

区間グラフ上の頂点の betweenness 値について

On Betweenness Value of one Vertex on an Interval Graph

金子 美博 (Yoshihiro Kaneko)

谷口 泰一 (Taiichi Taniguchi)

抄録: ネットワーク構造のシステムにおいて, ある頂点の betweenness 値は, 他の2頂点間の最短路に, その頂点がどの程度深く関わっているかを示す尺度の一つである. 一般的に, 全点对最短路問題を解けば, 頂点数 n のグラフに対して, $O(n^3)$ で betweenness 値は容易に求められる. 本報告では, 無向の区間グラフを扱う. 考察の結果, そのようなグラフでの1個の頂点の betweenness 値を $O(n)$ で求めるアルゴリズムを提案する.

Abstract: In a network system, the betweenness of a vertex is one of measures that shows how deeply that vertex relates to shortest paths between other vertices. Generally, based on all pair shortest path algorithms, we can easily obtain all betweenness for graphs with n vertices in $O(n^3)$ time complexity. In this report, we deal with betweenness of vertices on undirected interval graphs. We propose an $O(n)$ algorithm to calculate betweenness of one vertex on such graph with n vertices.

1. はじめに

ネットワーク構造での, betweenness center は, Freeman にて導入され[1], 社会ネットワークの分野で主に研究されている. [2他] アルゴリズムに関連しては, 頂点数 n の一般的なグラフ構造に対して $O(n^3)$ で betweenness center を求めるアルゴリズムが知られている. 最近, Brandes により, betweenness center を求める $O(n^2 + nm)$ を求めるアルゴリズムが提案されている[3]. ここで, m は, グラフの辺数である. 一方, グラフを限定して, betweenness center を求める研究もある. Farley は, 木やユニサイクル構造, それらの一般形である cactus グラフに対して, $O(n)$ のアルゴリズムを提案している. [4, 5]

本報告では, 考察対象のグラフを, 区間グラフに限定して考察する. この結果, 1個の頂点に対して, $O(n)$ で betweenness 値を求めるアルゴリズムを提案する. 従って, betweenness center を求める手間は, $O(n^2)$ であり, 区間グラフが, $m = O(n^2)$ であることを考慮すると, グラフ構造を利用して効率的に betweenness center を求めているといえる. なお, betweenness 値を求める際に, MPQ木というデータ構造を利用している. このデータ構造は, 与えられたグラフが区間グラフであるかどうかを判定するのに用いられているものである[6,7].

2. 準備

ここでは, 本報告に必要な用語を定義する. グラフの頂点, 辺, 自己閉路, 並列辺, 枝, 無向グラフ, 有向グラフ, 補グラフ, 木などグラフ理論の基本的な用語は[8]を参照されたい. 本報告では, 辺といえば無向辺を指し, 枝といえば有向枝を指すものとする. 特に断りがなければ, 整数 n および m はそれぞれグラフの頂点の総数および辺の総数を意味する.

本研究の考察対象は無向グラフであり, 頂点集合 V , 辺集合 E であるグラフ G を, $G = (V, E)$ で表す. 頂点 v に隣接する点集合を $Ad(v)$ で表す. すなわち, $Ad(v) = \{w \in V \mid (v, w) \in E\}$ である. また, 頂点 v に接続する辺の本数は, その頂点の次数と呼ばれ, $\delta(v)$ で表す. すなわち, $\delta(v) = |Ad(v)|$ である. G 上のパスとは, $v_0, k_1, v_1, k_2, \dots, k_r, v_r$ ($v_j \in V, k_j = (v_{j-1}, v_j) \in E$) のように頂点と辺の交互系列であり, 最初の頂点 v_0 と最後の頂点 v_r に着目して, このようなパスを $v_0 - v_r$ パスという. また, 全ての頂点異なるパスを初等的という. 初等的なパス P において, 頂点 x , 辺 (x, y) , 頂点 y の順に頂点と辺の交互系列が現れるとき, x を, P における y の先行点という. v_0 と v_r が同一であるようなパスをサイクルと呼ぶ. パス上の辺の本数をそのパスの長さという. ある2頂点 x, y に対して, 長さが最小である $x - y$ パスを $x - y$ 最短路といい, $x - y$ 最短路の長さを, x, y 間の距離と呼び, $d(x, y)$ で表す. どの2頂点間にもパスが存在するグラフを連結グラフという. 本研究で扱う無向グラフは, 特に断りがなければ, 自己閉路も並列辺も持たない, 連結グラフであるとする.

