2004－AL－93　(1)
2004／1／30

H-彩色可能なグラフのクラスの階層構造の Circulant graphs による細分化

上嶋 章宏 *　　伊藤 大雄 *

* 京都大学大学院 情報学研究科 通信情報システム専攻

{uejima, itohiro}@kuis.kyoto-u.ac.jp

概要

p-彩色可能なグラフは $\overline{C_{2p+1}}$-彩色可能であり，$\overline{C_{2p+1}}$-彩色可能なグラフは $p+1$-彩色可能であるが，いずれも逆は成立しない (但し $\overline{C_{2p+1}}$ は長さ $2p+1$ の閉路の補グラフである)．本発表ではこの包含関係が circulant graphs の部分集合として我々が定義する $H(n,k)$ によってさらに細分化されることを示す．この細分化は、従来から知られている C_{2p+1} による細分化をも包含する．更に平面グラフの $H(n,k)$-彩色に対し，いくつかの NP-完全問題を示す．

Subdividing hierarchy of classes of H-colorable graphs by circulant graphs

Akihiro UEJIMA*　　Hiro ITO*

* School of Informatics, Kyoto University, Yoshida-Honmachi, Kyoto, Japan, 606-8501

{uejima, itohiro}@kuis.kyoto-u.ac.jp

Abstract

p-colorable graphs are $\overline{C_{2p+1}}$-colorable, and $\overline{C_{2p+1}}$-colorable graphs are $p+1$-colorable, where $\overline{C_{2p+1}}$ is the complement graph of a cycle of order $2p+1$. However, the converse statements are incorrect. This paper presents that these inclusions can be subdivided by our original graphs $H(n,k)$ which are defined as a subset of circulant graphs. The subdivided hierarchy contains the well-known inclusion of C_{2p+1}-colorable graphs. Moreover, This paper shows some NP-complete problems for planar $H(n,k)$-colorings.

1　はじめに

H-彩色問題とは，グラフの最適化問題の中で最も有名な問題の一つである，グラフの点彩色問題 [7] に “隣接点対に塗れないような異なる色対も存在し得る” という単純な一般化を施した問題である (H は単純無向グラフである)．本問題はグラフ間の準同形写像という概念を用いて定義でき，これは P v.s. NP 問題と本質的に等価であるグラフ同形問題と近い概念であり，興味深い研究課題と言え，様々な視点から多くの研究がなされている [1, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13]．入力されたグラフ G から H への準同形写像が存在するか否かを問う H-彩色問題の計算複雑さについて，G が一般のグラフである場合は H が 2 部グラフならば多項式時間可解，H が非 2 部グラフならば NP-完全であることがすでに示されている [6]．一方 G を平面グラフに限定した場合，上記結果より明らかに H が 2 部グラフならば多項式時間可解であるが，H が非 2 部グラフの場合については未解決であり，我々は特にこの未解決問題に着目する．

本研究では単純無向グラフのみを扱う．グラフ G =

(V,E) に対し，その節点集合を $V(G)$，枝集合を $E(G)$ で表現することもある．$x \in V(G)$ に対し $adj_G(x) := \{y | y \in V(G), (x,y) \in E(G)\}$ と定義し，x の**隣接点集合**と呼ぶ．$d_G(x) := |adj_G(x)|$ とする．グラフ G とその節点部分集合 $V' \subseteq V(G)$ に対し，グラフ $(V', \{(x,y) | x,y \in V', (x,y) \in E(G)\})$ を V' による G の**誘導部分グラフ**と呼ぶ．グラフ G とその節点部分集合 $W \subseteq V(G)$ に対し，$V(G) - W$ による G の誘導部分グラフを $G - W$ で表す．グラフ G の最大クリークのサイズを $\omega(G)$ と表記する．n 節点の完全グラフ，閉路をそれぞれ K_n，C_n で表す．グラフ G の補グラフ $(V(G), \{(x,y) | x,y \in V(G), (x,y) \notin E(G)\})$ を $\overline{G}$ で表現する．

G，H をグラフとする．**準同形写像** $f : G \to H$ とは，$x,y \in V(G)$ が G の隣接点対ならば $f(x), f(y)$ も H の隣接点対となるような $V(G)$ から $V(H)$ への写像である [3]．定義より，準同形写像 $f : G \to K_n$ はグラフ G の n-彩色に一致する．これに対応付け，準同形写像 $f : G \to H$ を **G の H-彩色**と呼ぶ．**H-彩色問題**は以下のように定義できる：

与えられたグラフ H に対し，
入力： グラフ G,
質問： グラフ G の H-彩色は可能か？

上記質問を肯定する準同形写像 f が存在するならば，f を **G から H への準同形写像**と呼び，G は **H-彩色可能**であると呼ぶ．但し，H が完全グラフの場合，後者を “G は **$|V(H)|$-彩色可能**” と，同様に H-彩色問題を **$|V(H)|$-彩色問題**と表現することもある．H-彩色可能なグラフのクラスの自明な包含関係として，以下のような性質がある．但し，以降では $\mathcal{L}(H)$ は H-彩色可能なグラフの集合を，$X \subset Y$ は X が Y の真部分集合であることを示す．

定理 1.1 任意の整数 $p \geq 1$，$q \geq 2$ に対し，$\mathcal{L}(K_p) \subset \mathcal{L}(K_{p+1})$．更に，$\mathcal{L}(K_2) \subset \mathcal{L}(C_{2q+1}) \subset \mathcal{L}(K_3) = \mathcal{L}(C_3)$ かつ $\mathcal{L}(C_{2q+1}) \subset \mathcal{L}(C_{2q-1})$． □

