一変数テーブル参照による保存的セル・オートマトンの論理万能性

今井 克暢, 伊ヶ崎 明彦, 岩本 宙造, 森田 憲一

広島大学大学院工学研究科
〒739-8527 東広島市鏡山 1–4–1

{imai,ikazaki,iwamoto,morita}@iec.hiroshima-u.ac.jp

保存的セル・オートマトン (NCCA) は各セルの状態が整数値で表され，セルの総和が常に一定であるようなセル・オートマトン (CA) である．これは物理的な質量やエネルギーの保存性のある種のモデル化と考えることができる．45 度反転対称ノイマン近傍 NCCA の遷移規則は 2 変数関数の線形結合で表せることが知られており，その結果を用いて論理万能な NCCA が構成されている．本論文では 2 変数関数が二つのセルの値の差のみに依存する一変数関数の場合にも論理万能な NCCA を構成できることを示す．

セル・オートマトン，論理万能性，保存性

Logical universality of naumber-conserving a cellular automaton with a unary table-lookup function

Katsunobu Imai, Akihiko Ikazaki, Chuzo Iwamoto, Kenichi Morita,

Graduate School of Engineering, Hiroshima University
Higashi-Hiroshima-shi, 739-8527 Japan

{imai,ikazaki,iwamoto,morita}@iec.hiroshima-u.ac.jp

A number-conserving cellular automaton (NCCA) is a cellular automaton (CA) such that all states of cells are represented by integers and the total number of its configuration is conserved throughout its computing process. It can be thought as a kind of modelization of the physical conservation law of mass or energy. It is known that the local function of a two-dimensional 45-degree reflection-symmetric von Neumann neighbor NCCA can be represented by linear combinations of a two-ary function. In spite of the number-conserving constraints, it is possible to design an NCCA with complex rules by employing this representation. In this paper, we study the case that the two-ary function depends only on the difference of two cell states, i.e., the case that the function can be regarded as a unary one. Even under the constraint, it is possible to construct a logically universal NCCA.

Cellular automata, logical universality, number-conservation

1　はじめに

セル・オートマトン (CA) は並列計算機のモデルのひとつとして広く用いられているが，近年，可逆的，保存的な制約を伴った CA が研究されるようになった．

可逆的な CA[9, 6] は大域写像が単射な CA であり，保存的な CA(NCCA)[8, 2, 3, 7] は各セルの状態が整数で表され，状相の数の総和が遷移を通して不変な CA である．それらは物理的な質量やエネルギーを保存する空間のある種のモデル化と考えられるので，物理現象のシミュレーションに広く用いられているが，物理法則に直接支配されるような計算システムのモデルとも考えることができ，物質に密接に依存する計算システムとの関係が研究されている．例えば，Frank ら [4] により，低消費電力な可逆的かつ保存的な CA 回路のプロトタイプを構成することが試みられている．しかし，現時点では回路が可逆的であることが消費電力を押さえる上で本質的に影響を与えるレベルにはない．しかし，情報のキャリアの局所的な保存性はすでに CMOS 回路や断熱充電回路 [10] の低電力消費を実現する上でも重要な点のひとつである．

エネルギー消費の少ない CA に基づく回路を構成する上でのもうひとつの問題点は遷移規則回路の複雑さである．CA の並列実行のためにはすべてのセルにそれぞれ遷移規則回路を要する．例えば，一般的な 2 次元ノイマン近傍 CA の場合，5 近傍の状態から次の状態を決定するため，5 変数のテーブル参照が必要である．

45 度反転対称ノイマン近傍 CA の場合には，局所関数が自身と残りの 4 近傍のうちのひとつだけに依存する 2 変数関数の線形結合で表せることが示されており [5]，それを用いて論理万能な NCCA を構成できることが分かっている [5](すなわち任意のブール回路を模倣することができる)．この場合には加減算器と 2 変数のテーブル参照回路によって遷移規則回路を構成できることになる．

