閉ジャクソンネットワークに対するパーフェクトサンプリング法

来嶋 秀治† 松井 知己†

† 東京大学 大学院情報理工学系研究科 数理情報学専攻
〒 113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1
E-mail: †{kijima,tomomi}@misojiro.t.u-tokyo.ac.jp

あらまし 本稿では閉ジャクソンネットワークに対するパーフェクトサンプリング法を提案する。提案するアルゴリズムはマルコフ連鎖を用いたサンプリング法で、単調 CFTP (Coupling From The Past) アルゴリズムに基づく Las Vegas 型の乱択アルゴリズム (randomized algorithm) である。我々は閉ジャクソンネットワークの積形式解を唯一の極限分布に持つ新しいマルコフ連鎖を提案する。アルゴリズムは平均 $O(L^3 \ln(KL))$ 回の推移で終了して、積形式解に厳密に従う確率変数を返す。ただし、L はネットワークのノード数であり、K はネットワーク内の顧客数である。

キーワード マルコフ連鎖、パーフェクトサンプリング、カップリング、閉ジャクソンネットワーク

Perfect Sampler for Closed Jackson Networks

Shuji KIJIMA† and Tomomi MATSUI†

† Department of Mathematical Informatics,
Graduate School of Information Science and Technology,
University of Tokyo,
7-3-1, Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo, 113-8656, Japan.
E-mail: †{kijima,tomomi}@misojiro.t.u-tokyo.ac.jp

Abstract In this paper, we propose a perfect (exact) sampler for closed Jackson Networks. Our algorithm is a sampling with Markov chain, and realize the sampling from the target distribution exactly based on monotone Coupling from the Past (monotone CFTP). We propose a new Markov chain whose unique distribution is the product form solution for a closed Jackson Network, and show the chain is monotone and rapidly mixing. The expected running time of our algorithm is $O(L^3 \ln(KL))$ where L is the number of nodes in the network and K is the number of customers.

Key words Markov chain, Perfect sampling, Coupling from the past, Closed Jackson network

1. はじめに

本稿では閉ジャクソンネットワークに対するパーフェクトサンプリング法を提案する。提案するアルゴリズムはマルコフ連鎖を用いたサンプリング法で、単調 CFTP (Coupling From The Past) アルゴリズムに基づく Las Vegas 型の乱択アルゴリズム (randomized algorithm) である。

ジャクソンモデルは、待ち行列ネットワークにおける基本的で重要なモデルである。ジャクソンネットワークは積形式解を持つことが知られている [6]。この積形式解の規格化定数を計算することで、スループット、平均滞在時間、センタの使用率等の評価指標が計算できる [7], [10]。

積形式解の規格化定数を計算するアルゴリズムとして、Buzen 法 [3] があるが、このアルゴリズムは顧客の数に依存する擬多項式時間アルゴリズムである。閉ジャクソンネットワークにおける積形式解の規格化定数を計算する弱多項式時間アルゴリズムは知られていない。Chen and O'Cinneide [4] は乱択化 (randomized) することで弱多項式時間の近似解法を設計することを試みたが、非常に特殊なケースについてしか成功していない。

本稿では単一サーバ、単一クラスの閉ジャクソンネットワークに対して、積形式解に従うサンプリング法を提案する。すなわちネットワークは強連結で、ノードは 1 つずつサーバをもち、顧客の種類は 1 種類しかない。またネットワークから外へ出たり、外から新たに入ってくる顧客は無いものとする。本稿では新しいマルコフ連鎖を提案する。提案するマルコフ連鎖は積形式解を唯一の極限分布としてもつが、モデルにおける推移をシミュレートするものではないことに注意が必要である。こ

のマルコフ連鎖は積形式解の正規化定数を計算することなく実行することができるため、正規化定数を計算するための精度の保障された近似アルゴリズムを設計が可能となる。我々はこのマルコフ連鎖を用いて Coupling from the Past (CFTP) に基づくパーフェクトサンプリング法を提案する。小沢、高橋、高橋 [11] は閉ジャクソンネットワークに対するパーフェクトサンプリング法を提案しているが、人工的に構築した開ジャクソンネットワークに対して顧客の推移をシミュレートするものであり、多項式時間性については不明である。

CFTP アルゴリズムは Propp and Wilson によって提案され、画期的アルゴリズムとして注目を浴びている [12]。このアルゴリズムでは、マルコフ連鎖のシミュレーションを工夫することで定常分布に厳密に従うサンプリング (Perfect sampling) を可能とする。Perfect sampling を行う利点は、定常分布に厳密に従うサンプリングを行うことで、誤差パラメータを考慮する必要が無くなる点である。特に精度の高いサンプリングを要する時、Perfect sampling は近似サンプリングよりも速いアルゴリズムとなる。

