アルゴリズム 88－10
（２００３．１．２０）

総頂点間経路長を最小にする完全Ｋ分木の階層間隣接化

澤田　清 †

あらまし　本研究では，組織内の情報伝達が最も効率的になるような追加的関係を求めることを目的として，高さ H の完全 K 分木に対して，深さ M の頂点とその子孫である深さ N の頂点との間に１辺を追加する場合に総頂点間経路長（全頂点間の最短経路の長さの総和）を最小にする問題を考えた．ここでは，総頂点間短縮経路長（辺追加前と比べて総頂点間経路長がどれだけ短縮されるかを表す）を定式化し，それを最大にする頂点深さの対 $(M,N)^*$ を解析的に求めた．その結果，$H=2,3,4,5$ の場合は $(M,N)^*=(0,2)$，$H=6,7,\cdots$ の場合は $(M,N)^*=(0,4)$ となった．

An Additional Adjacency between Two Levels in a Complete K-ary Tree Minimizing Total Path Length

Kiyoshi Sawada †

Abstract　This paper proposes a problem on an additional relation to an organization structure which is a complete K-ary tree of height H. When one edge between a node with a depth M and its descendant with a depth N is added, an optimal pair of depth $(M,N)^*$ is obtained by maximizing the total shortening path length which is the sum of shortening lengths of shortest paths between every pair of all nodes. $(M,N)^*=(0,2)$ for $H=2,3,4,5$ and $(M,N)^*=(0,4)$ for $H=6,7,\cdots$ are shown.

1.　はじめに

企業などの組織の構造には種々のタイプがあるが [6, 13]，それらの基本となるものは上下間の一元的な命令系統に基づく階層構造（ピラミッド組織と呼ばれている [11, 12]）である．しかし，他部門の協力を必要とするような場合に柔軟に対応するためには，上下間以外の情報伝達を効率的に行う必要があり，そのためには事前に上下間以外の関係形成を行うことが有効であると考えられる．企業などでは，会議，集合研修，社内プロジェクトなどにより，上下間以外での関係形成が行われている．また，部門を超えた個人的なつながりも，組織内の情報伝達に役立っていると考えられる．しかし，上下間以外でどのような関係形成を行えば，組織全体の情報伝達が最も効率的になるかという問題について，理論的にアプローチした研究はほとんどない．

ピラミッド組織構造は，構成主体を頂点に，上下の主体間関係を辺に対応させると，根付き木であると考えることができる．このとき，各頂点間の経路は組織内の主体間の関係をたどる情報伝達経路に対応している．また，根付き木に辺を追加することは，直接の上下の主体間関係以外の追加的関係の形成に相当する．

グラフに辺を追加する問題として，グラフの辺付加問題（Graph Augmentation Problems）がある．これは，与えられた性質を満足するように辺を追加する場合に，辺を追加するコストの総和を最小にす

†流通科学大学 情報学部 経営情報学科
Department of Information and Management Science, Faculty of Information Science,
University of Marketing and Distribution Sciences

る問題である．特に，与える性質を辺連結度や点連結度とするものは盛んに研究が行われており，通信ネットワークの設計問題などに応用されている [4, 5, 8, 14, 16]．一方，本研究の目的は，ピラミッド組織構造に対して，組織全体の情報伝達が最も効率的になるような追加的関係を求めることである．これは，根付き木に対して辺を追加する場合に，全頂点間の最短経路の長さの総和（以後，総頂点間経路長と呼ぶ）を最小にする追加位置を求めることであると考えることができる．