定理 1.1 は，従来の p-彩色による階層構造と奇数長閉路 C_{2q+1}-彩色による階層構造の関係を示す．この単純な階層構造を細分する，我々が以前示した結果を下記する．

定理 1.2 *[13]* 任意の整数 $p \geq 2$ に対し，$\mathcal{L}(K_p) \subset \mathcal{L}(\overline{C_{2p+1}}) \subset \mathcal{L}(K_{p+1})$ である． □

定理 1.2 は，$\mathcal{L}(\overline{C_{2p+1}})$ が従来の p-彩色可能なグラフのクラスの階層構造を細分するように存在し，無限に続く階層構造を有することを表す．更に我々は以前下記のように，この新たな階層構造を定める $\overline{C_{2p+1}}$-彩色について，平面グラフの $\overline{C_{2p+1}}$-彩色問題の計算複雑さを明らかにした (表 1 参照)．

定理 1.3 *[14]* 平面グラフの $\overline{C_5}$-彩色，$\overline{C_7}$ 問題は共に *NP*-完全である． □

表 1: 平面グラフの H-彩色問題の計算複雑さ

グラフ H	計算複雑さ	従来表記
K_1	$O(1)$	1-彩色問題
K_2	class P	2-彩色問題
$\overline{C_5}$	NP-完全 (定理 1.3)	
K_3	NP-完全	3-彩色問題 [2]
$\overline{C_7}$	NP-完全 (定理 1.3)	
K_4	$O(1)$	4-彩色問題

このような階層構造の細分化はその美しさもさることながら，H-彩色問題の計算複雑さを議論する際に役立つ．本稿では，定理 1.2 の包含関係が circulant graphs の部分集合として我々が定義する $H(n,k)$ によって，さらに細分化できることを示し，平面グラフの H-彩色問題の計算複雑さが NP- 完全から多項式時間可解に変化する境界を探る．この細分化は既知の C_{2p+1} による階層構造 (定理 1.1 参照) をも内包する．更に平面グラフの $H(n,k)$-彩色に対し，いくつかの NP-完全問題を示す．

2 準備

2.1 Cores

H, H' をグラフとする．任意のグラフ G に対し，G が H-彩色可能であるとき，かつそのときに限り，G が H'-彩色可能である．そのとき，H と H' を **homomorphically equivalent** と呼ぶ．例えば，任意の偶数長閉路 C_{2m} と $C_{2m'}$ $(m, m' \geq 2)$ は homomorphically equivalent である．グラフ H に対し，H から H のどの真部分グラフへも準同形写像が存在しないならば，H を **core** と呼ぶ．例えば，全ての完全グラフや奇数長閉路は core であり，長さ 5 以上の奇数長閉路の補グラフも core である [13]．[15] において，任意のグラフ H は，core でかつ H と homomorphically equivalent な部分グラフ H' をただ一つ持つことが示されている．そのようなグラフ H' を **H の core** と呼ぶ．

表 2: $H(n,k)$ による $\mathcal{L}(H)$ の新たな階層構造 (一部)

K_2		C_9	C_7	C_5		K_3		$\overline{C_7}$		K_4
$H(2,1)$	$\subset$					$H(3,1)$	$\subset$			$H(4,1)$
$H(4,2)$	$\subset$			$H(5,2)$	$\subset$	$H(6,2)$	$\subset$	$H(7,2)$	$\subset$	$H(8,2)$
$H(6,3)$	$\subset$		$H(7,3)$	$\subseteq H(8,3) \subset$		$H(9,3)$	$\subset H(10,3) \subseteq H(11,3) \subset$			$H(12,3)$
$H(8,4)$	$\subset$	$H(9,4)$	$\subset$	$H(10,4)$	$\subset H(11,4) \subset$	$H(12,4)$	$\subset H(13,4) \subset$	$H(14,4)$	$\subset H(15,4) \subset$	$H(16,4)$

グラフ G の隣接しない任意の 2 節点の縮約を，G の **elementary homomorphism** と呼ぶ．グラフ G' が，有限回の elementary homomorphism で G から得られるグラフならば，G' を G の **morphic image** と呼ぶ (G 自身もそれの morphic image と考える)．このとき，以下の性質が知られている．

定理 2.1 *[9] グラフ G が H-彩色可能であるとき，かつそのときに限り，G のある morphic image G' が H の部分グラフと同形になる．* □

2.2 Circulant graphs

定義 2.2 circulant graph$(n; a_1, a_2, \cdots, a_k)$ は，自然数 n と $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ である k 個の整数 a_i $(i = 1, 2, \cdots, k)$ によって定義されるグラフであり，n 節点で節点 i $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ と節点 $i \pm a_1, i \pm a_2, \cdots, i \pm a_k (\mathrm{mod}\ n)$ 間に枝が存在し，他には枝は存在しないグラフである．

K_n，C_n，$\overline{C_n}$ はそれぞれ，$(n; 1, 2, \cdots, \lfloor n/2 \rfloor)$，$(n; 1)$，$(n; 2, 3, \cdots, \lfloor n/2 \rfloor)$ と表現でき，circulant graph の部分クラスを成す．本稿では，次に定義するような circulant graphs の部分クラス $H(n,k)$ を考える．$1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ に対し，$H(n,k) := \overline{(n; 1, 2, \cdots, k-1)}$ と定義する．$H(n,k)$ は circulant graph $(n; 1, 2, \cdots, k-1)$ の補グラフであり，$H(n,k)$ 自身も circulant graph $(n; k, k+1, \cdots, \lfloor n/2 \rfloor)$ である．