岐阜大学工学部応用情報学科, Faculty of Engineering Gifu University, E-mail:kaneko@info.gifu-u.ac.jp

ネットワーク構造のシステムにおいて、頂点 v の betweenness 値 $b(v)$ は、 v 以外の 2 頂点対の最短路に、その v がどの程度関わっているかを示す尺度の一つであり、

$$B(v) = \{ (x, y) \in E \mid d(x, y) = d(x, v) + d(v, y) \} \quad (1)$$

に対して、 $b(v) = |B(v)|$ で定義される。[4, 5] このような点対総数以外にも、最短路の本数も絡めた、より一般的なものもある。[3 他] 本報告では式(1)のような betweenness 値を扱い、略して b 値と呼ぶ。 b 値は点対総数であるため、 $b(v) \in [0, n(n-1)/2]$ である。全ての頂点の中で、 b 値が最大である頂点を betweenness center と呼ぶ。関節点(カット点)など、グラフの中心に位置する頂点の b 値は大きく、betweenness center になりうるものが予想される。一方、次数 1 のような頂点では、明らかに b 値が 0 であるため、betweenness center とはなり得ない。一般的に、各頂点間の距離を、Floyd の方法[9]等により求めた上で、頂点 v が v 以外の任意の 2 頂点 x, y に対して、 $d(x, y) = d(x, v) + d(v, y)$ が成り立つかどうかを調べることにより、各頂点の b 値が容易に得られる。従って、一般的に、 $O(n^3)$ で b 値および betweenness center は求められるため、グラフの構造を限定して、その構造の特質を利用すれば、より効率的に b 値が求められることが予想される。自明な例としては、完全グラフが挙げられ、このグラフでは全ての頂点の b 値は 0 である。Farley は、 b 値を求めるために、考察対象のグラフを、木やユニサイクル構造、それらの一般形である cactus グラフ構造に限定して、 $O(n)$ のアルゴリズムを提案している。[4, 5]

3. 区間グラフの諸性質[11]

本報告では、考察対象を、区間グラフに限定して、 $O(n+m)$ で各頂点の b 値を求めるアルゴリズムを提案する。区間グラフは、遺伝学、考古学など、その応用例の幅広さは改めて述べる必要もないほど多く、(最近では[10]などがある) 構造的には、perfect グラフや tolerance グラフ[11]などの様々なグラフの特殊形として位置づけられる。従って、区間グラフに対する b 値を効率よく求めることができれば、より一般的なグラフにも拡張することが期待でき、betweenness center を効率よく求められるグラフのクラス化への第一歩となるものと思われる。まず、区間グラフを定義する。

[定義 1] 無向グラフ $G=(V, E)$ に対して、実直線上の閉区間の集合 β で、

- (1) V と β との間に 1 対 1 対応が存在し、かつ、
- (2) 二つの区間 $I_i, I_j \in \beta$ が $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ であるときかつそのときに限り、対応する 2 頂点 v_i, v_j 間に辺 $(v_i, v_j) \in E$ が存在する、