しかし CFTP アルゴリズムは、そのままではマルコフ連鎖の全状態数に比例する計算量を必要とするため、状態数の多い対象に対して効率的ではない。対象とするマルコフ連鎖に「単調性」がある時、効率的な CFTP アルゴリズムの設計が可能となる。これを単調 CFTP アルゴリズムと呼ぶ。一般に単調なマルコフ連鎖の設計は困難で、これまで実際に単調 CFTP アルゴリズムの設計された例は少ない。

本稿では提案したマルコフ連鎖が単調であることを示す。さらに提案したサンプリング法が弱多項式時間で実行できることを示す。

2. サンプリングアルゴリズム

本稿では実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表し、また整数（非負整数、正整数）全体の集合をそれぞれ $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}_{++}$) で表す。

閉ジャクソンネットワークのノード数を L とし、ネットワーク内に居る顧客の数を K とする。各ノード上のサーバは 1 つで、顧客のクラスも 1 つとする。このネットワークは確率行列 $P = P_{ij}$ をもち、ノード i でのサービスを終了した顧客は確率 P_{ij} にしたがってノード j に進む。ジャクソンネットワークは強連結であると仮定する。ネットワーク内の顧客はサービスが終了してネットワークから出ることは無く、また、新たに顧客がネットワークに入ってくることは無い。今、確率行列 P に対してベクトル $\boldsymbol{\theta}$ は $\boldsymbol{\theta}P = \boldsymbol{\theta}$ を満たすとする。行列 P は既約なので、このような $\boldsymbol{\theta}$ はスカラー倍を除き唯一である。また μ_i をノード i での平均サービス時間とする。集合 Ω を $\Omega \stackrel{\text{def.}}{=} \{x = (x_1, \ldots, x_L) \in \mathbb{Z}_+^L \mid \sum_{i=1}^{L} x_i = K\}$ で定義する。このとき、この閉ジャクソンネットワークは積形式解 $\pi \in \mathbb{R}_{++}^{\Omega}$ をもち、状態 $x \in \Omega$ は $\pi(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{G}\prod_{i=1}^{L}\left(\frac{\theta_i}{\mu_i}\right)^{x_i}$ である。ただし G は正規化定数である。以下、表記の簡単のため $\alpha_i \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\theta_i}{\mu_i}$ とする。

添え字 $i \in \{1, \ldots, L-1\}$ および正整数 $k \in \{0, \ldots, K\}$ に対して関数 $g_i^k : \{0, \ldots, k\} \to (0, 1]$ を

$$g_i^k(l) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\sum_{s=0}^{l} \alpha_i^s \alpha_{i+1}^{k-s}}{G_i^k}$$

で定義する。ただし $G_i^k \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{s=0}^{k} \alpha_i^s \alpha_{i+1}^{k-s}$ である。

以下で状態空間 Ω を持つマルコフ連鎖 $\mathcal{M}_{\mathrm{P}}$ の提案を行う。現在の状態を $X \in \Omega$ とする。このとき、推移 $X \mapsto X'$ は次のように実行される。まず、実数乱数 $\lambda \in [1, L)$ を生成し、$i := \lfloor \lambda \rfloor$, $k := X_i + X_{i+1}$ とする。次に、$l \in \{0, 1, \ldots, k\}$ を $g_i^k(l-1) \leqq (\lambda - \lfloor \lambda \rfloor) < g_i^k(l)$ を満たす唯一の値とする。最後に、

$$X'_j := \begin{cases} l & (j = i), \\ k - l & (j = i+1), \\ X_j & (\text{それ以外}), \end{cases}$$

とする。

提案したマルコフ連鎖に対する update function $\phi : \Omega \times [1, L) \to \Omega$ を $\phi(X, \lambda) \stackrel{\text{def.}}{=} X'$ とする。このマルコフ連鎖は明らかに既約で非周期的であり、detailed balance equations が成り立つことから、マルコフ連鎖 $\mathcal{M}_{\mathrm{P}}$ の定常分布は積形式解と等しい。時刻 t_1, t_2 ($t_1 < t_2$) に対して乱数列 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda[t_1], \lambda[t_1+1], \ldots, \lambda[t_2-1]) \in [1, L)^{t_2-t_1}$ が与えられた際の時刻 t_1 から t_2 への $\mathcal{M}_{\mathrm{P}}$ の推移は決定的関数 $\Phi_{t_1}^{t_2}(x, \boldsymbol{\lambda}) : \Omega \times [1, L)^{t_2-t_1} \to \Omega$ で表現され、$\Phi_{t_1}^{t_2}(x, \boldsymbol{\lambda}) \stackrel{\text{def.}}{=} \phi(\phi(\cdots(\phi(x, \lambda[t_1]), \ldots, \lambda[t_2-2]), \lambda[t_2-1])$ と定義される。