3 $\mathcal{L}(H)$ の階層構造の更なる細分化

本節では次の定理を証明する (表 2 参照)．

定理 3.1 任意の整数 $p \geq 2$, n, $k \geq 1$ に対し，$\mathcal{L}(H(n,k)) \subseteq \mathcal{L}(H(n+1,k))$．更に，$H(pk,k)$ の *core* は K_p であり，$\mathcal{L}(H(pk-1,k)) \subset \mathcal{L}(H(pk,k)) \subset \mathcal{L}(H(pk+1,k))$．$H((2p+1)k, 2k)$ の *core* は $\overline{C_{2p+1}}$ であり，$\mathcal{L}(H((2p+1)k-1, 2k)) \subset \mathcal{L}(H((2p+1)k, 2k)) \subset \mathcal{L}(H((2p+1)k+1, 2k))$． □

定理 3.1 が成立するならば，系 3.2 に示す，定理 1.1, 1.2 の階層構造を更に細分する新たな包含関係が得られる (表 2)．

系 3.2 任意の整数 $p \geq 2$ に対し，$\mathcal{L}(H(4p,\ 4)) \subset \mathcal{L}(H(4p+1,\ 4)) \subset \mathcal{L}(H(4p+2,\ 4)) \subset \mathcal{L}(H(4p+3,\ 4)) \subset \mathcal{L}(H(4(p+1),\ 4))$ である．特に $H(4p,\ 4)$ の *core* は K_p，$H(4p+2,\ 4)$ の *core* は $\overline{C_{2p+1}}$，$H(4(p+1),\ 4)$ の *core* は K_{p+1} である． □

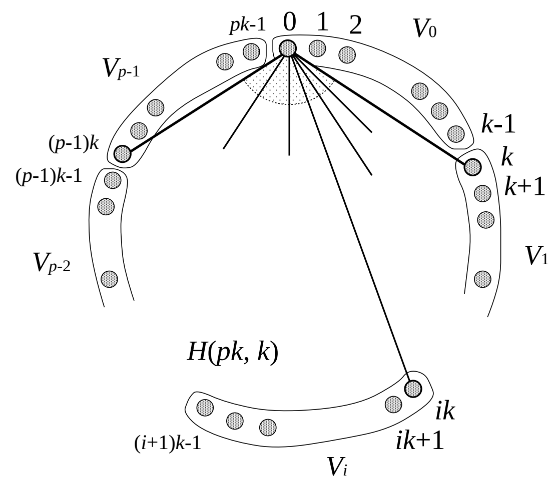

図 1: $H(pk,k)$

補題 3.3 整数 $p \geq 2$, $k \geq 1$ に対し，K_p は $H(pk,k)$ の *core* である．更に，$H(pk,k)$ において節点 0 を含むサイズ p のクリークは $\{0, k, 2k, \cdots, (p-1)k\}$ のみである． □

証明) まず前半を証明する．K_p が core であることは自明．従って，K_p と $H(pk,k)$ が homomorphically equivalent であることを示す．$H(pk,k) = \overline{(pk; 1, 2, \cdots, k-1)}$ より，$\omega(H(pk,k)) = p$．従って，$H(pk,k)$ の部分グラフとして K_p と同形なある完全グラフ K'_p が存在し，その

同形写像 $f : K_p \to K'_p$ は K_p から $H(pk,k)$ への準同形写像となる．

$V(H(pk,k))$ を p 分割し，それぞれを $V_i := \{ik, ik+1, \cdots, ik+(k-1)\}$ $(i \in \{0,1,\cdots,p-1\})$ とする (図 1)．このとき，各 V_i は独立集合であり，どの異なる 2 つの V_i, V_j 間にも隣接点対 $x \in V_i$, $y \in V_j$ が必ず存在する．よって，各 V_i 毎に全ての節点を縮約した結果生成される morphic image は K_p となる．従って $H(pk,k)$ は K_p-彩色可能である．

次に後半を証明する．$\{0,k,2k,\cdots,(p-1)k\}$ 以外の 0 を含むサイズ p のクリーク $C = \{c_0, c_1, c_2, \cdots, c_{p-1}\}$ が存在すると仮定する (但し，$c_0 := 0$, $c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_{p-1}$ とする)．このとき $c_{i+1} - c_i > k$ となる，ある i が必ず存在し，一般性を失うことなく $i = 0$ と仮定できる．任意の $j \neq 0$ に対し $k+1 \leq c_j \leq (p-1)k$ となる．$c_{j+1} - c_j \geq k$ より，$c_{p-1} \geq (k+1)+(p-2)k = (p-1)k+1$．従って，このような C は存在し得ない． □

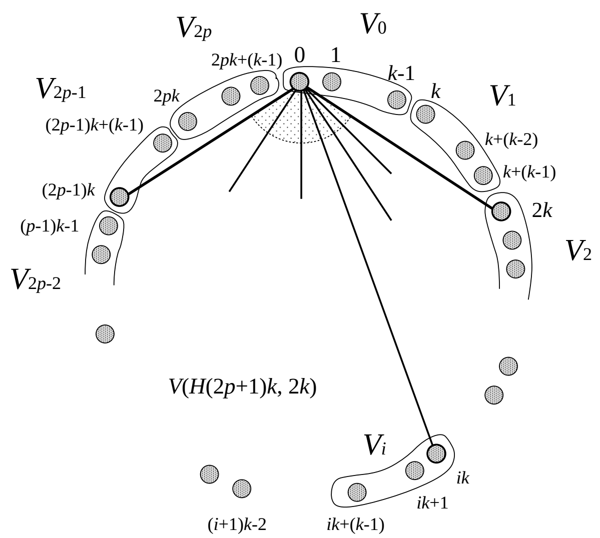

図 2: $H((2p+1)k, 2k)$

補題 3.4 整数 $p \geq 2$, $k \geq 1$ に対し，$\overline{C_{2p+1}}$ は $H((2p+1)k, 2k)$ の *core* である．更に，$H((2p+1)k, 2k)$ において $\overline{C_{2p+1}}$ を誘導する，節点 0 を含む節点部分集合は $\{0, k, 2k, \cdots, 2pk\}$ のみである． □

