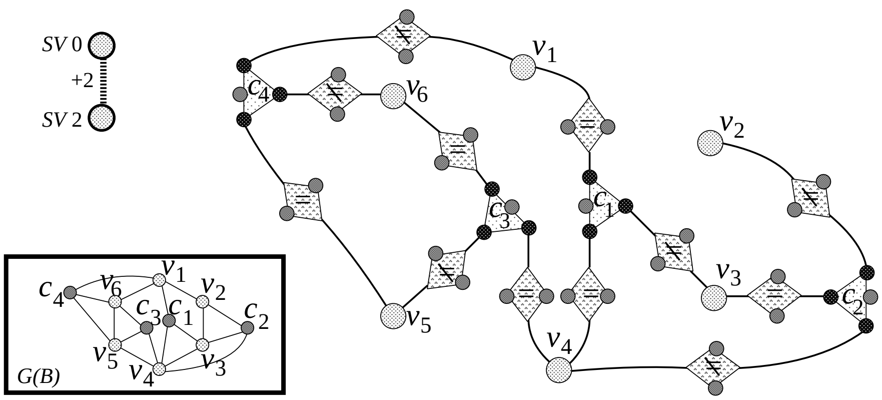

図 9: G の構成法 (1)

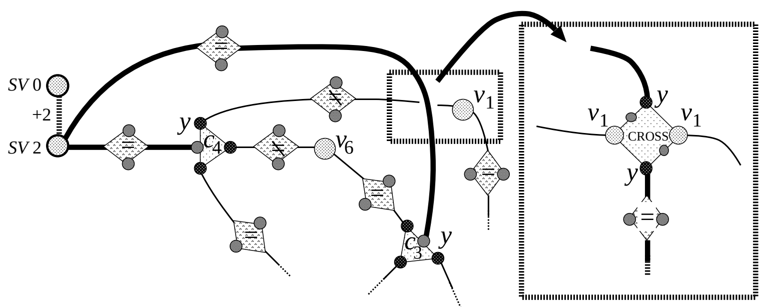

図 10: G の構成法 (2)

枝に交差が生じる場合は，構成要素 “cross” を使って平面性を維持する．

最後に，構成要素上に存在する全ての節点 x を節点 $SV0$ に，構成要素 “=” を使って接続する．枝の交差は，図 11 に示すように構成要素 “=” を用いて回避でき，平面グラフ G が構成できる．

解の一致に関しては，B が充足可能であるならば，B を充足させる変数への $(0,1)$ の割当てに従って，1 ならば色 2 を，0 ならば色 5 を各変数に対応する G の各節点に彩色する．このとき，G の構成に使用した全ての構成要素は，上記説明の通り $\overline{C_7}$-彩色可能であることは明らか (特殊な 2 節点 $SV0$, $SV2$ はそれぞれ，色 0, 2 で彩色される)．G が $\overline{C_7}$-彩色可能であるとする．一般性を失うことなく，節点 $SV0$, $SV2$ をそれぞれ，色 0, 2 で彩色したと仮定でき，このとき，B の各節に対応する構成要素内では，節点 v_i, v_j, v_k のうち少なくとも一点は色 2 で彩色される．B の各変数に対応する彩色は，色 2 または 5 のいずれかとなり，この彩色に対応する変数 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ への (0, 1) の割当ては，明らかに B を充足させる． □

4　$\mathcal{L}(\overline{C_7}) - \mathcal{L}(K_3)$ が含む平面グラフ

定義 4.1 G を平面グラフとする．k 個の面上にのみ G の節点が存在するような G の平面描画が可能であるならば，G を **k-窓平面グラフ** (**k-window planar graph** (**k-WPG**)) と呼び，それら k 個の面をそれぞれ，**窓** (**window**) と呼ぶ．枝集合が極大になっている k-窓平面グラフを**極大 k-窓平面グラフ**と呼ぶ．

上記定義より，1-窓平面グラフは外平面グラフと一致し，3-彩色可能である．また，k を一般化すると，k-窓平面グラフは任意の平面グラフと一致し，4-彩色可能である．そこで我々は，その中間として 2-窓平面グラフを考える．

定義 4.2 各窓上の節点数が p $(= |V|/2)$ であり *(p を**窓長**と呼ぶ)*，同番号が割当てられた節点間には必ず枝が存在するような，両窓への閉路に沿った番号付け $1, 2, \cdots, p$ が存在するような極大 *2*-窓平面グラフ (V, E) を **matchable 極大 2-窓平面グラフ**と呼ぶ *(図 12)*．両窓上の *4* 節点 $i, i+1$ によって構成される面を **BOX** と呼ぶ．