次に特別な状態として $X_{\mathrm{U}}, X_{\mathrm{L}} \in \Omega$ を

$$X_{\mathrm{U}} \stackrel{\text{def.}}{=} (K, 0, 0, \ldots, 0), \quad X_{\mathrm{L}} \stackrel{\text{def.}}{=} (0, 0, \ldots, 0, K).$$

と定義する。

これらを用いて、閉ジャクソンネットワークの積形式解に対するサンプリングアルゴリズムを次のように定める。

[アルゴリズム 1]

Step 1. 時間に関する初期値を $T := -1$ とし、過去に遡る。空列 $\boldsymbol{\lambda}$ を用意する。

Step 2. 一様実数乱数 $\lambda[T], \lambda[T+1], \ldots, \lambda[\lceil T/2 \rceil - 1] \in [1, n)$ を生成し、$\boldsymbol{\lambda} := (\lambda[T], \lambda[T+1], \ldots, \lambda[-1])$ とする。

Step 3. 時刻 T における 2 本のマルコフ連鎖の状態をそれぞれ X_{U} と X_{L} し、共通の数列 $\boldsymbol{\lambda}$ を用いて update function ϕ に従い、マルコフ連鎖を時刻 T から時刻 0 に至るまで推移させる。

Step 4. [Coalescence check]

(a) もし $\exists Y \in \Omega$, $Y = \Phi_T^0(X_{\mathrm{U}}, \boldsymbol{\lambda}) = \Phi_T^0(X_{\mathrm{L}}, \boldsymbol{\lambda})$, ならば値 Y を返し、停止する。

(b) もしそうでなければ、時刻を $T := 2T$ として Step 2 に戻る。

以下は本稿の主要な結果である。

[定理 1] アルゴリズム 1 は確率 1 で（有限時間で）停止して、状態を 1 つ出力する。その状態は閉ジャクソンネットワークの積形式解に厳密に従う確率変数の実現値である。

[条件 1] 積形式解のパラメータは非増加順に並ぶ。すなわち $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_L$ が成り立つ。

［定理 2］ 条件 1 の下、アルゴリズム 1 の計算時間の期待値は $O(L^3 \ln(KL))$ である。ただし、L はノード数であり、K は系内人数を表す。

なお条件 1 は $O(L \ln L)$ 時間の前処理で得られる。

3. マルコフ連鎖の単調性

本章では Ω 上に半順序を導入し、マルコフ連鎖 $\mathcal{M}_{\mathrm{P}}$ が単調であることを示す。任意のベクトル $X \in \Omega$ に対して、**累積和ベクトル** $\mathrm{c}_X \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$ を

$$\mathrm{c}_X(i) \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} 0 & (i=0), \\ X_1 + X_2 + \cdots + X_i & (i \in \{1,2,\ldots,L\}), \end{cases}$$

で定義する。ただし、$\mathrm{c}_X = (\mathrm{c}_X(0), \mathrm{c}_X(1), \ldots, \mathrm{c}_X(L))$ とする。明らかに Ω と $\{\mathrm{c}_X \mid X \in \Omega\}$ の間には一対一対応が存在する。任意の状態対 $X, Y \in \Omega$ に対して、$X \succeq Y$ の必要十分条件を $\mathrm{c}_X \geqq \mathrm{c}_Y$ とする。明らかに "$\succeq$" は Ω 上の半順序である。また、$\forall X \in \Omega$, $X_{\mathrm{U}} \succeq X \succeq X_{\mathrm{L}}$ も簡単に分かる。

いま $X, Y \in \Omega$ に対して、ある j が存在して

$$\mathrm{c}_X(i) - \mathrm{c}_Y(i) = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

が成り立つとき、X が (j で) Y を**被覆** (*cover*) すると言い、$X \cdot\!\succ Y$ (または $X \cdot\!\succ_j Y$) であらわす。

次の補題は単調性を証明する鍵となる。

［補題 3］ もし 2 つの相異なる状態 $X, Y \in \Omega$ が $X \cdot\!\succ_j Y$ ならば、$\forall \lambda \in [1, n)$, $\phi(X, \lambda) \succeq \phi(Y, \lambda)$ が成り立つ。

証明: 簡単のため $X' = \phi(X, \lambda)$ および $Y' = \phi(Y, \lambda)$ で表す。まず、任意の添え字 $i \neq \lfloor \lambda \rfloor$ に対しては $\mathrm{c}_X(i) = \mathrm{c}_{X'}(i)$ および $\mathrm{c}_Y(i) = \mathrm{c}_{Y'}(i)$ が成り立つ。定理の仮定より $X \succeq Y$ なので $\mathrm{c}_{X'}(i) - \mathrm{c}_{Y'}(i) = \mathrm{c}_X(i) - \mathrm{c}_Y(i) \geqq 0$ である。以下では $\mathrm{c}_{X'}(\lfloor \lambda \rfloor) \geqq \mathrm{c}_{Y'}(\lfloor \lambda \rfloor)$ を示す。