証明) まず前半を証明する．[13] より $\overline{C_{2p+1}}$ は core である．従って，$\overline{C_{2p+1}}$ と $H((2p+1)k, 2k)$ が homomorphically equivalent であることを示す．$H((2p+1)k, 2k)$ を $2p+1$ 分割し，それぞれを $V_i := \{ik, ik+1, \cdots, ik+(k-1)\}$ $(i \in \{0,1,\cdots,2p\})$ と定義する (図 2)．$\{0, k, 2k, \cdots, 2pk\}$ による $H((2p+1)k, 2k)$ の誘導部分グラフは $\overline{C_{2p+1}}$ と同形となり，$\overline{C_{2p+1}}$ は $H((2p+1)k, 2k)$-彩色可能である．

各 V_i は独立集合である．任意の V_i, $V_{i\pm1(\bmod\ 2p+1)}$ に対し，どの 2 つの点対 $x \in V_i$, $y \in V_{i\pm1(\bmod\ 2p+1)}$ も隣接せず，その他のどの異なる 2 つの V_i, V_j $(j \neq i, i\pm1(\bmod\ 2p+1))$ 間には隣接点対 $x \in V_i$, $y \in V_j$ が必ず存在する．よって，各 V_i 毎に全ての節点を縮約した結果生じる morphic image は $\overline{C_{2p+1}}$ となり，$H((2p+1)k, 2k)$ は $\overline{C_{2p+1}}$-彩色可能である．

次に後半を証明する．$\overline{C_{2p+1}} = H(2p+1, 2)$ と同形なグラフを誘導する，点 0 を含む $H((2p+1)k, 2k)$ の節点部分集合を $V' = \{v_0, v_1, v_2, \cdots, v_{2p}\}$ とする (但し，$v_0 := 0$, $v_0 < v_1 < v_2 < \cdots < v_{2p}$)．$\{0, k, 2k, \cdots, 2pk\}$ は所望の V' の一つであり，V' は必ず存在する．このとき一般性を失うことなく，v_0 が $\overline{C_{2p+1}}$ 上の点 0 に対応すると仮定できる．さらに $H((2p+1)k, 2k)$ の対称性から，任意の v_i $(i \in \{0,1,2,\cdots,2p\})$ が $\overline{C_{2p+1}}$ 上の点 i に対応すると仮定しても一般性を失わない．よって $0 < |v_i - v_{i+1(\bmod\ (2p+1)k)}| < 2k$.

任意の i に対し $|v_i - v_{i+1(\bmod\ (2p+1)k)}| = k$ ならば $V' = \{0, k, 2k, \cdots, 2pk\}$ なので，$|v_i - v_{i+1(\bmod\ (2p+1)k)}| \neq k$ となるある i が存在すると仮定し，矛盾を導く．一般性を失うことなく $0 < |v_i - v_{i+1(\bmod\ (2p+1)k)}| < k$ となる i が存在すると仮定できる (全ての i に対し $k < |v_i - v_{i+1(\bmod\ (2p+1)k)}| < 2k$ ならば，$|V(H((2p+1)k, 2k))| = (2p+1)k$ に反する)．$i = 0$ と仮定しても一般性を失わず，よって $v_1 < k$ となる．V' の定義より，$(v_0, v_2), (v_1, v_{2p}) \in E(H(2p+1)k, 2k)$ となり，$j = 2, 3, \cdots, 2p$ に対し $v_j \in \{2k, 2k+1, \cdots, v_1 - 2k(\bmod\ (2p+1)k)\}$．従って $v_{2p} \leq v_1 - 2k(\bmod\ (2p+1)k) < 2pk$．一方 $\{v_2, v_4, \cdots, v_{2p}\}$ による誘導部分グラフは K_p となり，任意の $j \in 1, 2, \cdots, p-1$ に対し $|v_{2j} - v_{2j+2}| \geq 2k$ でなければならない．以上より，$v_{2p} \geq 2k(p-1) + 2k = 2pk$ となり，$v_{2p} < 2pk$ に反する． □

補題 3.5 $H(n,k)$ と $H(n+1,k)$ $(n \geq 1,\ 1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor)$ を考える．このとき $\mathcal{L}(H(n,k)) \subseteq \mathcal{L}(H(n+1,k))$． □

証明) $H(n,k)$ が $H(n+1,k)$ の部分グラフであることを示す．$H(n,k)$ の定義より，$H(n,k)$ において各節点 i は $i \pm 1(\bmod\ n), i \pm 2(\bmod\ n), \cdots, i \pm k-1(\bmod\ n)$ とのみ隣接せず，同様に $H(n+1,k)$ では $i \pm 1(\bmod\ n+1), i \pm 2(\bmod\ n+1), \cdots, i \pm k-1(\bmod\ n+1)$ とのみ隣接しない．従って $d_{H(n+1,k)}(i) = d_{H(n,k)}(i) + 1$ となり，