を満たすようなものが存在するとき、 G を区間グラフと呼ぶ。また、このとき、 β を G の区間表現という。□

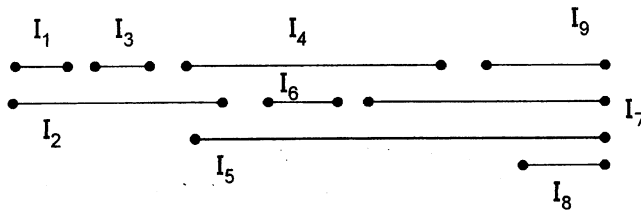


図1-1 区間表現 β

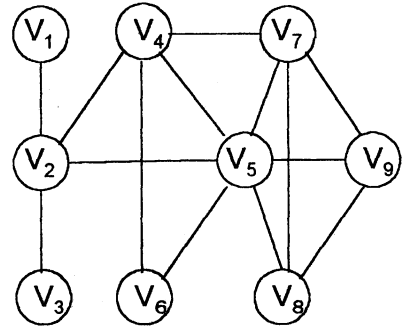


図1-2. β に対応する区間グラフ

例えば、図1-1のような区間表現は、図1-2のような区間グラフで表される。このとき各頂点の b 値は $b(v_2)=13$ 、 $b(v_3)=7$ 、 $b(v_5)=17$ 、および、 $b(v_7)=2$ であり、その他は全て 0 である。従って、betweenness center は頂点 v_5 である。

$V' \subseteq V$ および $E' \subseteq E$ であるグラフ $G' = (V', E')$ を $G = (V, E)$ の部分グラフと呼ぶ。 $G = (V, E)$ の部分グラフ H に対して、 H の点集合および辺集合をそれぞれ $V(H)$ および $E(H)$ で表す。グラフ G の部分グラフ H において、どの相異なる 2 頂点の間にも辺が存在するとき、 H を G のクリークという。グラフ G 上のクリーク K に対して、 K を含む別のクリークが G 上に存在しなければ、 K を極大クリークと呼ぶ。また、頂点 v を含む極大クリークの集合を $K(v)$ で表す。

長さ4以上の初等的なサイクル上において、連続しない2頂点を結ぶ辺を、このサイクルの弦と呼ぶ。グラフGにおいて、長さ4以上のどの初等的なサイクルも少なくとも1個の弦をもつとき、Gを三角化グラフという。また、無向グラフ $G=(V, E)$ に対して、Eの各辺に向きを付け、枝集合Aに変換することにより、どの3頂点 $u, v, w \in V$ に対しても、 $(u, v) \in A$ かつ $(v, w) \in A$ ならば、 $(u, w) \in A$ であるような有向グラフ $G'=(V, A)$ が得られるならば、元の無向グラフGを比較可能グラフという。

これらのグラフに関して次の補題が成り立つ。

[補題1][11] グラフGが区間グラフであるための必要十分条件は、Gが三角化グラフであり、かつ、Gの補グラフが比較可能グラフである。また、区間グラフは、任意の頂点vに対して、 $K(v)$ が連続するような名前で、幾つかの極大クリークに分解できる。□

例えば、図1-2の区間グラフは6個の極大クリークからなる。具体的には、 $C_1 = \{v_1, v_2\}$, $C_2 = \{v_2, v_3\}$, $C_3 = \{v_2, v_4, v_5\}$, $C_4 = \{v_4, v_5, v_6\}$, $C_5 = \{v_4, v_5, v_7\}$, $C_6 = \{v_5, v_7, v_8, v_9\}$ の6個である。これらクリークの集合は、 $K(v_1) = \{C_1\}$, $K(v_2) = \{C_1, C_2, C_3\}$, $K(v_3) = \{C_2\}$, $K(v_4) = \{C_3, C_4, C_5\}$, $K(v_5) = \{C_3, C_4, C_5, C_6\}$, $K(v_6) = \{C_4\}$, $K(v_7) = \{C_5, C_6\}$, および、 $K(v_8) = K(v_9) = \{C_6\}$ である。一つのクリーク集合において、属するクリークの名前(添字)が連続していることがわかる。

与えられたグラフが区間グラフであるかどうかを効率よく判定するためには、M(Modified)PQ木が便利である。このデータ構造は、最初、PQ木として提案され[6]、後に、MPQ木として改良された[7]。PQ木は、幾つかの並びの制約を満たすような順列を全て列挙するために提案されたものである。