宇野 [15] は，高さ 3 の完全 2 分木に辺を 1 本追加したときの総頂点間経路長を追加位置ごとに求め，組織全体の情報伝達効率の改善度合いを追加位置により比較している．しかし，そこでは，完全 2 分木を特定の高さ 3 に限定しており，高さを一般化した完全 2 分木については議論されていない．そこで，筆者ら [9] は，一般化した高さをもつ完全 2 分木型の組織構造を対象とした 3 つの関係追加モデル，(i) 同じ深さ（同一階層）の 2 頂点間に辺を 1 本追加する，(ii) 同じ深さの全兄弟間に辺を追加する，(iii) 同じ深さの全頂点間に辺を追加する，を提案し，各モデルについて総頂点間経路長を最小にする追加辺の深さを解析的に求めた．また，より一般的な組織構造に適用することを意図して，完全 2 分木を完全 K 分木 $(K=2,3,\cdots)$ に一般化して，上の 3 つのモデルについて総頂点間経路長を最小にする追加深さを求めた．ここで，完全 K 分木は，すべての葉の深さが同じで，かつすべての内部頂点の次数が K である K 分木を指す．深さは，根からその頂点までの経路の長さを表す．また，兄弟は同じ親をもつ頂点を意味する．上述したモデル (i) は組織内の同じ層での一対一の追加的な関係形成（個人的なつながりなど）に，(ii) は組織内の同一階層の中で，同じ上位構成主体（上司など）を持つもの同士の追加的な関係形成（部門内会議など）に相当する．また，(iii) は組織内の同じ層全体での追加的な関係形成（集合研修や会合など）を行う場合に対応する．

本研究では，高さ $H\,(H=2,3,\cdots)$ の完全 K 分木の，深さ $M\,(M=0,1,\cdots,H-2)$ の頂点と，その子孫である深さ $N\,(N=M+2,M+3,\cdots,H)$ の頂点との間に 1 辺を追加する場合に，総頂点間経路長を最小にする頂点深さの対 $(M,N)^*$ を求めることを考える．ここで扱う問題は，完全 K 分木型の構造を持つ組織内の直系の上位層（上司）と下位層（部下）との間に追加的な関係形成を行う場合に，どの層とどの層が関係を結ぶのが最も効果的であるかという問題に対応している．

完全 K 分木の 2 頂点 v_i と $v_j\,(i,j=1,2,\cdots,(K^{H+1}-1)/(K-1))$ の間の最短経路の長さを $l_{i,j}$ とすると（ただし $l_{i,j}=l_{j,i}$，$l_{i,i}=0$），$\sum_{i<j} l_{i,j}$ は総頂点間経路長を表す．また，上述したような辺追加後の 2 頂点 v_i，v_j 間の最短経路の長さを $l'_{i,j}$ とすると，$l_{i,j}-l'_{i,j}$ は辺追加により 2 頂点間の最短経路の長さがどれだけ短縮されたかを表す．ここでは，これを 2 頂点間の短縮経路長と呼ぶ．さらに，全頂点間の短縮経路長の総和 $\sum_{i<j}(l_{i,j}-l'_{i,j})$ を，総頂点間短縮経路長と定義する．

2. で，高さ H の完全 K 分木の深さ M の頂点とその子孫である深さ N の頂点との間に 1 辺を追加したときの総頂点間短縮経路長を定式化する．3. では，M を与えた場合の総頂点間短縮経路長を最大にする（すなわち，総頂点間経路長を最小にする）頂点深さ N^* を解析的に求める．さらに，4. で，総頂点間短縮経路長を最大にする頂点深さの対 $(M,N)^*$ を求める．

2. 総頂点間短縮経路長の定式化

辺を追加することにより隣接化される深さ M の頂点と深さ N の頂点をそれぞれ v_M，v_N とし，v_N の子孫の集合を V_1 とする．ただし，子孫はその頂点自身も含む．また，v_M の K 個の部分木のうち v_N を含む部分木の頂点集合から V_1 を除いた頂点の集合を V_2 と書く．また，V_1，V_2 以外の頂点の集合を V_3 とする．