マルコフ連鎖 $\mathcal{M}_{\mathrm{P}}$ の定義から、$X'_{\lfloor \lambda \rfloor}$ の値は

$$g^{k'}_{\lfloor \lambda \rfloor}(l' - 1) \leqq (\lambda - \lfloor \lambda \rfloor) < g^{k'}_{\lfloor \lambda \rfloor}(l')$$

を満たす唯一の k' である。ただし、$k' \stackrel{\text{def.}}{=} X_{\lfloor \lambda \rfloor} + X_{\lfloor \lambda \rfloor + 1}$ である。同様に、$Y'_{\lfloor \lambda \rfloor}$ の値は

$$g^{k''}_{\lfloor \lambda \rfloor}(l'' - 1) \leqq (\lambda - \lfloor \lambda \rfloor) < g^{k''}_{\lfloor \lambda \rfloor}(l'')$$

を満たす唯一の l'' である。ただし、$k'' \stackrel{\text{def.}}{=} Y_{\lfloor \lambda \rfloor} + Y_{\lfloor \lambda \rfloor + 1}$ である。証明では次の 3 つの場合に分けて考える。

Case 1: $\lfloor \lambda \rfloor \neq j - 1$ かつ $\lfloor \lambda \rfloor \neq j + 1$ の場合、$b' = b''$ なので $X'_{\lfloor \lambda \rfloor} = l' = l'' = Y''_{\lfloor \lambda \rfloor}$ を得る。

Case 2: $\lfloor \lambda \rfloor = j - 1$ の場合を考える。いま、$X \cdot\!\succ_j Y$ より $b' = b'' + 1$ である。累積和ベクトルの定義から

$$\begin{aligned} &\mathrm{c}_{X'}(j-1) - \mathrm{c}_{Y'}(j-1) \\ &= \mathrm{c}_{X'}(j-2) + X'_{j-1} - \mathrm{c}_{Y'}(j-2) - Y'_{j-1} \\ &= \mathrm{c}_X(j-2) + X'_{j-1} - \mathrm{c}_Y(j-2) - Y'_{j-1} = X'_{j-1} - Y'_{j-1} \end{aligned}$$

なので、$X'_{j-1} \geqq Y'_{j-1}$ を示せば十分である。

いま、この後に記す補題 4 から、次の不等式が得られる。

$$\begin{aligned} 0 &< g^{k''+1}_{j-1}(0) \leqq g^{k''}_{j-1}(0) \leqq g^{k''+1}_{j-1}(1) \leqq g^{k''}_{j-1}(1) \leqq \cdots \\ &\leqq g^{k''+1}_{j-1}(l-1) \leqq g^{k''}_{j-1}(l-1) \leqq g^{k''+1}_{j-1}(l) \leqq g^{k''}_{j-1}(l) \leqq \cdots \\ &\leqq g^{k''+1}_{j-1}(k'') \leqq g^{k''}_{j-1}(k'') = g^{k''+1}_{j-1}(k''+1) = 1, \end{aligned}$$

この不等式を *alternating inequalities* と呼ぶことにする。たとえば不等式

$$g^{k''+1}_{j-1}(l-1) \leqq (\lambda - \lfloor \lambda \rfloor) < g^{k''}_{j-1}(l-1) \leqq g^{k''+1}_{j-1}(l)$$

が成り立つ時、$X'_{\lfloor \lambda \rfloor} = l > l - 1 = Y'_{\lfloor \lambda \rfloor}$ である。あるいは、不等式

$$g^{k''+1}_{j-1}(l-1) \leqq g^{k''+1}_{j-1}(l-1) \leqq (\lambda - \lfloor \lambda \rfloor) < g^{k''+1}_{j-1}(l)$$

が成り立てば $X'_{\lfloor \lambda \rfloor} = l = Y'_{\lfloor \lambda \rfloor}$ である。すなわち alternating inequalities から、任意の λ について coupling

$$\begin{pmatrix} X'_{j-1} \\ Y'_{j-1} \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} k'' \\ k'' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k''+1 \\ k'' \end{pmatrix} \right\}$$

