

# ハイパーキューブ族のネットワークにおける適応型故障診断について

岡下 綾<sup>†</sup>      荒木 徹<sup>††</sup>      柴田 幸夫<sup>†\*\*</sup>

{aya,shibata}@msc.cs.gunma-u.ac.jp, arakit@cis.iwate-u.ac.jp

<sup>†</sup>群馬大学 工学部 情報工学科

〒376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1

<sup>††</sup>岩手大学 工学部 情報システム工学科

〒020-8551 岩手県盛岡市上田 4-3-5

## 概要

多数のプロセッサが結合されたシステムにおいて、故障したプロセッサを自動的に検出するためのモデルとして、システムレベルの故障診断が研究されている。これは、各プロセッサが他のプロセッサの状態を検査し、その検査結果を解析することによりシステム内の故障プロセッサを特定するものである。本稿では、ハイパーキューブ族のいくつかのネットワークを少ない並列ラウンド数で適応型故障診断を行うアルゴリズムについて報告する。

キーワード：システムレベルの故障診断，適応型故障診断，ハイパーキューブ，ハイパーキューブ族，ラウンド数

## Adaptive diagnosis of variants of hypercubes with small number of parallel testing rounds

Aya Okashita<sup>†</sup>      Toru Araki<sup>††</sup>      Yukio Shibata<sup>†\*\*</sup>

{aya,shibata}@msc.cs.gunma-u.ac.jp, arakit@cis.iwate-u.ac.jp

<sup>†</sup>Department of Computer Science, Gunma University

1-5-1 Tenjin-cho, Kiryu, Gunma 376-8515

<sup>††</sup>Department of Computer and Information Science, Iwate University

4-3-5 Ueda, Morioka, Iwate 020-8551

## Abstract

System-level fault diagnosis deals with the problem of identifying faulty nodes(processors) in a multiprocessor system. Each node is faulty or fault-free, and it can test other nodes in the system, and outputs of the test result are unreliable if the node is faulty. In this paper, we prove that some variants of hypercubes are adaptively diagnosed with small constant number of parallel testing rounds, where each processor participates in at most one test of each round.

**Keywords:** system-level diagnosis, adaptive diagnosis, hypercube, variants of hypercube, parallel testing rounds

\*\* この研究は栢森情報科学振興財団の助成を受けて遂行された。

## 1 はじめに

多数のプロセッサが結合されているネットワークシステムにおいては、システム内に発生する故障の可能性が高くなるため、その耐故障化が重要な問題となる。システムの耐故障性に関して、故障したプロセッサを自動的に識別するシステムレベルの故障診断が、システムの信頼性を高めるための重要な問題の一つとして研究が行われている。システムレベルの故障診断についての研究は、Preparata ら [1] によって提案されたモデルにその端を発する。これは、システム内の各プロセッサが互いの状態を検査し、その検査結果を解析することにより、故障プロセッサを識別するというものである。ここで、正常なプロセッサが行った検査の結果は信頼できるが、故障したプロセッサの検査結果は信頼できないものと仮定する。このモデルは現在 PMC モデルと呼ばれている。

PMC モデルでは、システムは無向グラフ  $G = (V, E)$  によってモデル化される。ここで、システム内の各ユニット（プロセッサ）とユニット間の通信リンクは、それぞれ  $G$  の頂点と辺に対応する。各ユニットは、通信リンクによって隣接するユニットの状態を検査することができると仮定する。ユニット  $u$  が  $v$  を検査することを、頂点の順序対  $(u, v)$  で表す。検査  $(u, v)$  の結果を、 $u$  が  $v$  を正常と判断したとき 0、故障と判断したとき 1 とし、 $r(u, v)$  の値で表す。

検査  $(u, v)$  の集合  $A$  を、システム  $G = (V, E)$  の検査割り当てと呼ぶ。システムの検査割り当ては、有向グラフ  $\vec{G} = (V, A)$  によって表される。すなわち、弧  $(u, v) \in A$  は、ユニット  $u$  が  $v$  を検査することを表す。

システムは、故障の数が  $t$  を超えないという仮定のもとで、全ての故障ユニットを識別できるような検査割り当てが存在するとき、同時  $t$  診断可能であるという。システムが同時  $t$  診断可能であるための必要十分条件は、Hakimi and Amin[2] によって与えられた。

同時  $t$  診断は、与えられたシステムに対して、検査割り当てがあらかじめ定められており、全ての検査を実行した後に故障ユニットの識別を行うものであった。この方法では、システム全体で少なくとも  $nt$  回の検査を必要とする。それに対して、Nakajima[3] に

よって提案された適応型故障診断では、検査割り当てをいくつかのステップに分けて実行する。ここで各ステップで実行される検査は、以前の検査結果を解析することにより決定される。Blecher[4] は、システムが完全グラフで表される場合に検査数  $n + t - 1$  で同時  $t$  診断が可能であることを証明し、さらに、この検査数が最小であることを示した。適応型故障診断の評価には、検査数の他にラウンド数を用いる。1 回の検査を実行するために 1 ラウンド必要であると仮定する。また、二つの検査  $(u, v), (x, y)$  は、 $u, v, x, y$  が全て異なるときのみ並列に実行できると仮定する。Beigel ら [5] は、完全グラフで表されるネットワーク上では定数ラウンドで同時  $t$  診断が可能であることを示した。上記の研究では、完全グラフが考察の中心であったが、近年プロセッサ間の結合が制限されたネットワークにおける適応型故障診断についても、いくつかの研究が発表されている。Kranakis ら [6] は、木やサイクルなどのネットワークにおいて、最適、または最適に近い検査数で実行できるアルゴリズムを提案した。著者ら [7] は、ハイパーキューブと良く似た性質を持つ wrapped butterfly ネットワークに対して、最適な検査数と定数ラウンドのアルゴリズムを示した。Feng ら [8] はハイパーキューブに対して検査数  $2^n(\lceil \log n \rceil + 2)$ 、ラウンド数  $n + 4$  のアルゴリズムを示した。Kranakis and Pelc[9] はその結果を改良し、検査数  $2^n + 3n/2$ 、高々 11 ラウンドのアルゴリズムを与えた。Björklund[10] はハイパーキューブにおいて最適な検査数  $2^n + n - 1$  で全ての故障を識別できることを示した。さらに高々 4 ラウンドで診断を行うアルゴリズムを与えている。