このとき，V_1 と V_3 の頂点間の短縮経路長の総和は，

$$A_H(M,N) = W(H-N)\Big\{W(H) - W(H-M-1)\Big\}(N-M-1) \tag{1}$$

と表される．ただし，$W(h)\,(h=0,1,2,\cdots)$ は高さ h の完全 K 分木の頂点数を表す．次に，V_1 と V_2 の頂点間と，V_3 と V_2 の頂点間の短縮経路長の総和は，それぞれ，

$$B_H(M,N) \;=\; W(H-N)\sum_{i=1}^{\left[\frac{N-M}{2}\right]-1}\Big\{(K-1)W(H-M-i-1)+1\Big\}(N-M-2i-1)\,, \tag{2}$$

$$C_H(M,N) \;=\; \Big\{W(H) - W(H-M-1)\Big\}\sum_{i=1}^{\left[\frac{N-M}{2}\right]-1}\Big\{(K-1)W(H-N+i-1)+1\Big\}(N-M-2i-1) \tag{3}$$

で与えられる．ただし，$[\cdot]$ は $\cdot$ を超えない最大の整数を表す．また，$\sum_{i=1}^{0}\cdot = 0$ と定義する．さらに，V_2 内の頂点間の短縮経路長の総和は，

$$\begin{aligned} D_H(M,N) \;=\; & \sum_{i=1}^{\left[\frac{N-M}{2}\right]-2}\Big\{(K-1)W(H-M-i-1)+1\Big\} \\ & \times \sum_{j=1}^{\left[\frac{N-M}{2}\right]-i-1}\Big\{(K-1)W(H-N+j-1)+1\Big\}(N-M-2i-2j-1) \end{aligned} \tag{4}$$

となる．ただし，$\sum_{i=1}^{-1}\cdot = 0$ と定義する．

以上より，総頂点間短縮経路長 $S_H(M,N)$ は，

$$\begin{aligned} & S_H(M,N) \\ &= A_H(M,N) + B_H(M,N) + C_H(M,N) + D_H(M,N) \\ &= W(H-N)\Big\{W(H) - W(H-M-1)\Big\}(N-M-1) \\ &\quad + W(H-N)\sum_{i=1}^{\left[\frac{N-M}{2}\right]-1}\Big\{(K-1)W(H-M-i-1)+1\Big\}(N-M-2i-1) \\ &\quad + \Big\{W(H) - W(H-M-1)\Big\}\sum_{i=1}^{\left[\frac{N-M}{2}\right]-1}\Big\{(K-1)W(H-N+i-1)+1\Big\}(N-M-2i-1) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\left[\frac{N-M}{2}\right]-2}\Big\{(K-1)W(H-M-i-1)+1\Big\} \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{\left[\frac{N-M}{2}\right]-i-1}\Big\{(K-1)W(H-N+j-1)+1\Big\}(N-M-2i-2j-1) \end{aligned} \tag{5}$$

と定式化される．また，式 (5) に

$$W(h) = \frac{K^{h+1}-1}{K-1} \tag{6}$$

を代入すると，

$$\begin{aligned}
S_H(M,N) \quad = \quad & \frac{1}{(K-1)^2}\left(K^{H-N+1}-1\right)\left(K^{H+1}-K^{H-M}\right)(N-M-1) \\
& + \frac{1}{K-1}\left(K^{H-N+1}-1\right)\sum_{i=1}^{[\frac{N-M}{2}]-1} K^{H-M-i}(N-M-2i-1) \\
& + \frac{1}{K-1}\left(K^{H+1}-K^{H-M}\right)\sum_{i=1}^{[\frac{N-M}{2}]-1} K^{H-N+i}(N-M-2i-1) \\
& + \sum_{i=1}^{[\frac{N-M}{2}]-2} K^{H-M-i}\sum_{j=1}^{[\frac{N-M}{2}]-i-1} K^{H-N+j}(N-M-2i-2j-1) \qquad (7)
\end{aligned}$$