本論文では，上記 2 変数関数が二つのセルの値の差のみに依存する単一変数関数と見なせる場合について考察する．この場合にも，Banks[1] による方法を用いて，単一変数関数と言う制約にも関わらず論理万能な NCCA を構成できることを示す．すなわち，セルの差の値のみに依存する単一変数のテーブル参照と加減算のみにより遷移規則回路を構成することができる．

2　2 次元セル・オートマトンとその保存的条件

定義 2.1 決定性 2 次元ノイマン近傍セル・オートマトン A は

$$A = (\mathbf{Z^2}, Q, f, q),$$

で決定されるシステムである．ここで，$\mathbf{Z}$ は全整数の集合，Q 各セルの内部状態の有限集合，$f : Q^5 \to Q$ は**局所関数**と呼ばれる写像，$q \in Q$ は**静止状態**と呼ばれる状態で $f(q, q, q, q, q) = q$ を満たす．

Q 上の**状相**とは $\alpha : \mathbf{Z}^2 \to Q$ なる写像で，Q 上のすべての状相の集合を $\mathrm{Conf}(Q)$ で表す．すなわち，$\mathrm{Conf}(Q) = \{\alpha | \alpha : \mathbf{Z}^2 \to Q\}$ である．

以下では有限の状相の CA のみを考える．すなわち，静止状態以外のセルの数が有限であるとする．

以下で定義される関数 $F : \mathrm{Conf}(Q) \to \mathrm{Conf}(Q)$ を A の**大域関数**という．

$$\begin{aligned}
&\forall (x, y) \in Z^2, \\
&\quad F(\alpha)(x, y) \;=\; f(\alpha(x, y), \alpha(x, y+1), \alpha(x+1, y), \\
&\qquad\qquad\qquad\quad \alpha(x, y-1), \alpha(x-1, y)).
\end{aligned}$$

A が以下の条件を満たす時，**保存的**であるという．

$$\sum_{(x,y)\in\mathbf{Z^2}} \{F(\alpha)(x, y) - \alpha(x, y)\} = 0 \qquad (1)$$

次にいくつかの対称性に関する条件を定義する．

定義 2.2 CA A はその局所関数 f が以下の条件を満たす時，**回転対称**であるという．

$$\forall c, u, r, d, l \in Q, f(c, u, r, d, l) = f(c, r, d, l, u).$$

CA A はその局所関数 f が以下の条件を満たす時，**45 度反転対称**であるという．

$$\begin{aligned}
&\forall c, u, r, d, l \in Q, \\
&\quad f(c, u, r, d, l) = f(c, l, d, r, u) = f(c, r, u, l, d).
\end{aligned}$$

回転対称な CA A の局所関数 f が，さらに以下の条件を満たす時，**組合せ対称**であるという．

$$\begin{aligned}
&\forall c, u, r, d, l \in Q, \\
&\quad f(c, u, r, d, l) = f(c, u, r, l, d) = f(c, u, d, r, l) \\
&\qquad = f(c, u, d, l, r) = f(c, u, l, d, r) \\
&\qquad = f(c, u, l, r, d).
\end{aligned}$$

45 度反転対称なノイマン近傍 CA が保存的であるための必要十分条件が示されている [5].

定理 2.1 [5] 決定性 2 次元 45 度反転対称ノイマン近傍セル・オートマトン $A=(\mathbf{Z^2},Q,f,q)$ が保存的であるための必要十分条件はその局所関数 f が以下の条件を満たすことである.

$$\exists\varphi: Q^2\to Q,\quad \forall c,u,r,d,l\in Q,$$
$$f(c,u,r,d,l)=c+\varphi(c,u)+\varphi(c,r)+\varphi(c,d)+\varphi(c,l),$$
$$\varphi(c,u)=-\varphi(u,c).$$

この場合, CA A は組合せ対称になることが示されている [5].