便宜的に，2-窓平面グラフを図 12 の右側のように表記

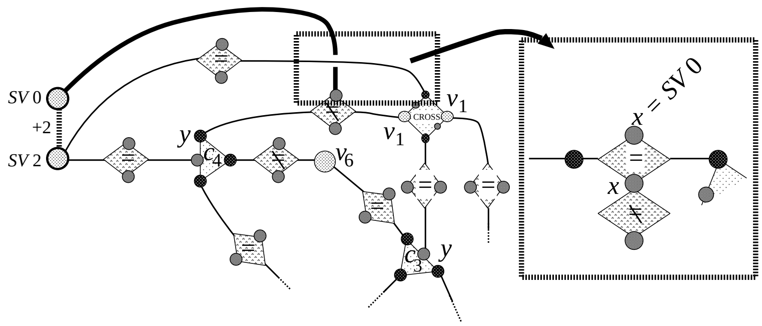

図 11: G の構成法 (3)

する．(両端の節点対をそれぞれ同一視することで，視覚的に元のグラフに一致する)．

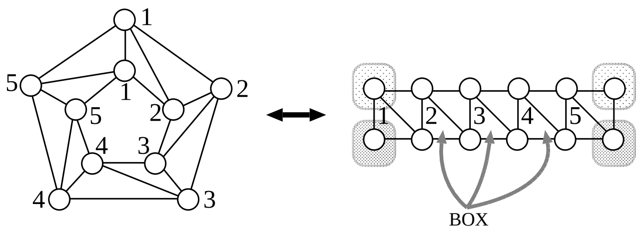

図 12: matchable 極大 2-窓平面グラフ

任意の matchable 極大 2-WPG は，p 個の BOX の列によって構成される．枝の極大性より，各 BOX には，右上がりの枝または右下がりの枝のいずれか一方が必ず存在し，それぞれを特に **BOX1**，**BOX2** と呼ぶ．つまり，matchable 極大 2-WPG G は，BOX1 と BOX2 の有限個の組合わせによって構成される．このとき，G 上に存在する BOX1 の数を p_1，BOX2 の数を p_2 とする．G の対称性から，$p_1 \leq p_2$ と仮定できる．

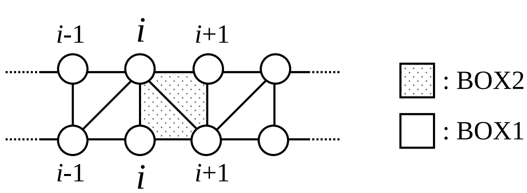

図 13: matchable 極大 2-WPG での BOX と BOX1, BOX2

本節では，以下の定理を証明する．

定理 4.3 *matchable* 極大 *2-WPG* G を考える．このとき，以下の表に示すように，G の $\overline{C_7}$-彩色可能性が決定できる．但し，表中の○は $\overline{C_7}$-彩色可能であること，×は $\overline{C_7}$-彩色不可能であることを示す．

	$p_2 = 1$	$p_2 = 2$	$p_2 = 4$	その他
$p_1 = 0$	×	×	×	○
$p_1 = 1$	○	×	○	○
$p_1 \geq 2$	○	○	○	○

□

本定理の証明に必要な性質を記す．グラフ G の隣接しない任意の 2 節点の縮約を，G の **elementary homomorphism** と呼ぶ．グラフ G' が，有限回の elementary homomorphism で G から得られるグラフならば，G' を G の **morphic image** と呼ぶ (G 自身もそれの morphic image と考える)．このとき，以下の性質が示されている [11]：

定理 4.4 *[11]* グラフ G が H-彩色可能であるとき，かつそのときに限り，G のある *morphic image* G' が H の部分グラフと同形になる． □

定理 4.3 の証明） グラフ G において，各 BOX への枝付与の仕方に関して，次の 2 つの場合に分けて考える．

(1) **$p_1 = 0$ の場合：** 図 14 に $p_2 = 3,\ 5,\ 7$ の 3 つのグラフの $\overline{C_7}$-彩色の例を示す．図では，節点を省略しており，その $\overline{C_7}$-彩色は，その近傍に数字を記すことで表現している (以下の図例でも同じ手法を取る)．

図 14 の部品 (a)，(b)，及び (c) の $\overline{C_7}$-彩色を組合わせることで，窓長 $p = 3$ または $p \geq 5$ であるグラフ G が $\overline{C_7}$-彩色可能であることが示せる．