となる．

3.　最適子孫深さ

ここでは，M を与えた場合の総頂点間短縮経路長を最大にする（すなわち，総頂点間経路長を最小にする）頂点深さ N^* を解析的に求める．

深さ N を $N = M+2L$（ただし，$L = 1, 2, \cdots, [\frac{H-M}{2}]$）と $N = M+2L+1$（ただし，$L = 1, 2, \cdots, [\frac{H-M-1}{2}]$）の２通りの場合に分けて考えると，$S_H(M, M+2L)$ と $S_H(M, M+2L+1)$ の関係について，次の定理１が成り立つ．

定理 1

$$S_H(M, M+2L) \ > \ S_H(M, M+2L+1) \qquad (8)$$

ただし，$L = 1, 2, \cdots, [\frac{H-M-1}{2}]$ である．

証明　式 (7) に $N = M+2L$，$N = M+2L+1$ を代入して，$S_H(M, M+2L) - S_H(M, M+2L+1)$ を計算すると，

$$\begin{aligned}
& S_H(M, M+2L) - S_H(M, M+2L+1) \\
& \quad = \ \frac{1}{(K-1)^2}\left(K^{H+1}-K^{H-M}\right)\left[K^{H-M-2L}\{K(2L-1)-2L\}+1\right] \\
& \qquad + \frac{1}{K-1}\sum_{i=1}^{L-1} K^{H-M-i}\left[K^{H-M-2L}\{K(2L-2i-1)-(2L-2i)\}+1\right] \\
& \qquad + \frac{1}{K-1}\left(K^{H+1}-K^{H-M}\right)\sum_{i=1}^{L-1} K^{H-M-2L+i-1}\{K(2L-2i-1)-(2L-2i)\} \\
& \qquad + \sum_{i=1}^{L-2} K^{H-M-i}\sum_{j=1}^{L-i-1} K^{H-M-2L+j-1}\{K(2L-2i-2j-1)-(2L-2i-2j)\} \ > \ 0 \qquad (9)
\end{aligned}$$

となることから，$S_H(M, M+2L) > S_H(M, M+2L+1)$ が成り立つ．　□

定理１より，M が与えられた場合に総頂点間短縮経路長 $S_H(M,N)$ を最大にする N^* を求めるためには，$N = M+2L$ の場合だけを考えればよい．すなわち，$S_H(M, M+2L)$ を最大にする L^* を求めて，$N^* = M+2L^*$ とすればよい．

$$R_{H,M}(L) = S_H(M, M+2L) \tag{10}$$

とおいて，整理すると，

$$\begin{aligned}
&R_{H,M}(L)\\
&= \frac{1}{(K-1)^3}\Big\{K^{2H-2M-3L+2} - 2\cdot K^{2H-M-2L+2} - K^{2H-2M-L+1} + (K+1)K^{2H-M-L+1}\\
&\quad - (K+1)K^{H-M-L+1} + 2\cdot K^{H-M+1} - (2L-1)(K-1)K^{H+1}\Big\}
\end{aligned} \tag{11}$$

が得られる．以下では，$R_{H,M}(L)$ を最大にする $L\,(L=1,2,\cdots,[\frac{H-M}{2}])$ を求める．

$R_{H,M}(L)$ の L に関する差分を $\Delta R_{H,M}(L)$ とおくと，

$$\begin{aligned}
&\Delta R_{H,M}(L)\\
&\equiv R_{H,M}(L+1) - R_{H,M}(L)\\
&= \frac{1}{(K-1)^2}\Big[\Big\{-(K^2+K+1)K^{-2M-3L-1} + 2(K+1)K^{-M-2L} + K^{-2M-L} - (K+1)K^{-M-L}\Big\}K^{2H}\\
&\quad + \Big\{(K+1)K^{-M-L} - 2K\Big\}K^H\Big]
\end{aligned} \tag{12}$$