を構成することができる。以上のことから $X'_{j-1} \geqq Y'_{j-1}$ が得られた。

Case 3: $\lfloor \lambda \rfloor = j + 1$ の場合について考える。いま、$X \cdot\!\succ_j Y$ より $k' + 1 = k''$ である。累積和ベクトルの定義から

$$\begin{aligned} &\mathrm{c}_{X'}(j+1) - \mathrm{c}_{Y'}(j+1) = \mathrm{c}_{X'}(j) + X'_{j+1} - \mathrm{c}_{Y'}(j) - Y'_{j+1} \\ &= \mathrm{c}_X(j) + X'_{j+1} - \mathrm{c}_Y(j) - Y'_{j+1} = 1 + X'_{j+1} - Y'_{j+1}. \end{aligned}$$

なので、$1 + X'_{j+1} \geqq Y'_{j+1}$ を示せば十分である。

補題 4 から、Case 2 と同様に次の alternating inequalities が得られる。

$$\begin{aligned} 0 &< g^{k'+1}_{j+1}(0) \leqq g^{k'}_{j+1}(0) \leqq g^{k'+1}_{j+1}(1) \leqq g^{k'}_{j+1}(1) \leqq \cdots \\ &\leqq g^{k'+1}_{j+1}(l-1) \leqq g^{k'}_{j+1}(l-1) \leqq g^{k'+1}_{j+1}(l) \leqq \cdots \\ &\leqq g^{k'+1}_{j+1}(k') \leqq g^{k'}_{j+1}(k') = g^{k'+1}_{j+1}(k'+1) = 1. \end{aligned}$$

したがって任意の λ について coupling (X', Y') は

$$\begin{pmatrix} X'_{j+1} \\ Y'_{j+1} \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} k' \\ k' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k' \\ k'+1 \end{pmatrix} \right\}$$

であることがわかる。以上のことから $1 + X'_{j+1} \geqq Y'_{j+1}$ が得られた。 □

［補題 4］ $\forall k \in \{0, 1, \ldots, K\}$, $\forall \alpha_i, \forall \alpha_{i+1} \geqq 0$, $\forall l \in \{0, 1, \ldots, k\}$,

$$g^{k+1}_i(l) \leqq g^k_i(l) \leqq g^{k+1}_i(l+1).$$

証明略 ■

［補題 5］ update function ϕ で定義されたマルコフ連鎖 $\mathcal{M}_{\mathrm{P}}$ は "$\succeq$" に関して単調である。すなわち $\forall\lambda \in [1,n), \forall X, \forall Y \in \Omega$, $X \succeq Y \Rightarrow \phi(X,\lambda) \succeq \phi(Y,\lambda)$ が成り立つ。

証明: いま、適当な長さの状態列 $Z_1, Z_2, \ldots, Z_r$ が存在して、$X = Z_1 \cdot\!\!\succ Z_2 \cdot\!\!\succ \cdots \cdot\!\!\succ Z_r = Y$ が成り立つ。したがって、補題3を繰り返し適用することで $\phi(X,\lambda) = \phi(Z_1,\lambda) \succeq \phi(Z_2,\lambda) \succeq \cdots \succeq \phi(Z_r,\lambda) = \phi(Y,\lambda)$ が得られる。 □

補題5より、アルゴリズムが出力する状態は厳密に積形式解の分布に従うことが保証される。

4. アルゴリズムの計算時間

本章ではアルゴリズムの計算時間について議論する。以下、coalescence time $T_* \in \mathbb{Z}_{++}$ を算定することで定理2を示す。ただし、coalescence time は $T_* \stackrel{\mathrm{def.}}{=} \min\{t > 0 \mid \exists y \in \Omega, \forall x \in \Omega,\ y = \Phi^0_{-t}(x, \mathbf{\Lambda})\}$ と定義される確率変数である。

［補題 6］ 条件1の下で、マルコフ連鎖 $\mathcal{M}_{\mathrm{P}}$ の coalescence time は $\mathrm{E}[T_*] = \mathrm{O}(L^3 \ln(KL))$ を満たす。

証明: 単純無向グラフ $G = (\Omega, \mathcal{E})$ は頂点集合 Ω と次に定義する枝の集合 $\mathcal{E}$ を持つ。任意の頂点対 $\{X, Y\}$ が $\mathcal{E}$ に属する必要十分条件は $(1/2)\sum_{i=1}^{L} |X_i - Y_i| = 1$ とする。明らかにグラフ G は連結である。各枝 $e = \{X, Y\} \in \mathcal{E}$ に対して、唯一の添え字対 $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, L\}$ が存在して

$$|X[1,j] - Y[1,j]| = \begin{cases} 1 & (j = j_1, j_2), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