定理 2.1 は 45 度反転対称な NCCA の局所関数は自身のセルの値と 5 つの近傍のうちのひとつのセルの値のみに依存して，それらのセル間で受け渡しされる数を決める 2 変数関数 φ (以下，**流量関数**と呼ぶ) のみで表現されることを示している.

よって，ある機能を有する NCCA を構成するためには，

1. **部分状態集合** $\tilde{Q}$ を適当に選び，$(x,y)\in\tilde{Q}^2$ について，流量関数 $\varphi(x,y)$ を設計する.
2. $\tilde{Q}$ を拡張することで状態集合 Q を決める．これは，$(c,u,r,d,l)\in\tilde{Q}^5$ について，局所関数 $f(c,u,r,d,l)$ のすべての値を含む集合 Q' を求め，$Q'\cup\tilde{Q}$ を Q とすることで求めることができる．結果として，φ の定義域は $\tilde{Q}$ から Q へ拡張される．(任意の $(x,y)\in(Q-\tilde{Q})^2$ について $\varphi(x,y)\equiv 0$ である．)

次にふたつの例を示す.

例 2.1 図 1 に示した NCCA A_{ex} はワイヤー状の状相とその上を流れる信号を実現している．ワイヤーは状態 2 を持つ幅 1 の連結セルである．信号は状態 1 と 3 の二つのセルで表されており，ワイヤーに沿って速度 1 で流れ，ワイヤーの終端で (すなわち，三つの静止状態セルに隣接した時) 消滅する.

部分状態集合 $\tilde{Q}_{ex}$ は $\{0,1,2,3\}$ の 4 状態で，流量関数 $\varphi_{ex}(x,y),(x,y)\in\tilde{Q}_{ex}$ は $(x,y)=(1,2),(1,3)$ (と共役な $(2,1),(3,1)$) でのみ 0 以外の値を持ち，$\varphi_{ex}(1,2)=1$，$\varphi_{ex}(1,3)=1$ (ならびに $\varphi_{ex}(2,1)=-1$，$\varphi_{ex}(3,1)=-1$) で，信号の移動を実現している.

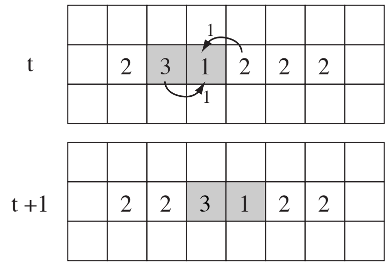

図 1: A_{ex} におけるワイヤーと信号の状相 (空白セルは 0).

すべての $(c,u,r,d,l)\in\tilde{Q}_{ex}$ について局所関数 f_{ex} を計算することで，状態集合は $Q_{ex}=\{-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$ となる.

以上より，A_{ex} は 8 状態ノイマン近傍 NCCA $A_{ex}=(\mathbf{Z}^2,Q_{ex},f_{ex},0)$，で，$f_{ex}$ の流量関数 $\varphi_{ex}(x,y)$ はすべての $(x,y)\in Q_{ex}$ で定義され，0 でない値をとるのは上記の場合のみである.

上記の φ_{ex} が 0 でない値をとる場合を見ると，$\varphi_{ex}(x,y)$ は 2 セルの差のみに依存する単一変数関数 $\psi_{ex}(y-x)$ を用いて $\psi_{ex}(1)=1,\psi_{ex}(2)=1$ のように形式的に表すことができる．ところが，この新しい関数を流量関数として用いると，$\psi_{ex}(1)=1$ が $(x,y)=(1,2)$ の場合だけでなく，$(x,y)=(2,3),(0,1)$ の場合にも適用され，ワイヤー状の構造を破壊してしまい，ワイヤーと信号の機能を実現することはできなくなる.