を得る．ただし，$L=1,2,\cdots,[\frac{H-M}{2}]-1$ である．ここで，式 (12) の K^H を

$$x = K^H \tag{13}$$

とおくと，実数 x に関する 2 次関数 $T_{L,M}(x)$ が得られる．

$$\begin{aligned}
&T_{L,M}(x)\\
&= \frac{1}{(K-1)^2}\Big[\Big\{-(K^2+K+1)K^{-2M-3L-1} + 2(K+1)K^{-M-2L} + K^{-2M-L} - (K+1)K^{-M-L}\Big\}x^2\\
&\quad + \Big\{(K+1)K^{-M-L} - 2K\Big\}x\Big]
\end{aligned} \tag{14}$$

以下では，式 (14) の x^2 の係数が正の場合と負の場合に分類して議論する．

(i) $K=2$ かつ $L=1$ のとき，x^2 の係数は正となる．すなわち，$T_{L,M}(x)$ は下に凸である．

(ii) $K=2$ かつ $L=2,3,\cdots,[\frac{H-M}{2}]-1$，および $K=3,4,\cdots$ のときは，x^2 の係数は負となる．すなわち，$T_{L,M}(x)$ は上に凸である．

まず，(i) の場合について考える．式 (14) に，$K=2$，$L=1$ を代入して整理すると，

$$T_{L,M}(x) = 2^{-2M-4}x^2 + \Big(3\cdot 2^{-M-1} - 4\Big)x \tag{15}$$

となる．ここで，$T_{L,M}(x)=0$ を解くと，$x=0,\ 2^{2M+6}-3\cdot 2^{M+3}$ を得る．このとき，$2^{2M+5} < 2^{2M+6} - 3\cdot 2^{M+3} < 2^{2M+6}$ より，$0 < x \le 2^{2M+5}$ のとき $T_{L,M}(x) < 0$，$x \ge 2^{2M+6}$ のとき $T_{L,M}(x) > 0$ となる．すなわち，$H \le 2M+5$ のとき $\Delta R_{H,M}(1) < 0$，$H \ge 2M+6$ のとき $\Delta R_{H,M}(1) > 0$ が成り立つ．

(ii) の場合，

$$T_{L,M}(0) = 0\,, \tag{16}$$

$$T'_{L,M}(0) = \frac{1}{(K-1)^2}K^{-L+1}\Big(K^{-M} + K^{-M-1} - 2K^L\Big) < 0 \tag{17}$$

より，$x > 0$ のとき $T_{L,M}(x) < 0$ となる．したがって，$K = 2$ かつ $L = 2, 3, \cdots, [\frac{H-M}{2}] - 1$ のとき，または $K = 3, 4, \cdots$ のとき，$\Delta R_{H,M}(L) < 0$ が成り立つ．

以上の解析結果より，次の定理 2 が得られる．

定理 2

(1) $K = 2$ のとき，$H \leq 2M + 5$ ならば $N^* = M + 2$，$H \geq 2M + 6$ ならば $N^* = M + 4$ である．

(2) $K = 3, 4, \cdots$ とき，$N^* = M + 2$ である．

証明

(1) $H = M + 2$ および $H = M + 3$ の場合，$L = 1$ のみであるので $L^* = 1$，すなわち $N^* = M + 2$ となる．$M+4 \leq H \leq 2M+5$ の場合，$L = 1, 2, \cdots, [\frac{H-M}{2}] - 1$ に対して $\Delta R_{H,M}(L) < 0$ より $L^* = 1$ であるので，$N^* = M + 2$ となる．$H \geq 2M + 6$ の場合，$\Delta R_{H,M}(1) > 0$ であり，かつ $L = 2, 3, \cdots, [\frac{H-M}{2}] - 1$ に対して $\Delta R_{H,M}(L) < 0$ となることから，$L^* = 2$，すなわち $N^* = M + 4$ となる．