$p = 1$ の場合，G は自己ループを持ち，明らかに $\overline{C_7}$-彩色不可能である．$p = 2$ の場合，G は完全グラフ K_4 となる．定理 1.1 より，G は $\overline{C_7}$-彩色不可能で

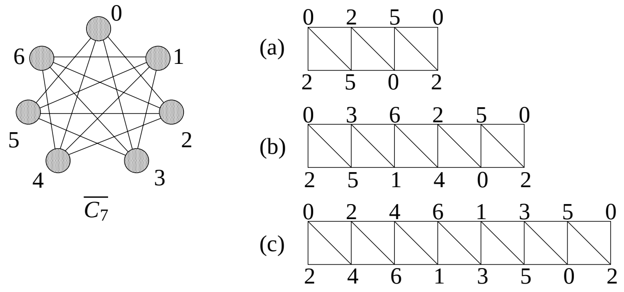

図 14: 部品 (a)，(b)，(c)

ある．$p = 4$ の場合，G が $\overline{C_7}$-彩色可能であると仮定する．定理 4.4 と $|V(G)| = 2p = 8$ より，G の morphic image が $\overline{C_7}$ の部分グラフとなるためには少なくとも一度 elementary homomorphism を必要とする．最初の elementary homomorphism を考える．グラフの対称性を考慮すると，縮約された点対の組として 3 つの場合が考えられる．このとき，どの G の morphic image も，部分グラフとして完全グラフ K_4 を含む．これは，仮定に矛盾する．従って，G は $\overline{C_7}$-彩色不可能となる．

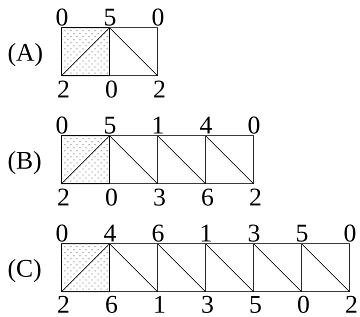

図 15: 部品 (A)，(B)，(C)

(2) $p_1 \neq 0$ **の場合：**$p_1, p_2 \neq 0$ なので，図 15 の (A) と同形な，G の誘導部分グラフが少なくとも一つ存在する．図 16 のように (A) と同形な部分グラフを G から削除したグラフ G' を考える．(A) が $\overline{C_7}$-彩色可能なので，G' が $\overline{C_7}$-彩色可能ならば，G も $\overline{C_7}$-彩色可能である．同操作を繰り返し適用し，$|p_2 - p_1|$ 個の BOX2 のみから構成されるグラフ G'' を生成する (G'' が $\overline{C_7}$-彩色可能ならば，G も $\overline{C_7}$-彩色可能である)．

$p_2 - p_1 = 3$ または $p_2 - p_1 \geq 5$ の場合，場合 (1) と同様の議論から，直ちに G が $\overline{C_7}$-彩色可能となる．$p_2 - p_1 = 2$ または 4 の場合，G'' を生成する直前のグラフは図 15 の (B) または (C) と同形となる．従って，G は $\overline{C_7}$-彩色可能である．

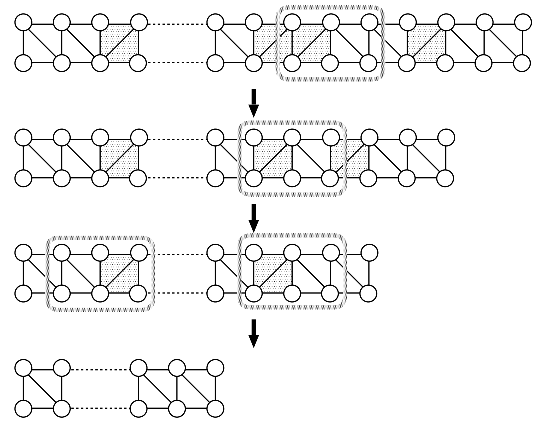

図 16: G から G'' を構成する行程

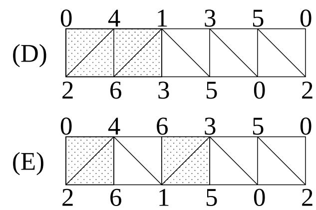

図 17: 部品 (D)，(E)

$p_2 - p_1 = 1$ の場合を考える．$p_1 \geq 2$ のとき，G'' を生成する 2 ステップ前のグラフは，図 17 の (D) または (E) と同形となり，G は $\overline{C_7}$-彩色可能となる．$p_1 = 1$ のとき，G は，誘導部分グラフとして完全グラフ K_4 を含み，G は $\overline{C_7}$-彩色不可能となる． □