例 2.2 図 2 に示した NCCA A_{ex2} は同様にワイヤー状の状相とその上を流れる信号を実現しているが，ワイヤーは状態が $20,10,20,25$ を繰り返す幅 1 の連結セルで表現されている．信号は同じく 2 セルで表現され，速度 1 でワイヤーに沿って流れ終端で消滅するが，状態の組合せが一ステップごとに $(2,28)$，$(6,39)$，$(22,23)$，$(21,9)$ の 4 種類のうちの一つを順番にとる.

部分状態集合 $\tilde{Q}_{ex2}$ は $\{0,2,6,9,10,20,21,22,23,25,28,39\}$ の 12 状態で，流量関数 $\varphi_{ex2}(x,y),(x,y)\in\tilde{Q}_{ex2}$ は $\varphi_{ex2}(2,28)=8$，$\varphi_{ex2}(28,25)=-14$，$\varphi_{ex2}(6,39)=14$，$\varphi_{ex2}(39,20)=-3$，$\varphi_{ex2}(22,23)=3$，$\varphi_{ex2}(23,10)=1$，$\varphi_{ex2}(21,9)=-1$，$\varphi_{ex2}(9,20)=-8$ とその共役で 0 以外の値をとる.

この例でも，$\varphi_{ex2}(x,y)$ は単一変数関数 $\psi_{ex2}(y-x)$ として，$\psi_{ex2}(26)=8$，$\psi_{ex2}(3)=14$，$\psi_{ex2}(33)=14$,

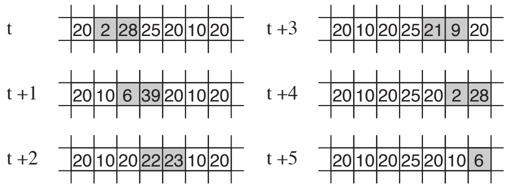

図 2: A_{ex2} におけるワイヤーと信号の状相.

$\psi_{ex2}(19) = 3$, $\psi_{ex2}(1) = 3$, $\psi_{ex2}(13) = -1$, $\psi_{ex2}(12) = 1$, $\psi_{ex2}(11) = -8$. のように表現することができる. $\psi_{ex2}(y-x)$ はワイヤー状の構造と信号を模倣する機能に関する限り φ_{ex2} と同様の動作をするので，局所関数 f_{ex2} の φ_{ex2} を ψ_{ex2} で置き換えることができる.

3 単一変数流量関数を持つ論理万能なNCCA

Banks[1] は論理万能な 2 状態ノイマン近傍 CA を構成している. すなわち，任意のブール回路をそのセル空間に状相として埋め込み，その遷移が回路を模倣することができる.

Banks のモデルはワイヤー状の構造と信号に対応する状相を持つ. ワイヤーは連結点と $\bar{A} \cdot B$ 論理素子の二種類の分岐点を持つことができ，さらに，周期的な信号生成器であるクロック素子を持つ. Banks は上記の素子を彼の 2 状態ノイマン近傍 CA に埋め込むことができることを示した. そして，それらの素子を組み合わせることで，図 3 に示した AND, OR, NOT と信号交差素子構成できることを示している.

本節では，上記の Banks の基本素子を 20 状態の部分状態集合上で定義される流量関数を持つ 82 状態の NCCA A_u に埋め込むことができることを示す.

A_u は $A_u = (\mathbf{Z}^2, Q_u, f_u, 0)$.
$Q_u = \{-85, -71, -65, -50, -45, -44, -30, -25, -23, -20, -17, -15, -10, -7, -6, -5, -4, -3, -2, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 47, 48, 50, 52, 53, 54, 55, 59, 61, 62, 65, 70, 72, 74, 77, 80, 85, 86, 88, 89, 101, 107, 113, 115, 142\}$ で定義され，その部分状態集合 $\tilde{Q}_u$ は