本報告では、ハイパーキューブ族のネットワーク：crossed cube[11], möbius cube[12], twisted cube[13], enhanced cube[14] に対する適応型診断アルゴリズムを提案する。

## 2 準備

$n$  次元ハイパーキューブ  $Q_n$  は頂点集合として  $Z_2^n$  を持ち、頂点  $x = x_n x_{n-1} \dots x_1$ ,  $x_i \in Z_2$ ,  $i = 1, \dots, n$ , は  $n$  個の頂点  $x_n \dots \bar{x}_j \dots x_1$ ,  $j = 1, \dots, n$ , と隣接する。

補題 2.1  $n$  次元ハイパーキューブ  $Q_n$  の任意の頂点集合  $U$ ,  $|U| \leq n$ , に対して、 $U$  における各頂点は  $U$

に属さない異なる隣接頂点を持つ。■

補題 2.2  $U, |U| \leq 2n - 1$ , を  $n \geq 4$  に対する  $n$  次元ハイパーキューブ  $Q_n$  の頂点集合とする。  $U$  における高々一つの頂点を除いた全ての頂点は,  $U$  に属さない異なる隣接頂点を持つ。

証明.  $n$  に関する帰納法で証明する。  $n = 4$  のとき,  $m$  に関する場合分けにより命題が成り立つ。

$n \geq 5$  に対して,  $Q_n$  をそれぞれが  $Q_{n-1}$  と同型であるような二つの部分グラフ  $Q^0, Q^1$  に分解する。  $U_i = U \cap V(Q^i), i = 0, 1$ , とする。一般性を失うことなく  $|U_0| \geq |U_1|$  と仮定でき, このとき  $|U_1| \leq n - 1$  である。  $|U_1| = 0$  ならば,  $U_0$  の全ての頂点は明らかに  $U_1$  上に異なる隣接頂点を持つ。  $|U_0| \leq 2n - 3$  と仮定する。帰納法の仮定より, 高々一つの頂点  $v_0$  を除く  $U_0$  の全ての頂点は  $Q^0$  上に異なる隣接頂点を持つ。  $|U_1| \leq n - 1$  なので, 補題 2.1 より,  $U_1$  上の全ての頂点は  $Q^1$  上に異なる隣接頂点を持つ。よって, このとき命題は成り立つ。  $|U_0| = 2n - 2$  かつ  $|U_1| = 1$  である場合,  $U_1 = \{v\}$  とする。以後,  $U_0$  における任意の頂点  $w$  に対して,  $w$  の  $U_1$  における隣接頂点を  $w_1$  と表す。  $v$  が  $U_0$  上の頂点と隣接しないならば,  $U$  上の全ての頂点は異なる隣接頂点を持つ。よって,  $u \in U_0$  は  $v$  と隣接すると仮定する。すなわち,  $u_1 = v$  である。このとき  $U_0$  上の各頂点  $w$  に対して,  $w \neq w'$  ならば  $m(w) \neq m(w')$  であるような  $w$  の隣接頂点  $m(w)$  を次のように割り当てることができる: (1)  $u$  が  $Q^0 \setminus U$  上に隣接点  $u'$  を持つならば, 任意の頂点  $w \in U \setminus \{u, v\}$  に対して,  $m(w) = w_1$  とし,  $m(u) = u', m(v) = u'_1$  とできる。(2)  $u$  の全ての隣接頂点が  $U$  に含まれるならば,  $u$  の近傍から  $z \in U_0$  を選択する。  $u$  と  $z$  は共通の近傍を持たず,  $|U_0 \setminus \{u, z\}| = 2n - 4$  であることから,  $z$  と隣接する頂点  $x, x \notin U_0$ , が少なくとも一つは存在する。このとき, 任意の頂点  $w \in U \setminus \{v, z\}$  に対して  $m(w) = w_1$  とし,  $m(v) = z_1, m(z) = x$  とできる。この場合,  $u$  が命題における例外の頂点となる。■

本稿で取り扱うハイパーキューブ族のネットワークは, ハイパーキューブと同じ頂点集合を持つ。

$V' \subseteq V$  に対して,  $\langle V' \rangle_G$  (または  $\langle V' \rangle_{\bar{G}}$ ) を  $V'$  によって誘導される  $G$  の (有向) 部分グラフとする。

Crossed cube は Efe[11] によって提案された。二つの 2 進列  $x = x_2x_1, y = y_2y_1$  が  $(x, y) \in \{(00, 00), (10, 10), (01, 11), (11, 01)\}$  であるならば,  $x$  と  $y$  は pair-related であるといい,  $x \sim y$  で表す。  $n$  次元 crossed cube  $CQ_n$  において, 2 頂点  $x = x_nx_{n-1} \dots x_1, y = y_ny_{n-1} \dots y_1$  が隣接するための必要十分条件は次の (1) ~ (4) の条件を満たす整数  $j, 1 \leq j \leq n$ , が存在することである: (1)  $x_n \dots x_{j+1} = y_n \dots y_{j+1}$ , (2)  $x_j \neq y_j$ , (3)  $j$  が偶数ならば  $x_{j-1} = y_{j-1}$ , (4)  $x_{2i}x_{2i-1} \sim y_{2i}y_{2i-1}, 1 \leq i \leq \lceil j/2 \rceil - 1$ 。ハイパーキューブと同様に, crossed cube は単純な再帰的構造を持つ。  $V^i = \{x \mid x_n = i\}, i = 0, 1$ , とすると,  $CQ^i = \langle V^i \rangle_{CQ_n}$  は  $CQ_{n-1}$  と同型である。さらに,  $V^0$  と  $V^1$  の間には完全マッチングが存在する [15]。