定理 4.3 から，節点数が 9 以上ならば，matchable 極大 2-窓平面グラフは $\overline{C_7}$-彩色可能である．このクラスに対する K_3-彩色可能性について，次の性質が示せる．

命題 4.5 *p_1 個の BOX1 と p_2 個の BOX2 を持つ，matchable 極大 2-WPG G を考える．$|p_2 - p_1| = 3q$ ($q \geq 0$ は整数) であるとき，かつそのときに限り，G は K_3-彩色可能である．*

証明） K_3 の対称性を考慮すると，図 18 の (A’)，(a’) のような部分グラフが G に存在するとき，K_3 での彩色は図のように定まる．従って，本命題は簡単に導ける．□

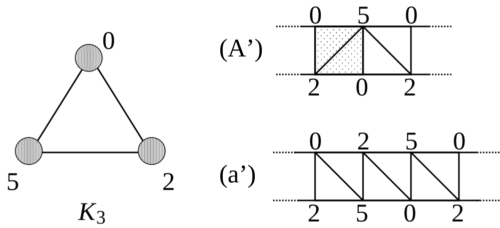

図 18: matchable 極大 2-WPG の K_3-彩色

5 まとめ

本稿では，従来の彩色問題の拡張である，H-彩色問題について研究し，特に $\overline{C_{2m+1}}$-彩色問題と m-彩色問題との関係に着目した (但し，$m \geq 2$)．chordal graph と内部極大平面グラフは，m-彩色と $\overline{C_7}$-彩色が同値であることを示した．平面グラフの $\overline{C_7}$-彩色問題が NP-完全であることを示し，$\mathcal{L}(\overline{C_7}) - \mathcal{L}(K_3)$ が含む，平面グラフのあるクラスを導出した．今後の研究課題の一つとしては，$\overline{C_{2m+1}}$-彩色と $m+1$-彩色が同値なグラフのクラスの存在を示すことが挙げられる．

参考文献

[1] G. A. Dirac, "On rigid circuit graphs," abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **25**, pp. 71-76, 1961.

[2] W. D. Fellner, "On minimal graphs," Theoretical Computer Science, **17**, pp. 237-267, 1982.

[3] M. R. Garey, D. S. Johnson, & L. Stockmeyer, "Some simplified NP-complete graph problems," Theoretical Computer Science, **1**, pp. 237-267, 1976.

[4] C. D. Godsil, & G. F. Royle, *Algebraic graph theory*, Springer, New York, 2001.

[5] P. J. Heawood, "On the four-colour map theorem," Quart. J. Pure Appl. Math., **29**, pp. 270–285, 1898.

[6] P. Hell, "Absolute planar retracts and four-color conjecture," Journal of Combinatorial Theory, **B 17**, pp. 5-10, 1974.

[7] P. Hell, & J. Nesetril, "Cohomomorphisms of graphs and hypergraphs," Math. Nachr., **87**, pp. 53-61, 1979.

[8] P. Hell, & J. Nesetril, "On the Complexity of H-Coloring," Journal of Combinatorial Theory, **B 48**, pp. 92-110, 1990.

[9] T. R. Jensen, & B. Toft, *Graph Coloring Problems*, John Wiley & Sons, New York, 1995.

[10] D. Lichtenstein, "Planar formulae and their uses," SIAM J. Comput., **11**, no. 2, pp. 329-343, 1982.

[11] H. A. Maurer, A. Salomaa, & D. Wood, "Colorings and interpretations : A connection between graphs and grammar forms," Discrete Applied Mathematics, **3**, pp. 119-135, 1981.

[12] H. A. Maurer, J. H. Sudborough, & E. Welzl, "On the complexity of the general coloring problem," Inform. and Control, **51**, pp. 123-145, 1981.

[13] D. J. Rose, "Triangulated graphs and the elimination process," J. Math. Anal., **32**, pp. 597-609, 1970.

[14] A. Uejima, "A research on Coloring problem with restrictions of adjacent colors," Master Thesis of Toyohashi Univ. of Technology, Feb., 2000.

[15] A. Uejima, H. Ito, H. Uehara, and M. Yokoyama, "Coloring problem with restrictions of adjacent colors," Intl. Trans. in Op. Res., vol. 9, no. 2, pp. 183–194, 2002.

[16] A. Uejima, and H. Ito, "On H-coloring problems with H expressed by complements of cycles, bipartite graphs, and chordal graphs," IEICE Transactions, vol. E85-A, no. 5, pp. 1026–1030, 2002.

[17] E. Welzl, "Color families are dense," Theoret. Comput. Sci., **17**, pp. 29-41, 1970.