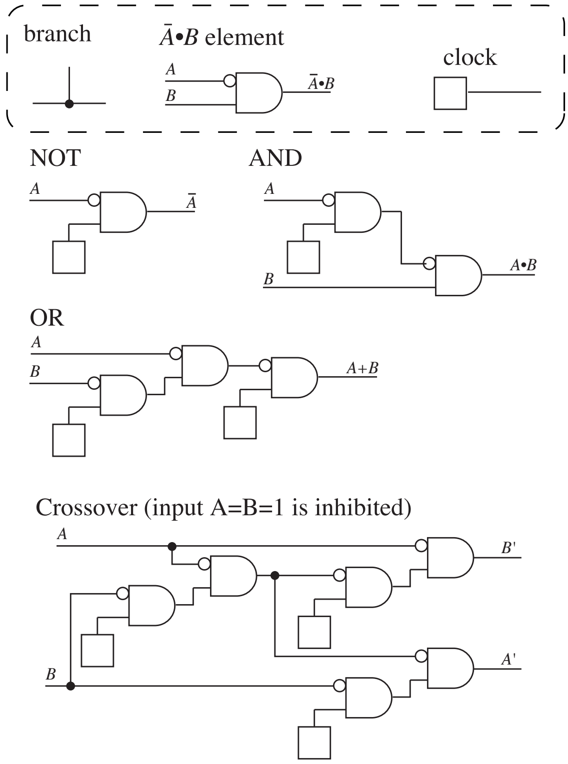

図 3: Banks による基本論理素子の構成.

$\tilde{Q}_u = \{0, 2, 5, 6, 9, 10, 16, 20, 21, 22, 23, 25, 28, 37, 39, 40, 43, 47, 54, 55\}$ である. f_u の流量関数 φ は図 4 に示した値をとり，すべての $x, y \in Q_u$ について $\varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$ である. 図 4 で定義されていない値はすべて 0 である.

$$\begin{array}{lll}
\varphi_u(2,28) = 8, & \varphi_u(25,28) = 14, & \varphi_u(6,39) = 14, \\
\varphi_u(20,39) = 3, & \varphi_u(22,23) = 3, & \varphi_u(10,23) = -1, \\
\varphi_u(9,21) = 1, & \varphi_u(9,20) = -8, & \cdots\text{(a)} \\
\varphi_u(28,43) = -4, & \varphi_u(20,47) = 3, & \varphi_u(16,47) = 4, \\
\varphi_u(23,37) = -3, & & \cdots\text{(b)} \\
\varphi_u(9,47) = -8, & \varphi_u(2,55) = 35, & \varphi_u(25,55) = 15 \\
\varphi_u(5,37) = 27, & \varphi_u(5,40) = 15, & \cdots\text{(c)} \\
\varphi_u(5,54) = 15, & \varphi_u(6,54) = 14. & \cdots\text{(d)}
\end{array}$$

図 4: φ_u の値.

流量関数 $\varphi(x, y)$ は単一変数関数で表すことができる. すなわち $\forall(x, y) \in {Q_u}^2, \exists\psi, \varphi_u(x, y) \equiv \psi_u(y - x)$

である．ψ_u は図 5 の値を持ち，$\psi_u(x) = -\psi_u(x)$ を満たす．未定義の値はすべて 0 である．

$$
\begin{array}{lll}
\psi_u(1) = 3, & \psi_u(3) = 14, & \psi_u(11) = -8, \\
\psi_u(12) = 1, & \psi_u(13) = -1, & \psi_u(14) = -3, \\
\psi_u(15) = -4, & \psi_u(19) = 3, & \psi_u(26) = 8, \\
\psi_u(27) = 3, & \psi_u(30) = 15, & \psi_u(31) = 4, \\
\psi_u(32) = 27, & \psi_u(33) = 14, & \psi_u(35) = 15, \\
\psi_u(38) = -8, & \psi_u(48) = 14, & \psi_u(49) = 15, \\
\psi_u(53) = 35. & &
\end{array}
$$

図 5: ψ_u の値.