Cull[12] によって提案された  $n$  次元 möbius cube  $MQ_n$  において, 頂点  $x_nx_{n-1} \dots x_1$  は次の  $n$  個の頂点と隣接する: (1)  $x_{i+1} = 0$  ならば  $x_n \dots x_{i+1} \bar{x}_i x_{i-1} \dots x_1$ , (2)  $x_{i+1} = 1$  ならば  $x_n \dots x_{i+1} \bar{x}_i x_{i-1} \dots x_1$ 。  $i = n$  のとき,  $x_{n+1}$  を 0 とする möbius cube を  $0-MQ_n$ ,  $x_{n+1}$  を 1 とする möbius cube を  $1-MQ_n$  で表す。  $V^i = \{x \mid x = ix_{n-1} \dots x_1\}, i = 0, 1$ , とすると,  $MQ^i = \langle V^i \rangle_{MQ_n}$  は  $i-MQ_{n-1}$  と同型であり,  $V^0$  と  $V^1$  の間には完全マッチングが存在する [16]。

Twisted cube は Hilbers ら [13] により提案された。頂点  $x = x_nx_{n-1} \dots x_1$  に対して, パリティ関数  $p_i(x) = x_i \oplus x_{i-1} \oplus \dots \oplus x_1$  を定義する, ただし  $\oplus$  は排他的論理和である。  $n$  次元 twisted cube  $TQ_n$  は次のように再帰的に定義される:  $TQ_1$  は二つの頂点  $0, 1$  を持つ完全グラフである。  $n$  を 3 以上の奇数とする。  $TQ_n$  の頂点集合を  $V^{ij} = \{x_nx_{n-1} \dots x_1 \mid x_n = i \text{ かつ } x_{n-1} = j\}, (i, j) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ , に分割すると,  $TQ^{ij} = \langle V^{ij} \rangle_{TQ_n}$  は  $TQ_{n-2}$  と同型であり, これを subcube と呼ぶ。異なる subcube 間の頂点の隣接性は次のように定義される: 頂点  $x = x_nx_{n-1} \dots x_1$  は  $\bar{x}_n x_{n-1} \dots x_1$  と, (1)  $p_{n-2}(x) = 0$  ならば  $\bar{x}_n \bar{x}_{n-1} x_{n-2} \dots x_1$ , (2)  $p_{n-2}(x) = 1$  ならば  $x_n \bar{x}_{n-1} x_{n-2} \dots x_1$  と隣接する。 Twisted cube が再帰的な構造を持つことは, 定義から容易に分かる。  $V^{00}$  (または  $V^{01}$ ) と  $V^{10}$  (または  $V^{11}$ ) の間と, さらに  $V^{00} \cup V^{10}$  と  $V^{01} \cup V^{11}$  の間には完全マッチング

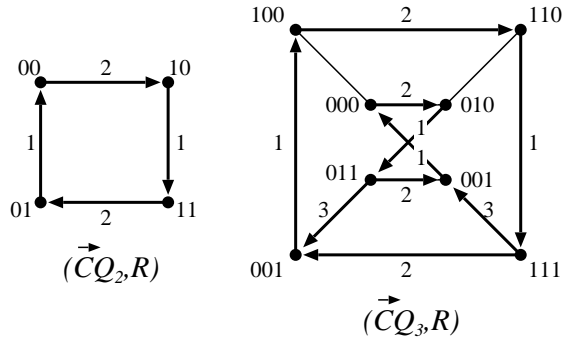


図 1:  $n = 2, 3$  に対する  $CQ_n$  の RHTS\_CQ  $(\vec{CQ}_n, R)$ .

が存在する [17].

Tzeng ら [14] により提案された enhanced  $(n, m)$ -cube,  $2 \leq m \leq n$ , は, ハイパーキューブに skip と呼ばれる辺を追加することにより構成される. 頂点  $x_n x_{n-1} \dots x_1$  は skip によって頂点  $\overline{x_n x_{n-1} \dots x_{n-m+1}} x_{n-m} \dots x_1$  と連結される, つまり, 各頂点はちょうど一つの skip によって接続される. よって, enhanced  $(n, m)$ -cube の頂点の次数は  $n+1$  である.