を満たす。この添え字の対を枝 e の**支持対**（*suporting pair*）と呼ぶ。枝 e の支持対 $\{j_1, j_2\}$ に対して $j^* = \max\{j_1, j_2\} \geqq 2$ として、枝 e の長さ $l(e)$ を $l(e) \stackrel{\mathrm{def.}}{=} (1/(L-1))\sum_{i=1}^{j^*-1}(L-i)$ で定義する。ここで $1 \leq \min_{e\in\mathcal{E}} l(e) \leq \max_{e\in\mathcal{E}} l(e) \leq L/2$ に注意が必要である。任意の状態対 $X, Y \in \Omega$ に対して、距離 $d(X,Y)$ はグラフ G 上での X と Y の最短経路と定義する。任意の $(X,Y) \in \Omega^2$ に対して $d(X,Y) \leqq (L/2)\sum_{i=1}^{L}(1/2)|X_i - Y_i| \leqq (L/2)K$ が成り立つことから、グラフ G の直径、すなわち $\max\{d(X,Y)\}$ は $LK/2$ で押さえられる。また枝の長さの定義から、任意の枝 $\{X,Y\} \in \mathcal{E}$ に対して $d(X,Y) = l(\{X,Y\})$ が成り立つ。

次に joint process $(X,Y) \mapsto (X',Y')$ を $(X,Y) \mapsto (\phi(X,\Lambda), \phi(Y,\Lambda))$ と定義する。ただし、$\Lambda \in [1,L)$ は一様実数乱数で、ϕ は前節で定義した update function である。以下で任意の状態対 $\{X,Y\} \in \mathcal{E}$ に対して、

$$\mathrm{E}[d(X',Y')] \leqq \beta d(X,Y),\ \beta = 1 - 1/(L(L-1)^2), \qquad (1)$$

を示そう。以下では $\{X,Y\}$ の支持対を $\{j_1, j_2\}$ で表す。また、一般性を失うことなく $j_1 < j_2$ かつ $X_{j_2} + 1 = Y_{j_2}$ を仮定する。

Case 1: $\lfloor\Lambda\rfloor = j_2 - 1$ の場合について、

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}[d(X',Y') \mid \lfloor\Lambda\rfloor = j_2 - 1] \\ &\leqq d(X,Y) - (1/2)(L - j_2 + 1)/(L-1) \end{aligned}$$

を示す。$j_1 = j_2 - 1$ の時、条件1より $X' = Y'$ である。ゆえに $d(X',Y') = 0$ となる。以下、$j_1 < j_2 - 1$ の場合について考える。いま $k' = X_{j_2-1} + X_{j_2}$ とし、$k'' = Y_{j_2-1} + Y_{j_2}$ とする。この時 $X_{j_2} + 1 = Y_{j_2}$ より $k' + 1 = k''$ が成り立つ。マルコフ連鎖 $\mathcal{M}_{\mathrm{P}}$ の update function の定義から

$$\begin{aligned} X'_{j_2-1} = l &\Leftrightarrow [g^{k'}_{j_2-1}(l-1) \leqq \Lambda - \lfloor\Lambda\rfloor < g^{k'}_{j_2-1}(l)] \\ Y'_{j_2-1} = l &\Leftrightarrow [g^{k'+1}_{j_2-1}(l-1) \leqq \Lambda - \lfloor\Lambda\rfloor < g^{k'+1}_{j_2-1}(l)] \end{aligned}$$

を得る。前節の補題3で述べたように alternating inequalities

$$\begin{aligned} 0 &< g^{k'+1}_{j_2-1}(0) = g^{k'}_{j_2-1}(0) \leqq g^{k'+1}_{j_2-1}(1) \leqq g^{k'}_{j_2-1}(1) \leqq \cdots \\ &\leqq g^{k'+1}_{j_2-1}(k') \leqq g^{k'}_{j_2-1}(k') = g^{k'+1}_{j_2-1}(k'+1) = 1 \end{aligned}$$

が成り立つので、

$$\begin{pmatrix} X'_{j_2-1} \\ Y'_{j_2-1} \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} k' \\ k' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k' \\ k'+1 \end{pmatrix} \right\}$$

を得る。この時、もし $X'_{j_2-1} = Y'_{j_2-1}$ ならば、$\{X',Y'\}$ の支持対は $\{j_1, j_2\}$ となり、$d(X',Y') = d(X,Y)$ となる。また、もし $X'_{j_2-1} \neq Y'_{j_2-1}$ ならば、$\{X',Y'\}$ の支持対は $\{j_1, j_2 - 1\}$ となり、$d(X',Y') = d(X,Y) - (L - j_2 + 1)/(L-1)$ となる。