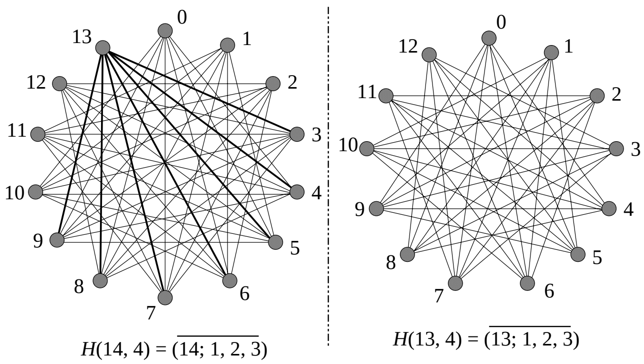

図 3: $H(14,4)$ と $H(13,4)$

$H(n+1,k)$ とある $i \in V(H(n+1,k))$ に対し，$H(n,k)$ は誘導部分グラフ $H(n+1,k)-\{i\}$ の部分グラフとなる (図 3 参照)． □

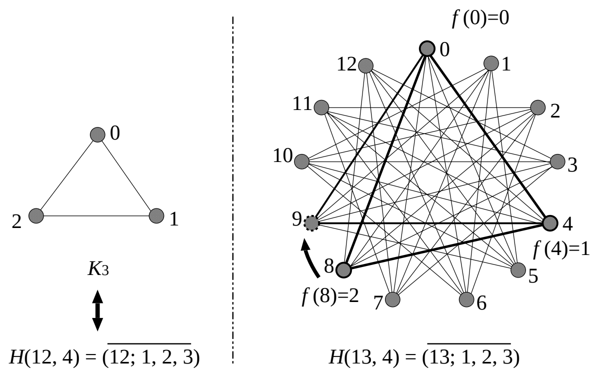

図 4: $H(pk+1,k)$ の K_p-彩色

補題 3.6 任意の整数 $p \geq 2,\ k \geq 1$ に対し，$\mathcal{L}(H(pk-1,k)) \subset \mathcal{L}(H(pk,k)) \subset \mathcal{L}(H(pk+1,k))$ である． □

証明)

(i) $\mathcal{L}(H(pk-1,k)) \subset \mathcal{L}(H(pk,k))$：

$\omega(H(pk,k)) = \lfloor pk/k \rfloor = p,\ \omega(H(pk-1,k)) = \lfloor (pk-1)/k \rfloor = p-1$ より，準同形写像 $f: H(pk,k) \to H(pk-1,k)$ は存在し得ない．

(ii) $\mathcal{L}(H(pk,k)) \subset \mathcal{L}(H(pk+1,k))$：

背理法で証明する．$H(pk,k)$ の core が完全グラフ K_p であることから，$H(pk+1,k)$ が K_p-彩色可能であると仮定する ($V(K_p) := \{0,1,\cdots,p-1\}$ と定義する)．このとき，$\{0,k,2k,\cdots,(p-1)k\}$ による $H(pk+1,k)$ の誘導部分グラフは K_p となる．$H(pk+1,k)$ の K_p-彩色 f において，$f(x) = \frac{x}{k},\ x \in \{0,k,\cdots,(p-1)k\}$ としても一般性を失わない．また，$\{0,k,2k,\cdots,(p-2)k,(p-1)k+1\}$ による $H(pk+1,k)$ の誘導部分グラフも K_p となり，$f((p-1)k+1) = p-1$ でなければならない．同操作を $pk+1$ ステップ繰り返すと，$f(0) = p-1$ となり，$f(0) = 0$ の仮定に反する (図 4 参照)．従って，$H(pk+1,k)$ は $H(pk,k)$-彩色不可能 (K_p-彩色不可能) である． □

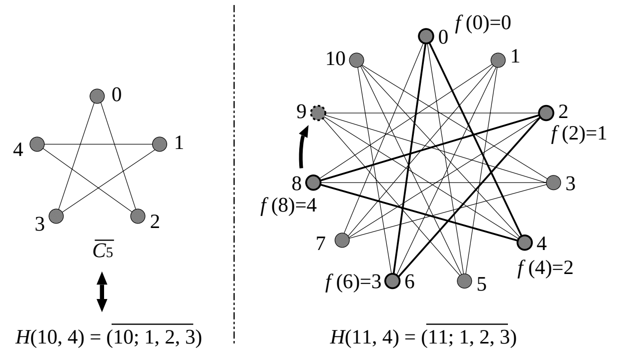

図 5: $H((2p+1)k+1,2k)$ の $\overline{C_{2p+1}}$-彩色

補題 3.7 任意の整数 $p \geq 2,\ k \geq 1$ に対し，$\mathcal{L}(H((2p+1)k-1,2k)) \subset \mathcal{L}(H((2p+1)k,2k)) \subset \mathcal{L}(H((2p+1)k+1,2k))$ である． □

証明)

(i) $\mathcal{L}(H((2p+1)k-1,2k)) \subset \mathcal{L}(H((2k+1)k,2k))$：

補題 3.4 より，$H((2p+1)k,2k)$ の core $\overline{C_{2p+1}}$ を誘導する，節点 0 を含む節点部分集合は $\{0,k,2k,\cdots,2pk\}$ のみである．一方，補題 3.5 より，$H((2p+1)k-1,2k)$ は $H((2k+1)k,2k)$ の真部分グラフであり，特に $2k>1$ より誘導部分グラフでない．

今，$H((2p+1)k,2k)$ の core の節点集合を一般性を失うことなく，$\{0,k,2k,\cdots,2pk\}$ と仮定でき，$H((2p+1)k,2k)$ から節点 v $(0<v<k)$ を削除することを考える．このとき，$(0,2k) \in E(H((2p+1)k,2k))$ であるが，$H((2p+1)k,2k)-\{v\}$ の真部分グラフである $H((2p+1)k-1,2k)$ において，点対 $0,2k$ に対応する $0,2k-1$ は隣接しない．