Björklund は  $n \geq 3$  に対する  $n$  次元ハイパーキューブ  $Q_n$  が 4 ラウンドで診断可能であることを示した [10]. アルゴリズムの方針は, *recursively hamiltonian 3-round testing scheme* (RHTS) と呼ばれる  $Q_n$  の全域有向部分グラフ  $\vec{Q}_n$  と,  $\vec{Q}_n$  の弧を 3 色で彩色する関数  $R$  の組  $(\vec{Q}_n, R)$  を構成することである. グラフ  $G = (V, E)$  の有向部分グラフ  $\vec{G} = (V', A)$  と  $V'' \subseteq V$  に対して,  $\vec{G} \upharpoonright V''$  を  $V' \cap V''$  から誘導される  $\vec{G}$  の有向部分グラフとして定義する. グラフ  $G$  の *3-round testing scheme* とは,  $G$  の全域有向グラフ  $\vec{G} = (V, A)$  と, 隣接する弧は同色で彩色しないような弧に対する彩色関数  $R: A \rightarrow \{1, 2, 3\}$  の組  $(\vec{G}, R)$  である.  $Q_n$  の全域有向部分グラフ  $\vec{Q}_n$  に対して, 3-round testing scheme  $(\vec{Q}_n, R)$  が次の (1)~(4) の条件を満たすとき *recursively hamiltonian* であるという: (1)  $n = 2$  ならば  $\vec{Q}_n$  は 4 サイクル  $\vec{C}_4$  であり, (2)  $\vec{Q}_n$  はハミルトンサイクル  $\vec{C}_n$  を含み, (3)  $n \geq 3$  に対して,  $\langle V_n^i \rangle_{Q_n} \simeq Q_{n-1}$  であるような  $Q_n$  の頂点の部分集合  $V_n^i$ ,  $i = 0, 1$ , に対して  $(\vec{Q}_n \upharpoonright V_n^0, R)$  と  $(\vec{Q}_n \upharpoonright V_n^1, R)$  は recursively hamiltonian であり, (4)  $\vec{C}_n$  上には,  $i = 0, 1$  に対して  $R(e_i) = 2$  かつ  $e_i$  に隣接するどの弧も 3 で彩色されないような端点を

共有しない二つの弧  $e_0, e_1$  が存在する.

補題 2.3 ([10])  $n \geq 2$  に対する  $n$  次元ハイパーキューブ  $Q_n$  は, RHTS  $(\vec{Q}_n, R)$  を持つ. さらに, 1 と 2 で彩色された弧集合は  $Q_n$  のハミルトンサイクルを誘導する.

### 3 Recursively hamiltonian 3-round testing scheme

本節では, ハイパーキューブ族のグラフに適した RHTS を構成する方法について述べる.

#### 3.1 Crossed cube, möbius cube

$n$  次元 crossed cube  $CQ_n$  は, 二つの  $(n-1)$  次元 crossed cube によって構成される. Crossed cube に対して RHTS を構成するために, いくつかの定義を行う.  $CQ_n$  の有向部分グラフ  $\vec{CQ}_n$  における弧  $(x, y)$  は,  $x = x_n x_{n-1} \dots x_1$  と  $y = y_n y_{n-1} \dots y_1$  が全ての  $k = 1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$  に対して  $x_{2k} x_{2k-1}, y_{2k} y_{2k-1} \in \{00, 10\}$  ならば *fine arc* であると定義する. さらに, RHTS の条件 (4) の定義を (4') に変更する. (4') 次の条件を満たすような, 少なくとも二つの異なる fine arc  $e_0 = (x, y)$ ,  $e_1 = (z, w)$  が  $C$  上に存在する: (i) 3 で彩色されたどの弧も  $e_0, e_1$  とは隣接せず, (ii)  $x_n = y_n = 0$  かつ  $z_n = w_n = 1$  である. このようにして変更された RHTS を RHTS\_CQ とする.

補題 3.1  $n \geq 2$  に対する  $n$  次元 crossed cube  $CQ_n$  は RHTS\_CQ  $(\vec{CQ}_n, R)$  を持つ.

証明.  $n$  次元 crossed cube  $CQ_n$  に対する RHTS\_CQ  $(\vec{CQ}_n, R)$  を帰納的に定義する.  $n = 2, 3$  に対する  $(\vec{CQ}_n, R)$  を図 1 に示す. 図 1 において, 弧の重みは割り当てられた彩色の色を表す. ここでは, 条件 (4') を満たす弧は  $e_0 = (000, 010)$  と  $e_1 = (100, 110)$  である.

$n \geq 4$  に対して,  $CQ_{n-1}$  に対する RHTS\_CQ  $(\vec{CQ}_{n-1}, R_{n-1})$  が存在すると仮定する.  $CQ^i$ ,  $i = 0, 1$ , を  $\{x \mid x_n = i\}$  から誘導される  $CQ_n$  の部分グラフとする.  $CQ^0$  と  $CQ^1$  における RHTS\_CQ  $(\vec{CQ}^0, R)$ ,  $(\vec{CQ}^1, R)$  に対して,  $\vec{CQ}^0 = \vec{CQ}_{n-1}$ ,  $\vec{CQ}^1$  は  $\vec{CQ}^0$  の各弧を逆向きにした有向グラフとし, 頂点  $x, y \in V(CQ_{n-1})$  に対して彩色関数  $R$  を  $R((0x, 0y)) = R_{n-1}((x, y)) = R((1y, 1x))$  とする.

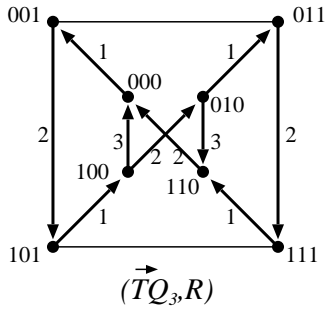


図 2:  $TQ_3$  に対する RHTS\_TQ  $(\vec{TQ}_3, R)$  .