ここで $\alpha_{j_2-1} \geqq \alpha_{j_2}$ の場合

$$\begin{aligned} &\Pr[X'_{j_2-1} \neq Y'_{j_2-1} \mid \lfloor\Lambda\rfloor = j_2 - 1] \\ &\quad -\Pr[X'_{j_2-1} = Y'_{j_2-1} \mid \lfloor\Lambda\rfloor = j_2 - 1] \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{k'} \left(g^{k'}_{j_2-1}(l) - g^{k'+1}_{j_2-1}(l)\right) \\ &\quad - \textstyle\sum_{k=1}^{k'} \left(g^{k'+1}_{j_2-1}(l) - g^{k'}_{j_2-1}(l-1)\right) \\ &\geqq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。条件1から、$\alpha_{j_2-1} \geqq \alpha_{j_2}$ は常に成り立ち

$$\begin{aligned} &\Pr[X'_{j_2-1} = Y'_{j_2-1} \mid \lfloor\Lambda\rfloor = j_2 - 1] \leqq (1/2), \\ &\Pr[X'_{j_2-1} \neq Y'_{j_2-1} \mid \lfloor\Lambda\rfloor = j_2 - 1] \geqq (1/2) \end{aligned}$$

を得る。ゆえに

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}[d(X',Y') \mid \lfloor\Lambda\rfloor = j_2 - 1] \\ &\leqq (1/2)d(X,Y) + (1/2)(d(X,Y) - (L - j_2 + 1)/(L-1)) \\ &= d(X,Y) - (1/2)(L - j_2 + 1)/(L-1) \end{aligned}$$

が成り立つ。

Case 2: $\lfloor\Lambda\rfloor = j_2$ の場合についても、Case 1 と同様に $\mathrm{E}[d(X',Y') \mid \lfloor\Lambda\rfloor = j_2] \leqq d(X,Y) + (1/2)(L - j_2)/(L-1)$ を示すことができる。

Case 3: $\lfloor\Lambda\rfloor \neq j_2 - 1$ かつ $\lfloor\Lambda\rfloor \neq j_2$ の場合。この時 $\{X',Y'\}$ の支持対 $\{j'_1, j'_2\}$ は $j_2 = \max\{j'_1, j'_2\}$ となる。したがって $d(X,Y) = d(X',Y')$ である。

それぞれの場合の生起する確率は Case 1 が $1/(L-1)$、Case 2 が高々 $1/(L-1)$、Case 3 が残りである。以上のことから、

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}[d(X',Y')] \\
&\leqq d(X,Y) - \frac{1}{L-1}\frac{1}{2}\frac{L-j_2+1}{L-1} + \frac{1}{L-1}\frac{1}{2}\frac{L-j_2}{L-1} \\
&= d(X,Y) - \frac{1}{2(L-1)^2} \\
&\leqq \left(1 - \frac{1}{2(L-1)^2}\frac{1}{\max_{\{X,Y\}\in\mathcal{E}}\{d(X,Y)\}}\right) d(X,Y) \\
&= \left(1 - \frac{1}{L(L-1)^2}\right) d(X,Y)
\end{aligned}
$$

を得る。

いま、$D \stackrel{\mathrm{def.}}{=} d(X_{\mathrm{U}}, X_{\mathrm{L}})$ と $\tau_0 \stackrel{\mathrm{def.}}{=} L(L-1)^2(1+\ln D)$ を定義する。この時、

$$
\begin{aligned}
&\Pr[T_* > \tau_0] = \Pr\left[\Phi^0_{-\tau_0}(X_{\mathrm{U}}, \mathbf{\Lambda}) \neq \Phi^0_{-\tau_0}(X_{\mathrm{L}}, \mathbf{\Lambda})\right] \\
&= \Pr\left[\Phi_0^{\tau_0}(X_{\mathrm{U}}, \mathbf{\Lambda}) \neq \Phi_0^{\tau_0}(X_{\mathrm{L}}, \mathbf{\Lambda})\right] \\
&\leqq \sum_{(X,Y)\in\Omega^2} d(X,Y)\Pr\left[X = \Phi_0^{\tau_0}(X_{\mathrm{U}}, \mathbf{\Lambda}), Y = \Phi_0^{\tau_0}(X_{\mathrm{L}}, \mathbf{\Lambda})\right] \\
&= \mathrm{E}\left[d\left(\Phi_0^{\tau_0}(X_{\mathrm{U}}, \mathbf{\Lambda}), \Phi_0^{\tau_0}(X_{\mathrm{L}}, \mathbf{\Lambda})\right)\right] \\
&\leqq \left(1 - \frac{1}{L(L-1)^2}\right)^{\tau_0} d(X_{\mathrm{U}}, X_{\mathrm{L}}) \\
&= \left(1 - \frac{1}{L(L-1)^2}\right)^{L(L-1)^2(1+\ln D)} D \\
&\leqq \mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{-\ln D} D \leqq \frac{1}{\mathrm{e}}
\end{aligned}
$$

が得られる。ここで coalescence time の持つ submultiplicativity ([12]) を考慮すると、任意の $k \in \mathbb{Z}_+$ に対して、$\Pr(T_* > k\tau_0) \leqq (\Pr(T_* > \tau_0))^k \leqq (1/\mathrm{e})^k$ が得られる。したがって