無向木上のある1頂点に着目し、根と呼ぶ。このような無向木を根付木という。根付木において、根からある葉への初等的なパスにおいて、頂点yの先行点がxならば、先行点の代わりに、xをyの親と呼び、yをxの子と呼ぶ。また、根付木において、次数1の子を持たない頂点を葉と呼び、根や葉以外の頂点は内点と呼ぶ。

[定義2] MPQ木とは、区間グラフを表現する根付木であり、各内点がPノードもしくはQノードに分類され、Pノードには、区間グラフ上のある頂点が割り当てられる一方、Qノードには、区間グラフ上のある頂点集合が割り当てられる。ただし、両ノードとも空集合が割り当てられる場合もある。その上で、Pノード上の頂点は、唯一個の極大クリークに含まれ、Qノード上の頂点は、複数個の極大クリークに含まれる。さらに、Qノードは幾つかの点集合(これをセクションという)に分けられ、隣り合うセクションでは、点集合が連続している。□

PQ木の受ける制約としては、Pノードの子は自由に順序を入れ替えることが可能である一方、Qノードの子は、左から右の順番を、単に右から左に入れ替えることのみ許される。また、図においては、PノードおよびQノードはそれぞれ○および□で表現され、根および根から各セクションへの辺は省略する。

例えば、図1-2の区間グラフに対して、MPQ木は図2ようになる。(頂点 v_i は省略して、添字のみ表記していることに注意)この例では、Qノードは、 $\{2, 4, 5, 7\}$ であり、このQノード上のセクションは、 $S_1 = \{2\}$, $S_2 = \{2, 4, 5\}$, $S_3 = \{4, 5\}$, $S_4 = \{4, 5, 7\}$, $S_5 = \{5, 7\}$ であり、隣り合うセクションでは、頂点が連続していることがわかる。

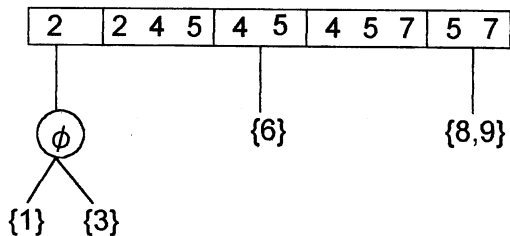


図2. 図1-2の区間グラフを表すMPQ木

MPQ木に関連して、次の補題が成り立つ。

[補題2][7] 区間グラフ G を表現する MPQ 木を T とする。 T において、根から葉へ方向へのパス(Qノード上では各セクション)上の点集合は、 G 上の極大クリークの点集合に1対1対応している。 □

例えば、図2では、左の葉から右の葉へそれぞれを終点とするパスを順に進めると、 G の極大クリークが、 C_1, C_2, \dots, C_6 と順に得られる。 MPQ 木上の点集合を次のように定義する。

[定義4] MPQ 木 T において、あるセクション S_i を親とする T の部分木を T_i で表し、その点集合を V_i とする(ただし、根であるセクションは除く)。このとき、 T_i は S_i の下にある、という。 □

MPQ 木では次の性質が成り立つことが示されている。

[補題3][7] 区間グラフ G を表現する MPQ 木を T とする。 T における Q ノード上のセクションを S_1, S_2, \dots, S_m とする。このとき、次が成り立つ。

- (1) $S_{i-1} \cap S_i \neq \phi$ ($i \in \{2, 3, \dots, m\}$) (セクションの連続性)
- (2) $S_1 \subseteq S_2$ かつ $S_{m-1} \supseteq S_m$
- (3) $V_1 \neq \phi$ かつ $V_m \neq \phi$,
- (4) $(S_i \cap S_{i+1}) \setminus S_i \neq \phi$ かつ $(S_{i-1} \cap S_i) \setminus S_m \neq \phi$ ($i \in \{2, 3, \dots, m-1\}$)。 □