RHTS\_CQ の定義から, 条件 (4') を満たすような  $\vec{CQ}^i, i = 0, 1$ , のハミルトンサイクルにおいて, 異なる二つの fine arc  $e_0, e_1$  が存在する.  $x = x_{n-1} \dots x_1, y = y_{n-1} \dots y_1, x_{n-1} = y_{n-1} = 1$ , とし,  $e_0^1 = (0x, 0y)$  とする. このとき, 弧  $e_1^1 = (1y, 1x)$  は  $\vec{CQ}^1$  に含まれ, かつ  $R(e_0^1) = R(e_1^1) = 2$  であり,  $e_0^1$  と  $e_1^1$  は 3 で彩色されたどの弧とも隣接しない.  $(x, y)$  は  $CQ_{n-1}$  において fine arc なので,  $0x$  が  $1x$  と隣接し, かつ  $0y$  が  $1y$  と隣接することは容易に分かる. よって, 弧  $(0x, 1x)$  と  $(1y, 0y)$  に対して,  $R((0x, 1x)) = R((1y, 0y)) = 3$  とすると, 結果として得られるグラフ  $\vec{CQ}_n = \vec{CQ}^0 \cup \vec{CQ}^1 \cup \{(0x, 1x), (1y, 0y)\}$  はハミルトニアンである.  $\vec{CQ}^0$  と  $\vec{CQ}^1$  における弧  $e_0$  にそれぞれ対応する弧  $e_0^0$  と  $e_0^1$  が fine arc であることは容易に示される. よって,  $\vec{CQ}_n$  は条件 (4') を満たす少なくとも二つの弧を持つ. 故に,  $(\vec{CQ}_n, R)$  は RHTS\_CQ である. ■ Möbius cube に対する RHTS(RHTS\_MQ) は crossed cube と同様の方法により構成できる.

補題 3.2  $n \geq 2$  に対する  $n$  次元 möbius cube  $MQ_n$  は RHTS\_MQ を持つ. ■

### 3.2 Twisted cube

$n$  次元 twisted cube  $TQ_n$  は四つの  $TQ_{n-2}$  によって構成される. よって, ハイパーキューブに関する RHTS の定義の条件 (1),(3),(4) を次のように変更し, RHTS\_TQ  $(\vec{TQ}_n, R)$  とする: (1'')  $n = 3$  に対して,  $\langle V^{00} \cup V^{10} \rangle_{\vec{TQ}_n}$  と  $\langle V^{01} \cup V^{11} \rangle_{\vec{TQ}_n}$  は長さ 4 のサイクルである, (3'')  $n \geq 5$  に対して,  $\langle V^{ij} \rangle_{\vec{TQ}_{n-2}}$  はハミルトンサイクルを持つ, (4'') 次のような性質を持つ弧  $e_1$  と  $e_2$  が存在する:  $e_1 = (x, y)$  とすると,  $i = 1, 2$  に対して  $R(e_i) = 2$  かつ,  $e_i$  は 3 で彩色され

た弧と隣接せず,  $p_n(y) = 0$ .

補題 3.3 奇数である  $n \geq 3$  に対して  $n$  次元 twisted cube  $TQ_n$  は RHTS\_TQ  $(\vec{TQ}_n, R)$  を持つ.

証明.  $n$  に関する帰納法により証明する.  $n = 3$  に対して,  $(\vec{TQ}_3, R)$  を図 2 に表す. 弧  $e_1 = (001, 101)$  と  $e_2 = (011, 111)$  は条件 (4'') を満たす.

奇数である  $n \geq 5$  に対して,  $TQ^{ij}$  を  $2^{n-2}$  個の頂点  $\{x \mid x_n = i, x_{n-1} = j\}$  によって誘導される  $TQ_n$  の部分グラフとする. 帰納法の仮定から,  $TQ_{n-2}$  は RHTS\_TQ  $(\vec{TQ}_{n-2}, R_{n-2})$  を持つ.  $(\vec{TQ}^{ij}, R)$  を次の条件 (i),(ii) を共に満たす  $TQ^{ij}$  の RHTS\_TQ とする. (i)  $\vec{TQ}^{00}$  と  $\vec{TQ}^{01}$  は  $\vec{TQ}_{n-2}$  であり, (ii)  $\vec{TQ}^{10}$  と  $\vec{TQ}^{11}$  は  $\vec{TQ}_{n-2}$  の各弧の向きを逆にした有向グラフである. また  $j = 0, 1$ , に対して,  $R((0jx, 0jy)) = R_{n-2}((x, y))$  かつ,  $R((1jy, 1jx)) = R_{n-2}((y, x))$  とする.

条件 (4'') より,  $\vec{TQ}_{n-2}$  には次の条件を満たす二つの弧  $e_1 = (z, w), e_2$  が存在する:  $i = 1, 2$  に対して  $R_{n-2}(e_i) = 2$  かつ  $e_i$  は  $R_{n-2}(e) = 3$  であるような弧  $e$  とは隣接せず,  $p_{n-2}(w) = 0$ .  $T^{ij}, i, j = 0, 1$ , に四つの弧  $(00z, 10z), (10w, 01w), (01z, 11z), (11w, 00w)$  を加え,  $R$  によって彩色に 3 を割り当てることにより得られるグラフを  $\vec{TQ}_n$  とする.

明らかに,  $\vec{TQ}_n$  はハミルトニアンである.  $\vec{TQ}_{n-2}$  における弧  $e_2 = (u, v)$  に対応する  $\vec{TQ}_n$  における二つの弧  $(00u, 00v), (01u, 01v)$  は 3 で彩色された弧とは隣接せず,  $p_n(00v)$  または  $p_n(01v)$  は 0 である. 故に, (4'') の条件を満たす二つの弧の存在は保証される. よって,  $(\vec{TQ}_n, R)$  は RHTS\_TQ である. ■

## 4 診断アルゴリズム

本節では, ハイパーキューブ族のグラフもハイパーキューブと同様の方法で 4 ラウンド診断が可能であることを示す.