(2) $H = M + 2$ および $H = M + 3$ の場合，$L = 1$ のみであるので $L^* = 1$，すなわち $N^* = M + 2$ となる．$H \geq M + 4$ の場合，$L = 1, 2, \cdots, [\frac{H-M}{2}] - 1$ に対して $\Delta R_{H,M}(L) < 0$ より $L^* = 1$ であるので，$N^* = M + 2$ となる． □

4. 最適頂点対深さ

ここでは，総頂点間短縮経路長を最大にする（すなわち，総頂点間経路長を最小にする）頂点深さの対 $(M, N)^*$ を求める．

まず，$N = M + 2$，および $N = M + 4$ のそれぞれの場合について，総頂点間短縮経路長を最大にする M^* を求める．

$N = M + 2$ のときの総頂点間短縮経路長を $Q_{1,H}(M)$ とおくと，

$$\begin{aligned} Q_{1,H}(M) &\equiv S_H(M, M+2) \\ &= R_{H,M}(1) \\ &= \frac{1}{(K-1)^2}\left(-K^{2H-2M-1} + K^{2H-M} + K^{H-M} - K^{H+1}\right) \end{aligned} \tag{18}$$

を得る．ただし，$M = 0, 1, \cdots, H - 2$ $(H = 2, 3, \cdots)$ である．

$Q_{1,H}(M)$ の M に関する差分を $\Delta Q_{1,H}(M)$ とおくと，

$$\begin{aligned} \Delta Q_{1,H}(M) &\equiv Q_{1,H}(M+1) - Q_{1,H}(M) \\ &= \frac{1}{K-1}\left\{(K+1)K^{2H-2M-3} - K^{2H-M-1} - K^{H-M-1}\right\} \ < \ 0 \end{aligned} \tag{19}$$

となる．ただし，$M = 0, 1, \cdots, H - 3$ である．

また，$N = M + 4$ のときの総頂点間短縮経路長を $Q_{2,H}(M)$ とおくと，

$$\begin{aligned} Q_{2,H}(M) &\equiv S_H(M, M+4) \\ &= R_{H,M}(2) \\ &= \frac{1}{(K-1)^2}\Big\{-(K^2+K+1)K^{2H-2M-4} + (K+2)K^{2H-M-2} + (2K+1)K^{H-M-1} \\ &\quad - 3K^{H+1}\Big\} \end{aligned} \tag{20}$$

を得る．ただし，$M=0,1,\cdots,H-4$ $(H=4,5,\cdots)$ である．

$Q_{2,H}(M)$ の M に関する差分を $\Delta Q_{2,H}(M)$ とおくと，

$$\begin{aligned}\Delta Q_{2,H}(M) &\equiv Q_{2,H}(M+1)-Q_{2,H}(M)\\ &= \frac{1}{K-1}\Big\{(K+1)(K^2+K+1)K^{2H-2M-6}-(K+2)K^{2H-M-3}-(2K+1)K^{H-M-2}\Big\}\\ &< 0 \end{aligned} \quad (21)$$

となる．ただし，$M=0,1,\cdots,H-5$ である．

以上より，次の定理 3 が得られる．

定理 3

(1) $N=M+2$ のとき，$M^*=0$ である．

(2) $N=M+4$ とき，$M^*=0$ である．

証明

(1) $H=2$ の場合，$M=0$ のみであるので $M^*=0$ である．$H=3,4,\cdots$ の場合，$\Delta Q_{1,H}(M)<0$ より，$M^*=0$ となる．

(2) $H=4$ の場合，$M=0$ のみであるので $M^*=0$ である．$H=5,6,\cdots$ の場合，$\Delta Q_{2,H}(M)<0$ より，$M^*=0$ となる． □

定理 2，定理 3 の結果より，次の定理 4 が得られる．

定理 4

(1) $K=2$ のとき，$H=2,3,4,5$ ならば $(M,N)^*=(0,2)$，$H=6,7,\cdots$ ならば $(M,N)^*=(0,4)$ である．