ワイヤーと信号は A_{ex2} と同様だが，図 4(b) の規則を追加することで，ワイヤーは分岐点を持つことができる．図 6 に分岐点での信号の伝搬を示す．分岐点のセルの状態は 43 である．

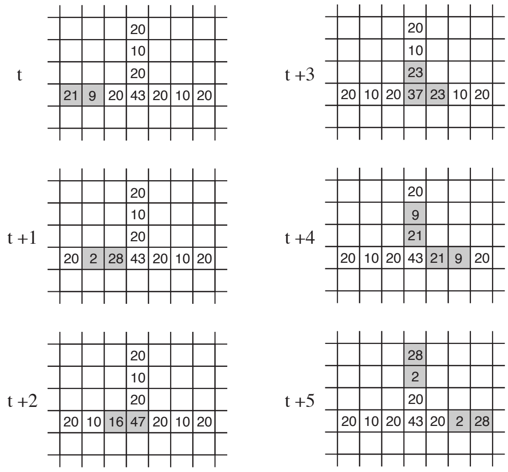

図 6: 分岐点の状相.

ワイヤーをループさせることで分岐点をクロックを実現できる．図 7 は周期 9 のクロックである．

図 8 に $\bar{A} \cdot B$ 端子への各入力に対する論理素子の状相を示す．分岐点の入力 A の側のセルが 47 の状態にすることで分岐点を $\bar{A} \cdot B$ 素子として用いることができる．図 8(a) に入力 $A = 0, B = 1$ の場合を示す．この場合は規則を追加することなく実現できる．図 8(b) に入力 $A = 1, B = 0$ の場合を示す．図 4 の規則 (c) が $A = 1$ の入力信号を消去するために追加されている．図 8(c)

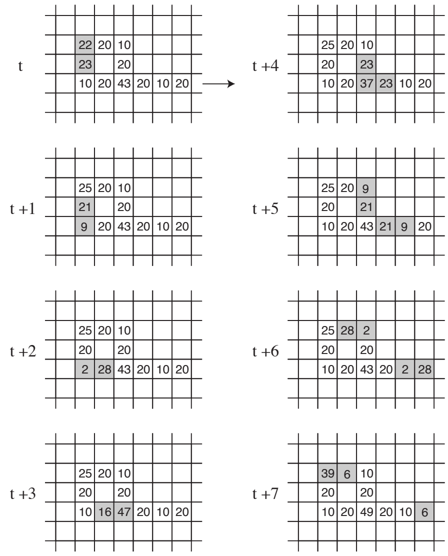

図 7: 周期 9 のクロック.

は入力 $A = 1, B = 1$ の場合である．この場合には図 4 の規則 (d) が入力信号の消去のために追加されている．

以上のことから，ワイヤーと信号，分岐点，$\bar{A} \cdot B$ 論理素子が実現でき，A_u により任意のブール回路を Banks の方法によって模倣できるので，A_u は論理万能である．

図 9, 10, 11 にそれぞれ NOT, AND, OR 回路の初期状相を示す．

4 おわりに

本論文で，単一変数関数と見なすことができる流量関数によるノイマン近傍保存的セル・オートマトンで論理万能なものを構成できることを示した．

このタイプの保存的セル・オートマトンの遷移回路は加減算器と単一の値のみに依存するテーブル参照回路で構成できる．

参考文献

[1] Banks, E. R.: Universality in cellular automata, *Proc. Eleventh Annual Symposium on Switching and Automata Theory* (1970) 194–215.