### 4.1 Crossed cube, möbius cube

高々  $n$  個の故障を含む crossed cube  $CQ_n$  と möbius cube  $MQ_n, n \geq 3$ , に対する診断アルゴリズムはハイパーキューブ  $Q_n$  に対する診断アルゴリズムと同様の方法で行われる.  $CQ_n$  は互いに素な二つの  $CQ_{n-1}$  を含み, これらの二つの部分グラフ

は完全マッチングにより連結される．故に，3節で得られた RHTS\_CQ に対応する検査は3ラウンドで実行できる．さらに，検査結果を再帰的に解析することにより，4ラウンド目で実行すべき検査を決定できる．

Möbius cube に対するアルゴリズムも同様の議論ができる．以上のことから，定理 4.1 が得られる．

- 定理 4.1 1. 高々  $n$  個の故障を含む  $n$  次元 crossed cube  $CQ_n$ ,  $n \geq 3$ , は，高々 4 ラウンドで診断できる．
2. 高々  $n$  個の故障を含む  $n$  次元 möbius cube  $MQ_n$ ,  $n \geq 3$ , は，高々 4 ラウンドで診断できる．■

#### 4.2 Twisted cubes

3次元 twisted cube  $TQ_3$  に対する診断アルゴリズムは， $Q_3$  を診断するアルゴリズムとほぼ同様の方法で行われる．

$n \geq 5$  に対して， $TQ_n$  における RHTS\_TQ ( $\vec{TQ}_n, R$ ) の  $\vec{TQ}_{n-2}$  に対応する検査を3ラウンドで実行する． $TQ^{00}, TQ^{01}, TQ^{10}, TQ^{11}$  を twisted subcube とする．各 twisted subcube  $TQ^{ij}$ ,  $i, j = 0, 1$ , は RHTS\_TQ ( $\vec{TQ}^{ij}, R$ ) を持つ． $\vec{TQ}^{00}, \vec{TQ}^{01}, \vec{TQ}^{10}, \vec{TQ}^{11}$  は  $\vec{TQ}_{n-2}$  と同型である．RHTS\_TQ の定義から，各  $\vec{TQ}^{ij}$  にはハミルトンサイクル  $\vec{C}^{ij}$  が存在する． $\vec{C}^{ij}$  上の全ての検査結果が0ならば， $TQ^{ij}$  を 0-subcube と呼び，そうでなければ 1-subcube と呼ぶ． $n \geq 5$  に対して  $2^{n-2} > n$  であることから，0-subcube 上の全ての頂点は正常であることが保証される． $k$  を 1-subcube の数とする．

$k = 0$  ならば， $TQ_n$  上の全ての頂点は正常である． $k = 1$  または  $k = 2$  ならば，1-subcube 上の全ての頂点に 0-subcube 上の頂点を 1 対 1 に割り当てることができる．故に，1-subcube 上の全ての頂点は，4ラウンド目で正常と識別された頂点から検査される． $k = 3$  または  $k = 4$  ならば，各 subcube は高々  $n-2$  個の故障を含むため，4ラウンド目で実行されるべき検査割り当てを再帰的に決定できる．

定理 4.2  $n \geq 3$  に対して，高々  $n$  個の故障を含む  $n$  次元 twisted cube  $TQ_n$  は高々 4 ラウンドで診断できる．■

#### 4.3 Enhanced cubes

Enhanced  $(4, m)$ -cube は高々 4 ラウンドで診断できることが示せる．

$n \geq 5$  と仮定する．Enhanced  $(n, m)$ -cube は  $(n+1)$  診断可能であることが知られている [18]．本稿においても故障の数の上限は  $n+1$  を仮定する．

$V^{ij} = \{x_n x_{n-1} \dots x_1 \mid x_n = i, x_{n-1} = j\}$  とする．明らかに， $EQ^{ij} = \langle V^{ij} \rangle$  は  $EQ_{n-2}$  と同型であり，これを subcube と呼ぶ．任意の  $V^{ij}$  のペアの間には完全マッチングが存在する．各  $EQ^{ij}$  は RHTS ( $\vec{EQ}^{ij}, R$ ) を持つ．

まず，各  $\vec{EQ}^{ij}$  において，弧に割り当てられた色  $i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , に対応する検査をそれぞれ  $i$  ラウンド目で実行する．補題 2.3 より，これらの検査は  $\vec{EQ}^{ij}$  上でハミルトンサイクル  $\vec{C}^{ij}$  を構成する． $\vec{C}^{ij}$  上の全ての検査が0であるような  $EQ^{ij}$  を 0-subcube と呼び，そうでないものを 1-subcube と呼ぶ． $n \geq 5$  に対して  $2^{n-2} > n+1$  なので，0-subcube 上の全ての頂点は正常であることが保証される．1-subcube の数を  $k$  とする．

$k = 0$  ならば， $EQ_n$  上の全ての頂点は正常である．

$k = 1$  または  $k = 2$  ならば，1-subcube 上の全ての頂点を 0-subcube 上の正常と識別された頂点に 1 対 1 に割り当てることができる．よって，1-subcube 上の全ての頂点は 4 ラウンド目で正常な頂点から検査される．

次に， $k = 3$  の場合を考える．一意的な 0-subcube を  $EQ^0$  とする．二つ以上の subcube が，少なくとも二つの互いに素な 1 検査を含むならば，それらの subcube は少なくとも二つの故障を含む．この場合，故障の数は高々  $n+1$  であることから，各 1-subcube は高々  $n-2$  個の故障を含むことが分かる．故に，ハイパーキューブに対する診断アルゴリズムを使って，4ラウンド目を実行すべき検査を決定できる．次に，二つ以上の互いに素な 1 検査を持たないような二つの 1-subcube  $EQ^1, EQ^2$  が存在すると仮定する．つまり  $\vec{EQ}^1$  において， $r(u, u_0) = 1, r(u_0, u_1) = 0$  または 1 とすると， $\vec{EQ}^1$  上のハミルトンサイクル  $\vec{C}^1$  上の他の全ての検査  $(x, y)$  に対して  $r(x, y) = 0$  である． $u, u_0, u_1, \dots, u_{n-2}$  を次の条件を満たす  $\vec{C}^1$  上の連続する  $n$  個の頂点の集合とする： $r(u, u_0) = 1, r(u_0, u_1) = 0$  または  $1, r(u_i, u_{i+1}) = 0, i =$