各セクションでの頂点の連続性より、MPQ 木では次の性質が成り立つ。

[補題4] 区間グラフ G を表現する MPQ 木を T とし、 T は、 m 個のセクション S_1, S_2, \dots, S_m を持つ。 T において、 $S_i \cap S_j = \phi$ ならば、 $k > j$ である全ての整数 k に対して、 $S_i \cap S_k = \phi$ が成り立つ。また、 $x_i \in S_{i-1} \cap S_i$ 、 $y_i \in S_i \setminus S_{i-1}$ とすると、 V_i の上頂点 t_i に対して、

$$d(y_i, y_j) = d(y_i, t_i) = d(y_i, x_i) + 1, \quad (2)$$

が成り立つ。

(証明) $y_i - y_j$ パスも $y_i - t_i$ パスも $S_{i-1} \cap S_i$ 上の頂点を必ず通るため、題意が成り立つ。 □

4. 区間グラフの betweenness 値

ここでは、区間グラフ上の各頂点の b 値を求めるために必要な幾つかの性質を明らかにする。与えられた区間グラフは既に MPQ 木として表現されているものとする。尚、扱っているグラフ $G=(V, E)$ は無向であるため、 V 上の任意の2頂点 x, y に対して、 $d(x, y) = d(y, x)$ が成り立つことは、証明等において、特に断ることなく利用する。

まず、区間グラフであるための十分条件を紹介する。

[補題5][13] 完全グラフは区間グラフである。 □

この補題より、以降の区間グラフは、複数個の極大クリークからなるとする。また簡単のため、頂点 v_i に対して、 $B_i = B(v_i)$ および $b_i = b(v_i)$ と表す。互いに素な頂点集合 X, Y に対して、 B_i 上の頂点対で、一方の頂点が X 、もう一方のそれが Y に属すものを $B_i(X|Y)$ で表す。まず、 b 値がカウントされるような頂点対に関して、次のような補題が成立する。

[補題6] ある頂点 v に対して、 $(x, y) \in B(v)$ であるとする。このとき、これら2頂点 x, y は同一の極大クリークに含まれることはない。

(証明) b 値の定義より、 $v \neq x$ および $v \neq y$ であるため、 $d(x, v) \geq 1$ および $d(y, v) \geq 1$ が成り立つ。よって、式(1)より、 $d(x, y) \geq 2$ であるため、 x と y とは隣接しない。 □

以降では、MPQ 木に関連する命題を明らかにする。

[命題1] 区間グラフ G を表す MPQ 木を T とする。 T における P ノード上の頂点を w とすると、 $b(w)=0$ である。
 (証明) G が完全グラフであるか、もしくは、 $\delta(w)=1$ ならば、 題意の成立は自明である。 従って、 G は複数個の極大クリークからなるものとし、 $\delta(w) \geq 2$ とする。 w は P ノードに含まれるため、 $|K(w)|=1$ である。 従って、 $K(w) = \{C_0\}$ とする。 ここで、 $b(w) > 0$ であると仮定すると、

$$d(a, a') = d(a, w) + d(w, a'), \quad (3)$$

を満たす v 以外の2頂点 a, a' ($a \neq a'$) が存在する。 補題6より、 これら2頂点 a と a' は、 同じ極大クリークに含まれることはない。 すなわち、 $a \notin C_0$ もしくは $a' \notin C_0$ が成り立つ。 G 上の $a-w$ 最短路において、 w の先行点を x とし、 $a'-w$ 最短路において、 w の先行点を y とすると、 $w = x$ もしくは、 $w = y$ である場合も含め、 最短路の原則より、 $d(a, w) = d(x, w) + 1$ および $d(y, w) = d(y, w) + 1$ である。 従って、 式(3)より、

$$d(a, a') = d(a, x) + d(y, a') + 2, \quad (4)$$

が成り立つ。 先行点の性質より、 x と a は隣接しているため、 $x \in C_0$ である。 同様に、 $y \in C_0$ である。 従って、 $d(x, y) = 1$ であるため、 距離の三角不等式より、