[2] Boccara, N. and Fukś, H.: Number-conserving cel-

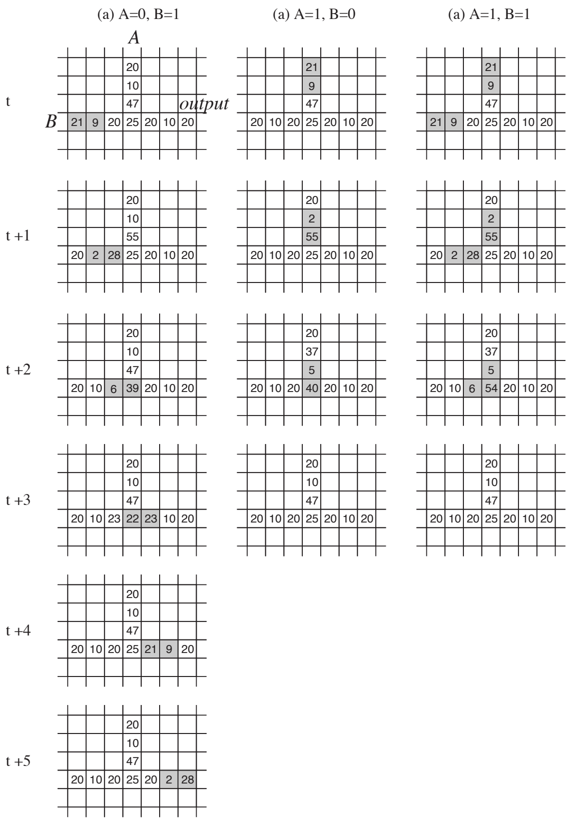

図 8: 各入力に対応する $\bar{A}\cdot B$ 論理素子の状相.

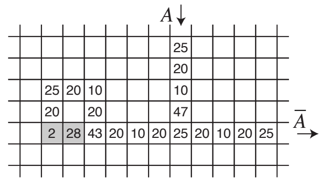

図 9: NOT 素子の状相.

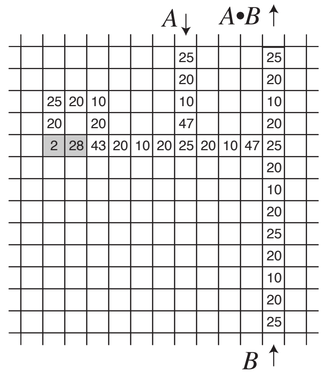

図 10: AND 素子の状相. .

lular automaton rules, *Fundamenta Informaticae* **52** (2003) 1–13.

[3] Durand, B., Formenti, E. and Roka, Z.: Number conserving cellular automata: from decidability to dynamics, *Theoretical Computer Science* **299** (2003) 523–535.

[4] Frank, M., Knight T., and Margolus N.: Reversibility in optimally scalable computer architectures, *Unconventional Models of Computation*, (eds., C.S.Claude, J. Casti, and M.J. Dinneen), Springer-Verlag (1998) 165–182.

[5] Imai, K., Fujita, K., Iwamoto, C. and Morita, K.: Embedding a logically universal model and a self-reproducing model into number-conserving cellular automata, *Proc. the 3rd International Conference on Unconventional Models of Computation (UMC'02)*, Kobe, LNCS2509 (2002) 164–175.

[6] Margolus, N.: Physics-like models of computation, *Physica*, **10D** (1984) 81–95.

[7] Moreira, A.: Universality and decidability of number-conserving cellular automata, *Theoretical Computer Science* **292** (2003) 711–721.

[8] Morita, K. and Imai, K.: Number-conserving reversible cellular automata and their computation-universality, *Theoretical Informatics and Applications* **35** (2001) 239–258.

[9] Toffoli, T.: Computation and construction universality of reversible cellular automata, *Journal of Computer and System Sciences*, **15** (1977) 213–231.

[10] 小野豪一, 永田真, 岩田穆: 低電力断熱充電乗算回路, 信学技報 VLD97-124, ICD97-229 (1998) 9–16.

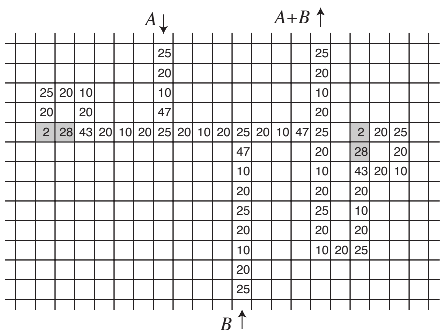

図 11: OR 素子の状相.