$1, \dots, n-3$ .  $W = V(EQ^1) \setminus \{u, u_0, u_1, \dots, u_{n-2}\}$  とする. この場合,  $u$  を正常と仮定すると  $W$  の全ての頂点は故障でなければならず,  $|W| \geq n+1$  より故障の数の上限に反するため,  $u$  は故障であることが分かる.  $EQ^1$  は高々  $n-1$  個の故障を含むため,  $\{u\} \cup W$  における全ての頂点は正常であり,  $u_0$  は故障である.  $U^1 = \{u_1, \dots, u_{n-2}\}$  とする.  $EQ^1$  は  $EQ_{n-2}$  と同型であり,  $|U^1| = n-2$  なので, 補題 2.1 より,  $U^1$  における各頂点は  $W \cup \{u\}$  に異なる隣接頂点を持つ. 同様の議論により,  $EQ^2$  上の頂点集合  $U^2 = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-2}\}$  にも異なる正常な頂点を割り当てることができる. さらに,  $EQ^0$  上の正常な頂点と残りの subcube  $EQ^3$  上の頂点を 1 対 1 に割り当てることができる.  $U^1 \cup U^2 \cup V(EQ^3)$  上の頂点への検査が 4 ラウンド目で同時に実行できることは容易に分かる.

$k=4$  ならば, 各 subcube は高々  $n-2$  個の故障を含む. 各 subcube は  $EQ_{n-2}$  と同型であり,  $n \geq 3$  なので, ハイパーキューブに対する診断アルゴリズムを利用することにより, 3, または 4 ラウンド目に行うべき検査割り当てを決定できる.

**定理 4.3** 高々  $n+1$  個の故障を含む enhanced  $(n, m)$ -cube,  $2 \leq m \leq n$ ,  $n \geq 5$ , は高々 4 ラウンドで診断できる. ■

## 5 Enhanced cubes に対する異なるアプローチ

本節では enhanced  $(n, m)$ -cube に対して, 4 節における診断アルゴリズムとは異なり, 故障の数が少なければ 3 ラウンドで診断できるアルゴリズムを提案する.

本節においても, 故障ユニットは高々  $n+1$  個であるとする. また,  $n \geq m \geq 2$ ,  $n \geq 8$ ,  $r = \lfloor \log(n+1) \rfloor + 1$ ,  $k = n-r$  と仮定する.

$\vec{x} = x_k x_{k-1} \cdots x_1$ ,  $x_i \in Z_2$  に対して, 頂点集合  $V(\vec{x}) = \{x_n \cdots x_{k+1} \vec{x} \mid x_i \in Z_2, k+1 \geq i \geq n\}$  により誘導される部分グラフ  $\langle V(\vec{x}) \rangle$  は  $(n-k)$  次元ハイパーキューブと同型である. 各  $\langle V(\vec{x}) \rangle$  において, 各頂点のラベルの左から  $r$  ビットを Gray code に従うことにより  $\langle V(\vec{x}) \rangle$  上のハミルトンサイクルを構成できる. 本報告ではこれを *ring* と呼び,  $C(\vec{x})$  で

表す.

各 ring  $C(\vec{x})$  上で, Gray code の向きを検査を時計回りの検査と呼ぶ. Enhanced  $(n, m)$ -cube は  $2^k$  個の ring を持つ. 明らかに,  $\vec{x} \neq \vec{y}$  ならば,  $C(\vec{x})$  と  $C(\vec{y})$  は共通の頂点を含まない.

$\vec{x} \neq \vec{y}$  に対して, 頂点  $u \in C(\vec{x})$  と  $v \in C(\vec{y})$  が隣接するとき,  $C(\vec{x})$  と  $C(\vec{y})$  は隣接するといいい,  $v$  は  $u$  の外近傍であるという. 明らかに,  $C(\vec{x})$  と  $C(\vec{y})$  が隣接するための必要十分条件は  $\vec{x}$  と  $\vec{y}$  が 1 ビットのみ異なるか, または  $m \geq k$  ならば  $\vec{x}$  は  $\vec{y}$  の右  $k$  ビットを反転したものであり,  $m < k$  ならば  $\vec{x}$  は  $\vec{y}$  の右  $m$  ビットを反転したものであることである.

ring 上の時計回りの全ての検査結果が 0 であるとき, その ring を *0-ring* と呼び, そうでないものを *1-ring* と呼ぶ.

始めに, 各 ring 上の時計回りの検査を実行する. 各 ring は  $r$  次元ハイパーキューブのハミルトンサイクルなので, ring の長さは  $2^r$  であり, 偶数である. 1 ラウンド目で互いに素な  $2^{r-1}$  個の一つ置きを検査を実行し, 2 ラウンド目で残りの全ての検査を実行する. このとき, 2 ラウンド必要となる.

0-ring 上の頂点は全て正常か, 全て故障かのどちらかである. ring には  $2^r$  個の頂点が存在し,  $2^r > n+1$  であることから, 全てが故障ならば故障の数の仮定に矛盾する. よって, 0-ring 上の全ての頂点は正常である.

次に, 0-ring と隣接する 1-ring 上の全ての頂点を, 0-ring 上の外近傍から検査する.

1-ring が  $n$  個以上存在したとき, 各 1-ring 上には高々 2 個の故障が存在する. Kranakis ら [6] により,  $n$  個の頂点を持つ ring において, 2 個以下の故障を 2 ラウンドで識別可能であることが示されている.