$$d(a, a') \leq d(a, x) + d(x, y) + d(y, a') = d(a, x) + d(y, a') + 1,$$

が導かれ、 式(4)に反する。 よって、 このような2頂点 a, a' は存在せず、 $b(w) > 0$ は起こり得ない。 \square

この命題より、 次の系が直ちに導かれる。

[系1] 区間グラフ G において、 b 値が非零である頂点が存在するならば、 betweenness center となる頂点は、 G を表す MPQ 木において、 Q ノード上に存在する。 \square

次の定義は、 MPQ 木上の頂点集合に関するもので、 b 値に関与する点対を特定するのに役立つ。

[定義4] 各セクション S_i ($i=2, 3, \dots, m-1$) に対して、 $S_i^L = V_i \cup S_i \setminus S_{i+1}$ および $S_i^R = V_i \cup S_i \setminus S_{i-1}$ とし、 それぞれ S_i の左半分および右半分と呼ぶ。 また、 $S_1^L = V_1$ および $S_m^R = V_m$ とする。 \square

定義4において、 S_1^R および S_m^L は定義されないことに注意。 補題3より、 各セクションの左半分も右半分も空集合にはならない。

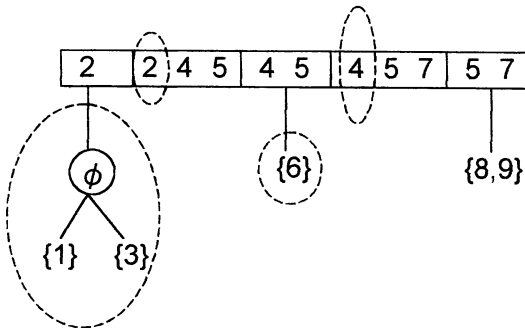


図3-1. 各セクションの左半分の頂点集合

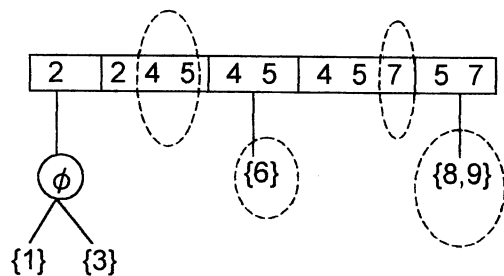


図3-2. 各セクションの右半分の頂点集合

例えば、 図2-1の MPQ 木に対する各セクションの左半分および右半分は、 それぞれ図3-1 および図3-2の破線部分のようになる。 関連して次の命題が成り立つ。

[命題2] $x \in S_j \cap S_{j+1} \cap \dots \cap S_k$ ($k > j$) とする。 このとき、 $v_j^L \in (S_j \setminus S_{j+1}) \cup T_j$ および $v_k^R \in (S_k \setminus S_{k-1}) \cup T_k$ に対して、 $S_{j-1} \cap S_k = \phi$ ならば、 $(v_j^L, v_k^R) \in B(x)$ ($1 \leq i \leq k$) である。 また、 $S_{j-1} \cap S_k \neq \phi$ ならば、 $(v_{j-1}^L, v_k^R) \notin B(x)$ であるが、 $S_{j-2} \cap S_j \neq \phi$ ならば、 $(S_{j-1} \setminus S_j) \cup V_{j-1}$ 上の頂点 v_{j-2} に対して、 $(v_{j-2}^L, v_k^R) \in B(x)$ である。

(証明) 前半部分。 $v_j^L \in S_k$ より、 $d(v_j^L, v_k^R) = 1$ 。 明らかに、 $(v_{j-1}^L, v_k^R) \notin E$ であるため、 $d(v_{j-1}^L, v_k^R) = 2$ と仮定