(ii) $\mathcal{L}(H((2p+1)k,2k)) \subset \mathcal{L}(H((2p+1)k+1,2k))$：

背理法で証明する．$H((2p+1)k,2k)$ の core が $\overline{C_{2p+1}}$ であることから，$H((2p+1)k+1,2k)$ が $\overline{C_{2p+1}}$-彩色可能であると仮定できる ($V(C_{2p+1}) := \{0,1,\cdots,2p\}$ と定義する)．このとき，$\{0,k,2k,\cdots,2pk\}$ による $H((2p+1)k+1,2k)$ の誘導部分グラフは $\overline{C_{2p+1}}$ となる．$H((2p+1)k+1,2k)$ の $\overline{C_{2k+1}}$-彩色において，$f(x) = \frac{x}{k},\ x \in \{0,k,2k,\cdots,2pk\}$

としても一般性を失わない．また，$\{0, k, 2k, \cdots, (2p-1)k, 2pk+1\}$ による $H((2p+1)k, 2k)$ の誘導部分グラフも $\overline{C_{2k+1}}$ となり，$f(2pk+1) = 2p$ でなければならない．同操作を $(2p+1)k+1$ ステップ繰り返すと，$f(0) = 2p$ となり，$f(0) = 0$ の仮定に反する (図 5 参照)．従って，$H((2p+1)k, 2k)$ は $H((2p+1)k, 2k)$-彩色不可能 ($\overline{C_{2p+1}}$-彩色不可能) である． □

定理 3.1 の証明)　補題 3.5，3.6，3.7 より明らか． □

補題 3.3，3.4 の証明と同様な手法で以下の命題も得られる (証明は省略).

命題 3.8 整数 $n \geq 2$，$1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$，$r \geq 2$ に対し，$H(rn, rk)$ は *core* でない．即ち，$H(n, k)$ は $H(rn, rk)$ の *homomorphically equivalent* な部分グラフである． □

4　平面グラフの $H(n, 4)$-彩色問題

定理 1.1 及び 1.2 の階層構造を更に細分する新たな包含関係を我々は系 3.2 で示した．本節では系 3.2 の階層構造に着目し，平面グラフの $H(n, 4)$-彩色問題の計算複雑さについて議論する (但し，$n \geq 8$)．$n \geq 16$ の場合，系 3.2 より $\mathcal{L}(K_4) \subseteq \mathcal{L}(H(n, 4))$ となり，任意の平面グラフは多項式時間で $H(n, 4)$-彩色可能である．更に $H(8, 4)$-彩色は 2-彩色と等価であり，多項式時間可解である．一方，$n \in \{10, 12, 14\}$ の場合，既知の結果より $H(n, 4)$-彩色問題は NP-完全である (表 1 参照).

残りの $n \in \{9, 11, 13, 15\}$ の場合については，定理 4.1 に示すようにその全てが NP-完全となることを我々は示した．本稿では紙面の都合上，$H(9,\ 4)$-彩色の場合についてのみ取り扱うが，それ以外も同様の手法で証明可能である．

定理 4.1 $n \in \{9, 11, 13, 15\}$ に対し，平面グラフの $H(n,\ 4)$-彩色問題は *NP*-完全である． □

4.1　$H(9,\ 4)$-彩色問題の NP-完全性

奇数長閉路 C_{2m+1} は $H(2m+1, m)$ と表現でき，$H(9,\ 4)$ は長さ 9 の閉路 C_9 を意味する．$H(2m+1, m)$ は定理 3.1 で示した階層構造において，各 k に対し $\mathcal{L}(K_2)$ $(= \mathcal{L}(H(2k, k)))$ を真に含む最小のクラスとして存在する (表 2 参照)．本節では，平面グラフの $H(9,\ 4)$-彩色が NP-完全であることを含む以下の定理を示す．

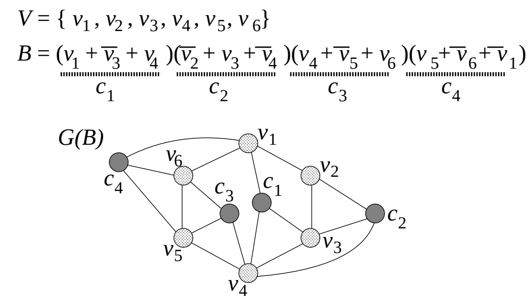

図 6: 平面 3SAT と $G(B)$

定理 4.2 整数 $m \geq 1$ に対し，平面グラフの C_{2m+1}-彩色問題は *NP*-完全である． □

$\mathcal{L}(C_{2m+1})$ は定理 1.1 で示したような階層構造を有している．従って定理 4.2 が成立するならば，彩色能力が 2-彩色に無限に近いが，2-彩色よりも真に彩色能力の高い $H(n, k)$-彩色問題が NP-完全であるという興味深い結果が得られる．

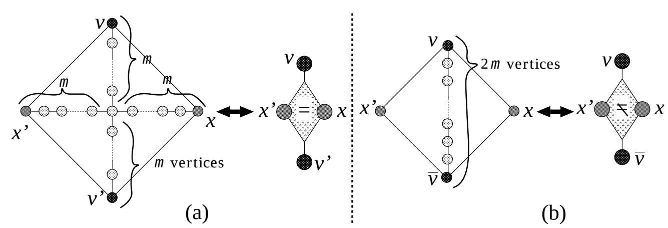

図 7: G の構成要素 (1)