1-ring がちょうど  $n-1$  個の場合, 各 1-ring 上の 1 検査列の数による場合分けにより, あと 1 ラウンドだけを使って全ての頂点を識別できる.

よって, 1-ring の数が高々  $n-2$  個の場合を考える.

**補題 5.1** 0-ring と隣接しない 1-ring は高々 1 個存在する. ■

さらに, 0-ring と隣接する 1-ring の全ての頂点と 0-ring 上の頂点を 1 対 1 に対応させることができる.

さらに，補題 2.2 より系 5.2 を得る．

系 5.2 Enhanced  $(n, m)$ -cube において，故障の数が高々  $n - \lfloor \log(n+1) \rfloor$  ならば，3 ラウンドで全ての頂点を識別できる．■

0-ring と隣接しない 1-ring 上の頂点を正常と識別された隣接頂点により検査する．このとき実行される検査は全て独立なので，1 ラウンドで実行できる．

このとき，全ての隣接頂点の状態が故障がまだ不明であるような頂点は高々一つ存在する．この頂点を  $x$  と呼ぶ． $x$  の全ての近傍はすでに識別されており， $x$  が正常な隣接頂点を持たない場合にはすでに  $n+1$  個の故障が識別されているので  $x$  は正常である． $x$  が正常と識別された頂点と隣接し，かつ，正常な頂点によって検査されていないならば， $x$  を検査する．これは 1 ラウンドで実行できる．

以上より，以下の結果を得る．

定理 5.3 高々  $n+1$  個の故障を含む enhanced  $(n, m)$ -cube， $2 \leq m \leq n$ ， $n \geq 8$ ，は高々 5 ラウンドで診断できる．また，故障の数が  $n - \lfloor \log(n+1) \rfloor$  以下ならば，高々 3 ラウンドで診断できる．■

## 6 まとめ

本報告では，ハイパーキューブ族のネットワーク，crossed cube, möbius cube, twisted cube, enhanced cube, をそれぞれ 4 ラウンドで診断するアルゴリズムを提案した．

また enhanced cube を，故障の数が高々  $n+1$  ならば 5 ラウンドで，高々  $n - \lfloor \log(n+1) \rfloor$  ならば 3 ラウンドで診断するアルゴリズムを示した．

## 参考文献

- [1] F. P. Preparata, G. Metze, and R. T. Chien, "On the connection assignment problem of diagnosable systems," *IEEE Trans. Electronic Computers*, vol. EC-16, pp. 848–854, Dec. 1967.
- [2] S. L. Hakimi and A. T. Amin, "Characterization of connection assignment of diagnosable systems," *IEEE Trans. Computers*, vol. C-23, pp. 86–88, Jan. 1974.
- [3] K. Nakajima, "A new approach to system diagnosis," in *Proc. 19th Allerton Conf. Comm. Control and Computing*, pp. 697–706, 1981.
- [4] P. M. Blecher, "On a logical problem," *Discrete Mathematics*, vol. 43, pp. 107–110, 1983.
- [5] R. Beigel, W. Hurwood, and N. Kahale, "Fault diagnosis in a flash," in *Proceedings of the 36th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 571–580, 1995.
- [6] E. Kranakis, A. Pelc, and A. Spatharis, "Optimal adaptive fault diagnosis for simple multiprocessor systems," *NETWORKS*, vol. 34, pp. 206–214, 1999.
- [7] A. Okashita, T. Araki, Y. Shibata, "An Optimal Adaptive Diagnosis of Butterfly Networks," to appear.
- [8] C. Feng, L. N. Bhuyan, and F. Lombardi, "Adaptive system-level diagnosis for hypercube multiprocessors," *IEEE Trans. Computers*, vol. 45, pp. 1157–1170, Oct. 1996.
- [9] E. Kranakis and A. Pelc, "Better adaptive diagnosis of hypercubes," *IEEE Trans. Computers*, vol. 49, pp. 1013–1020, Oct. 2000.
- [10] A. Björklund, "Optimal adaptive fault diagnosis of hypercubes," in *Proc. of SWAT 2000, Lecture Notes in Computer Science 1851* (M. M. Halldórsson, ed.), pp. 527–534, Springer-Verlag Berlin, 2000.
- [11] K. Efe, "A variation on the hypercube with lower diameter," *IEEE Trans. Computers*, vol. 40, no. 11, pp. 1312–1316, 1991.
- [12] P. Cull and S. M. Larson, "The möbius cubes," *IEEE Trans. Computers*, vol. 44, pp. 647–659, May 1995.
- [13] P. A. J. Hilbers, M. R. J. Koopman, and J. L. A. van de Snepscheut, "The twisted cube," in *Parallel Architectures and Languages Europe*, Lecture Notes in Computer Science, pp. 152–159, Springer Berlin, June 1987.
- [14] N.-F. Tzeng and S. Wei, "Enhanced hypercubes," *IEEE Trans. Computers*, vol. 40, pp. 284–294, Mar. 1991.
- [15] K. Efe, "The crossed cube architecture for parallel computation," vol. 3, pp. 513–524, Sept. 1992.
- [16] J. Fan, "Hamilton-connectivity and cycle-embedding of the Möbius cubes," *Information Processing Letters*, vol. 82, pp. 113–117, 2002.
- [17] C.-P. Chang, J.-N. Wang, and L.-H. Hsu, "Topological properties of twisted cube," *Information Sciences*, vol. 113, pp. 147–167, 1999.
- [18] D. Wang, "Diagnosability of enhanced hypercubes," *IEEE Trans. Computers*, vol. 43, pp. 1054–1061, Sept. 1994.