する。このとき、 $(v_{j-1}^L, y) \in E$ および $(y, v_k^R) \in E$ なる頂点 y がセクション上に存在する。 $v_{j-1}^L \notin S_j$ および $(v_{j-1}^L, y) \in E$ より、 $y \in S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_{j-1}$ である。また、 $v_k^R \notin S_{k-1}$ および $(x, v_k^R) \in E$ より、 $y \in S_k \cup S_{k+1} \cup \dots \cup S_m$ である。これは y の連続性に矛盾する。従って、このような y は存在せず、 $d(v_{j-1}^L, v_k^R) \geq 3$ が成り立つ。次に、 $u \in S_{j-1} \cap S_j$ とすると、 $d(v_{j-1}^L, u) + d(u, x) + d(x, v_k^R) = 1 + 1 + 1 = 3$ であるため、 $(v_{j-1}^L, v_k^R) \in B(x)$ である。 $i < j$ に対しても同様に証明できる。

後半部分。 $y \in S_{j-1} \cap S_k$ とする。 $y, v_{j-1}^L \in S_{j-1}$ より $d(y, v_{j-1}^L) = 1$ であり、 $y, v_k^R \in S_k$ より $d(y, v_k^R) = 1$ である。よって、 $d(v_{j-1}^L, v_k^R) \leq d(v_{j-1}^L, y) + d(y, v_k^R) = 2$ である。一方、 $x \notin S_{j-1}$ より $d(v_{j-1}^L, x) \geq 2$ である。また、 $x, v_k^R \in S_k$ より、 $d(x, v_k^R) = 1$ である。従って、 $d(v_{j-1}^L, x) + d(x, v_k^R) \geq 3 > d(v_{j-1}^L, v_k^R)$ であるため、 $(v_{j-1}^L, v_k^R) \notin B(x)$ である。同様に、 $S_{j-2} \cap S_j \neq \emptyset$ の場合も、 $S_{j-2} \cap S_j$ 上の頂点を經由して、 $(v_{j-2}^L, v_k^R) \in B(x)$ が導ける。 \square

4. アルゴリズム

前節までの考察より、与えられたグラフは区間グラフであることし、そのグラフはMPQ木で表現されていることを前提とする。このMPQ木を使って、頂点のb値を求めるアルゴリズムを提案する。

点対の計算を重複しないために、次の補題を利用する。

[補題7] 頂点 v_i をもつセクションを $S_j \cup S_{j+1} \cup \dots \cup S_k$ ($j < k$) とすると、 $B(v_i) = B_j(S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_j \mid S_{j+1} \cup S_{j+2} \cup \dots \cup S_m) \cup B(S_{j+1} \mid S_{j+2} \cup S_{j+3} \cup \dots \cup S_m) \cup \dots \cup B(S_{k-1} \mid S_k \cup S_{k+1} \cup \dots \cup S_m)$ が成り立つ。 \square

命題2より、次のアルゴリズムが導ける。

[Algorithm]

(入力) 区間グラフ G のMPQ木 T および T 上のあるセクション上の頂点 v

(出力) $b(v)$

- Step 1. 各セクション S_i ($1 \leq i < m$) に対して、 $i = 1, 2, \dots, m-1$ の順に、左半分 S_i^L の頂点の個数 n_i^L を求めると共に、 S_i の左半分全ての頂点の個数 $n_i^{LL} = \sum_{j=1}^i n_j^L$ を順次求める。
- Step 2. 各セクション S_i ($1 < i \leq m$) に対して、 $i = m, m-1, \dots, 2$ の順に、右半分 S_i^R の頂点の個数 n_i^R を求めると共に、 S_i の右半分全ての頂点の個数 $n_i^{RR} = \sum_{j=i}^m n_j^R$ も順次求める。
- Step 3. 頂点 v が最初に現れるセクション S_j および最後に表れるセクション S_k を求める。
- Step 4. $S_j \cup S_{j+1} \cup \dots \cup S_k$ の間に P ノードが存在すれば、 P ノードの個数 k に対して、 $b(v) \leftarrow k \cdot C_2$ とする。そうでなければ $b(v) \leftarrow 0$ とする。
- Step 5. $S_{j-1} \cap S_j = \emptyset$ ならば、 $L = n_j^{LL}$ とし、そうでなければ $L = n_j^L$ とする。
- Step 6. $j < k$ である限り、Step 6-1~6-3 を繰り返す。
 - 6-1. $S_j \cap S_{k+1} = \emptyset$ ならば、 $R = n_{j+1}^{RR}$ とし、そうでなければ $R = n_{j+1}^{RR} - n_{k+1}^{RR}$ とする。
 - 6-2. $b(v) \leftarrow b(v) + L \cdot R$ とする。
 - 6-3. $j \leftarrow j+1$ とした上で $L = n_j^{LL}$ とする。
- Step 7. $b(v)$ を出力して終了。 (Algorithm 終了)