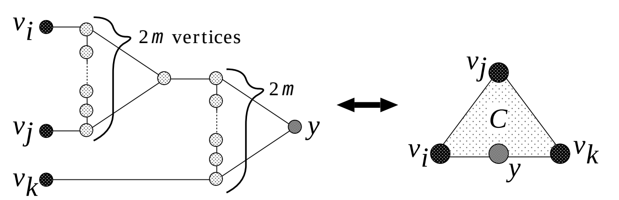

図 8: G の構成要素 (2)

定理 4.2 の証明)　本問題がクラス NP に属すことは自明である．従って以下では既知の NP-完全問題の一つである，平面 3SAT[8] から平面グラフの C_{2m+1}-彩色問題への多項式時間帰着を示す．

定義 4.3 平面 *3SAT* とは，論理式 $B = \{c_1, \cdots, c_m\}$ から構成される以下のグラフ $G(B)$ が平面グラフであるような *3SAT* である *(*但し，変数の集合を $\{v_1, \cdots, v_n\}$ と

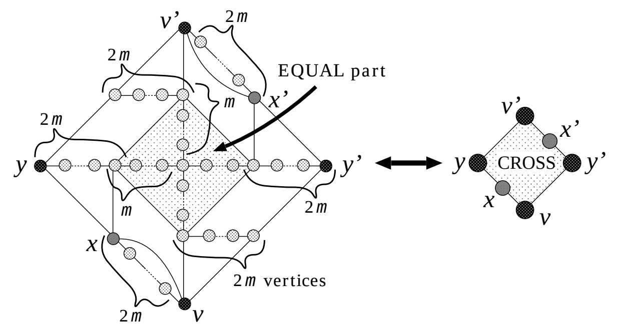

図 9: G の構成要素 (3)

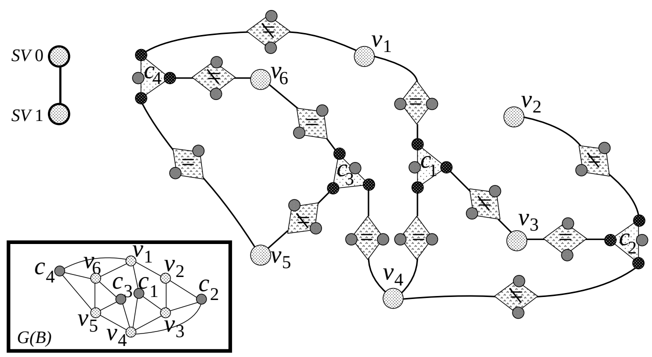

図 10: G の構成法 (1)

する): $N = \{c_j | 1 \leq j \leq m\} \cup \{v_i | 1 \leq i \leq n\}$, $A = \{\{c_j, v_i\} | v_i \in c_j \ or \ \overline{v_i} \in c_j\} \cup \{\{v_i, v_{i+1}\} | 1 \leq i < n\} \cup \{\{v_n, v_1\}\}$ であるグラフ $G(B) = (N, A)$(図 6 参照).

B を平面 3SAT の入力として与えられる，任意の節の集合とする．以下では，B が充足可能であるとき，かつそのときに限り，C_{2m+1}-彩色可能であるようなグラフ G を構成する．以降では，$C_{2m+1} = (\{0, 1, 2, \cdots, 2m\}, \{(i, i+1 (\mathrm{mod}\ 2m+1)) | i \in \{0, 1, 2, \cdots, 2m\}\})$ 上の 3 つの色を特殊な色として扱う:色 1 を 3SAT での真に，色 $2m$ を偽に対応させるように，色 0 を使用．G の構成に使用する，いくつかの構成要素を以下に示す．

図 7(a) に示すグラフの任意の C_{2m+1}-彩色 f において，$f(x) = 0$ ならば $f(v) = f(v') = 1$ または $f(v) = f(v') = 2m$ となる．同様に，(b) のグラフの C_{2m+1}-彩色 f において，$f(x) = 0$ ならば "$f(v) = 1$ かつ $f(v') = 2m$" または "$f(v) = 2m$ かつ $f(v') = 1$" となる．これらのグラフはそれぞれ図中右側のように便宜的に書き，**EQUAL part**，**NOT part** と呼ぶ．

B の各節に対応する，G の構成要素を図 8 に示す．図 8 中左記のグラフの C_{2m+1}-彩色 f において，$f(y) = 1$, $f(v_i), f(v_j), f(v_k) \in \{1, 2m\}$ と仮定する (後述の，G 全体の構成でこの仮定を実現する)．このとき，v_i, v_j, v_k 全てが色 $2m$ で彩色された場合のみ，このグラフは C_{2m+1}-彩色不可能である．これを図中右側のように略記し，**CLAUSE part** と呼ぶ．

G の構成において，G の平面性を維持するために必要となる構成要素を図 9 に示す．図 9 中左記のグラフ C_{2m+1}-彩色 f において，$f(x) = f(x') = 0$，$f(y) = f(y') = 1$ と仮定する (この仮定も先と同様，G 全体での構成で実現する)．このとき，$f(v) = f(v') = 1$ または $f(v) = f(v') = 2m$ となる．このグラフを図 9 中右側のように略記し，**CROSS part** と呼ぶ．なお，図 8，9 の構成要素は，[2] で示された図に少し変更を加えて構成している．

$G(B)$ からの G の構成法： 平面 3SAT の任意の問題例 B に対応する平面グラフ $G(B)$ が存在する．それを元に，グラフ G を以下のように構成する．図 10 のように，特殊な 2 節点 $SV0$，$SV1$ と置き，$G(B)$ の各節点・枝を上記構成要素で置き換えて，平面に配置する．