(2) $K=3,4,\cdots$ とき，$(M,N)^*=(0,2)$ である．

証明

(1) 定理 2 (1) より $K=2$ のとき $H\leq 2M+5$ ならば $N^*=M+2$ であり，また定理 3 (1) より $N=M+2$ のとき $M^*=0$ であるので，$K=2$ のとき $H=2,3,4,5$ ならば $(M,N)^*=(0,2)$ となる．定理 2 (1) より $K=2$ のとき $H\geq 2M+6$ ならば $N^*=M+4$ であり，また定理 3 (2) より $N=M+4$ のとき $M^*=0$ であるので，$K=2$ のとき $H=6,7,\cdots$ ならば $(M,N)^*=(0,4)$ となる．

(2) 定理 2 (2) より $K=3,4,\cdots$ とき $N^*=M+2$ であり，また定理 3 (1) より $N=M+2$ のとき $M^*=0$ であるので，$K=3,4,\cdots$ のとき $(M,N)^*=(0,2)$ となる． □

5. おわりに

本研究では，高さ H の完全 K 分木型ピラミッド組織構造を対象として，組織全体の情報伝達が最も効率的になるような追加的関係を求める目的で，深さ M の頂点とその子孫である深さ N の頂点との間に 1 辺を追加した場合の総頂点間短縮経路長を定式化し，それを最大にする頂点対の深さ $(M,N)^*$ を解析的に求めた．その結果，$K=2$ のとき，$H=2,3,4,5$ ならば $(M,N)^*=(0,2)$，$H=6,7,\cdots$ ならば $(M,N)^*=(0,4)$ となった．また，$K=3,4,\cdots$ のときは，H に関係なく $(M,N)^*=(0,2)$ となった．

参考文献

[1] A. V. Aho, J. E. Hopcroft, and J. D. Ullman, Data Structures and Algorithms, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1983.

[2] 浅野孝夫, 情報の構造［上］, 日本評論社, 東京, 1994.

[3] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, and R. L. Rivest, Introduction to Algorithms, MIT Press, Cambridge, Mass., 1990.

[4] K. P. Eswaran and R. E. Tarjan, "Augmentation problems," SIAM J. Computing, vol.5, no.4, pp.653–665, Dec. 1976.

[5] A. Frank, "Augmenting graphs to meet edge-connectivity requirements," SIAM J. Discrete Mathematics, vol.5, pp.25–53, 1992.

[6] A. C. Hax and N. S. Majluf, "Organizational design: a survey and an approach," Operations Research, vol.29, no.3, pp.417–447, May–June 1981.

[7] H. Koontz, C. O'Donnell, and H. Weihrich, Management, 7th ed., McGraw-Hill, New York, 1980.

[8] H. Nagamochi, "Recent development of graph connectivity augmentation algorithms," IEICE Trans. Information & Systems, vol.E83-D, no.3, pp.372–383, March 2000.

[9] 澤田 清, 宇野 斉, "完全 2 分木型組織構造への関係追加モデル," 日本応用数理学会論文誌, vol.10, no.4, pp.335–346, 2000.

[10] R. Sedgewick, Algorithms in C, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1990.

[11] N. Takahashi, "Sequential analysis of organization design: a model and a case of Japanese firms," European Journal of Operational Research, vol.36, pp.297–310, 1988.

[12] 高橋伸夫, 組織の中の決定理論, 朝倉書店, 東京, 1993.

[13] 高柳 暁（編）, 現代経営組織論, 中央経済社, 東京, 1997.

[14] S. Ueno, Y. Kajitani, and H. Wada, "Minimum augmentation of a tree to a k-edge-connected graph," Networks, vol.18, pp.19–25, 1988.

[15] 宇野 斉, "組織内コミュニケーション・パスの追加効果について," 組織科学, vol.27, no.2, pp.73–86, 1993.

[16] T. Watanabe and A. Nakamura, "Edge-connectivity augmentation problems," Journal of Computer and System Sciences, vol.35, pp.96–144, 1987.