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[T_*] &= \textstyle\sum_{t=0}^{\infty} t\Pr[T_* = t] \\
&\leqq \tau_0 + \tau_0\Pr[T_* > \tau_0] + \tau_0\Pr[T_* > 2\tau_0] + \cdots \\
&\leqq \tau_0 + \tau_0/\mathrm{e} + \tau_0/\mathrm{e}^2 + \cdots = \tau_0/(1-1/\mathrm{e}) \leqq 2\tau_0.
\end{aligned}
$$

となる。いま $D \leqq KL/2$ であるので、$\mathrm{E}[T_*] = \mathrm{O}(L^3\ln(KL))$ を得る。 □

最後にアルゴリズム 1 の計算時間について議論する。

定理 2 の証明: マルコフ連鎖の coalescence time を T_* で表す。ここで T_* は確率変数である。いま $K = \lceil \log_2 T_* \rceil$ とする。アルゴリズム 1 は $(m+1)$ 回目の反復で T を -2^m とした時に終了する。したがってアルゴリズム 1 で生成する乱数の総数は $2^m \leqq 2T_*$ で押さえられ、推移回数は $2(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^m) < 2\cdot 2\cdot 2^m \leqq 8T_*$ で押さえられる。各乱数は定数時間で得られると仮定するとマルコフ連鎖の推移は定数時間で行われる。また、アルゴリズム 1 の Step 4 “Coalescence check” に必要な時間は $\mathrm{O}(L)$ である。したがって合計計算時間は $\mathrm{O}(\mathrm{E}[2T_*] + \mathrm{E}[8T_*] + \mathrm{E}[m+1]L) = \mathrm{O}(\mathrm{E}[T_*]) = \mathrm{O}(n^3\ln(KL))$ となる。 □

5. 結　論

本報告では閉ジャクソンネットワークに対するパーフェクトサンプリング法を提案した。提案したアルゴリズムはマルコフ連鎖を用いたサンプリング法で、CFTP に基づき積形式解に厳密に従うサンプリングを行える。このアルゴリズムは弱多項式期待時間の Las Vegas 型乱択アルゴリズムである。このサンプリング法を用いることで、積形式解の規格化定数を計算する弱多項式時間の近似精度保証つき乱択アルゴリズムの設計が可能となる。

文　献

[1] Bubley, R., Dyer, M.: Path coupling: A technique for proving rapid mixing in Markov chains, *38th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, IEEE, San Alimitos, 1997, 223–231.

[2] Bubley, R.: *Randomized Algorithms : Approximation, Generation, and Counting*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[3] Buzen, J. P.: Computational algorithms for closed queueing networks with exponential servers, *Communications of the ACM*, **16** (1973), 527–531.

[4] Chen, W., O'Cinneide, C. A.: Towards a Polynomial-Time Randomized Algorithm for Closed Product-Form Networks, *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*, **8** (1998), 227–253.

[5] Dimakos, X. K.: A guide to exact simulation, *International Statistical Review*, **69** (2001), 27–48.

[6] Jackson, J. R.: Networks of waiting in lines, *Operations Research*, **5** (1957), 518–521.

[7] 亀田壽夫・紀一誠・李頡: 性能評価の基礎と応用, 共立出版, 1998.

[8] Kijima, S. and Matsui, T.: Polynomial Time Perfect Sampling Algorithm for Two-rowed Contingency Tables, METR 2003-15, Mathematical Engineering Technical Reports, University of Tokyo, 2003. (available from http://www.keisu.t.u-tokyo.ac.jp/Research/techrep.0.html)

[9] Matsui, T. and Kijima, S.: Polynomial time perfect sampler for discretized Dirichlet distribution, METR 2003-17, Mathematical Engineering Technical Reports, University of Tokyo, 2003. (available from http://www.keisu.t.u-tokyo.ac.jp/Research/techrep.0.html)

[10] 紀一誠: 待ち行列ネットワーク, 朝倉書店, 2002.

[11] 小沢利久・髙橋成晃・髙橋幸雄: 単調なマルコフ連鎖とネットワークモデルへの応用, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2004 年春季研究発表会 アブストラクト集, 104–105.

[12] Propp, J. and Wilson, D.: Exact sampling with coupled Markov chains and applications to statistical mechanics, *Random Structures and Algorithms*, **9** (1996), 232–252.

[13] Propp, J. and Wilson, D.: How to get a perfectly random sample from a generic Markov chain and generate a random spanning tree of a directed graph, *J. Algorithms*, **27** (1998), 170–217.

[14] Wilson, D.: How to couple from the past using a read-once source of randomness, *Random Structures and Algorithms*, **16** (2000), 85–113.