更に，各 CLAUSE parts の節点 y を節点 $SV1$ に EQUAL parts を使って接続する (図 11)．その際，枝に交差が生じる場合は CROSS parts を使って平面性を維持し，最後に構成要素上に存在する全ての節点 x を節点 $SV0$ に EQUAL parts を使って接続する．枝の交差は図 12 に示すように EQUAL parts を用いて回避でき，平面グラフ G が構成できる．

解の一致に関しては，B が充足可能であるならば，B を充足させる変数への $(0, 1)$ の割当てに従って，1 ならば色 1 を，0 ならば色 $2m$ を各変数に対応する G の各節点に彩色する．このとき，G の構成に使用した全ての構成要素は，上記説明の通り C_{2m+1}-彩色可能であることは明らか (特殊な 2 節点 $SV0$，$SV1$ はそれぞれ，色 0，1 で彩色される)．G が C_{2m+1}-彩色可能であるとする．一般性を失うことなく，節点 $SV0$，$SV1$ をそれぞれ色 0，1 で彩色したと仮定でき，このとき B の各節に対応する構成要素内では，節点 v_i，v_j，v_k のうち少なくとも一点は色 1 で彩色される．B の各変数に対応する彩色は，色 1 または $2m$ のいずれかとなり，この彩色に対応する変数 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ への (0, 1) の割当ては，明らかに B を充足させる． □

5 まとめ

本稿では，従来の彩色問題の拡張である H-彩色問題について研究し，特に H- 彩色可能なグラフのクラス $\mathcal{L}(H)$

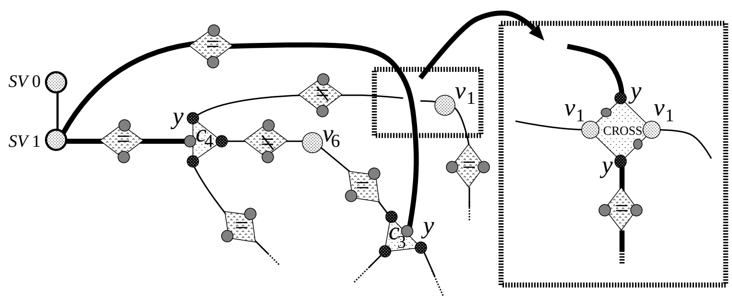

図 11: G の構成法 (2)

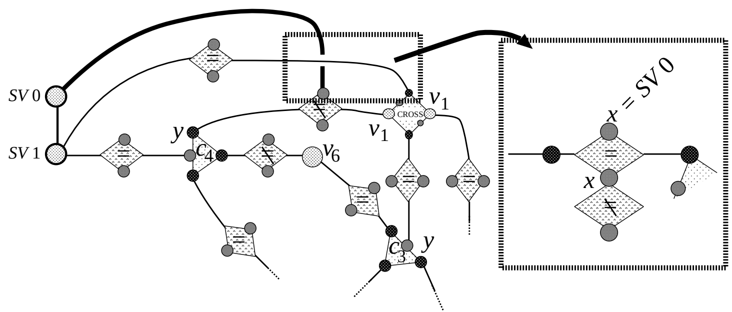

図 12: G の構成法 (3)

の階層構造に着目し，既知の階層構造を細分するような新たな包含関係を示した．更に平面グラフの $H(n,k)$-彩色に対し，いくつかの NP-完全問題を示した．

参考文献

[1] W. D. Fellner, "On minimal graphs," Theoretical Computer Science, **17**, pp. 237-267, 1982.

[2] M. R. Garey, D. S. Johnson, & L. Stockmeyer, "Some simplified NP-complete graph problems," Theoretical Computer Science, **1**, pp. 237-267, 1976.

[3] C. D. Godsil, & G. F. Royle, *Algebraic graph theory*, Springer, New York, 2001.

[4] P. Hell, "Absolute planar retracts and four-color conjecture," Journal of Combinatorial Theory, **B 17**, pp. 5-10, 1974.

[5] P. Hell, & J. Nesetril, "Cohomomorphisms of graphs and hypergraphs," Math. Nachr., **87**, pp. 53-61, 1979.

[6] P. Hell, & J. Nesetril, "On the Complexity of H-Coloring," Journal of Combinatorial Theory, **B 48**, pp. 92-110, 1990.

[7] T. R. Jensen, & B. Toft, *Graph Coloring Problems*, John Wiley & Sons, New York, 1995.

[8] D. Lichtenstein, "Planar formulae and their uses," SIAM J. Comput., **11**, no. 2, pp. 329-343, 1982.

[9] H. A. Maurer, A. Salomaa, & D. Wood, "Colorings and interpretations : A connection between graphs and grammar forms," Discrete Applied Mathematics, **3**, pp. 119-135, 1981.

[10] H. A. Maurer, J. H. Sudborough, & E. Welzl, "On the complexity of the general coloring problem," Inform. and Control, **51**, pp. 123-145, 1981.

[11] A. Uejima, "A research on Coloring problem with restrictions of adjacent colors," Master Thesis of Toyohashi Univ. of Technology, Feb., 2000.

[12] A. Uejima, H. Ito, H. Uehara, and M. Yokoyama, "Coloring problem with restrictions of adjacent colors," Intl. Trans. in Op. Res., vol. 9, no. 2, pp. 183–194, 2002.

[13] A. Uejima, and H. Ito, "On H-coloring problems with H expressed by complements of cycles, bipartite graphs, and chordal graphs," IEICE Transactions, vol. E85-A, no. 5, pp. 1026–1030, 2002.

[14] A. Uejima, H. Ito, and T. Tsukiji, "$\overline{C_7}$-coloring problem (sumbitted)."

[15] E. Welzl, "Color families are dense," Theoret. Comput. Sci., **17**, pp. 29-41, 1970.