Step6のループは、補題7を基にしている。Step1~4では、 $O(n)$ の手間がかかる。また、Step6の繰り返しは高々 $n-1$ 回であるため、ここでの手間も $O(n)$ である。従って、このアルゴリズム全体では、 $O(n)$ となる。命題1とこの結果より、区間グラフ上の頂点の b 値に関して、次のような結論的な命題が導かれる。

[命題3] 区間グラフの1個の頂点の b 値は、 $O(|V|)$ で求められる。 \square

上のアルゴリズムの実行例を示す。図1-2の区間グラフに上のAlgorithmを適用する。図3-1および図3-2より、 $n_1^L = n_1^{LL} = 2$ 、 $n_2^{LL} = n_1^{LL} + n_2^L = 2 + 1 = 3$ 、 $n_3^{LL} = n_2^{LL} + n_3^L = 3$ 、 $n_4^{LL} = n_3^{LL} + n_4^L = 3 + 2 = 5$ となる。同様にし

て、 $n_5^{RR}=2$, $n_4^{RR}=3$, $n_3^{RR}=4$, $n_2^{RR}=6$, が得られる。

最初の例として、 $b(v_7)$ を求める。 $v_7 \in S_4 \cap S_5$ であり、 $S_4 \cap S_5 = \phi$ (S_i 自体存在せず空集合とみなせる)より、 $B_7(S_4 | \bigvee S_j) = B_7(S_4 | S_5)$ である。また、 $S_5 \cap S_3 \neq \phi$ および $v_7 \notin S_3$ より、 $B_7(\bigvee S_j | S_5) = B_7(S_4 | S_5)$ である。従って、 $b(v_7) = |B_7(S_4 | S_5)| = 2$ となる。

次の例として、 $b(v_2)$ を求める。 $v_2 \in S_1 \cap S_2$ である。 $B_2(S_1 | S_2) \neq \phi$ であり、 P -ノードの下の点対(v_1 , v_2)を考慮しなければならない。従って、 $S_3 \cap S_1 = \phi$ であるため、 $b(v_2) = n_1^{LL} \times n_2^{RR} + 1 = 2 \times 6 + 1 = 13$ である。

さらに、 $b(v_4)$ を求める。 $v_4 \in S_2 \cap S_3 \cap S_4$ である。補題7より、 $B_4(S_1 \cup S_2 | S_3 \cup S_4 \cup S_5)$ および $B_4(S_3 | S_4 \cup S_5)$ を考える。 $S_5 \cap S_1 = \phi$ より、 $B_4(\bigvee S_j | S_3) = B_4(S_1 \cup S_2 | S_3)$ である。また $S_2 \cap S_5 \neq \phi$, および $v_4 \notin S_5$ より、 $B_4(S_2 | \bigvee S_j) = B_4(S_2 | S_3 \cup S_5)$ である。従って、 $|B(S_2 | S_3)| = n_2^L \times n_3^R = (2+1) \times (1+1) = 6$ 。

次に、 $B_4(S_3 | S_4) = B_4(S_3 | S_4) \setminus B_4(S_2 | S_4)$ を考える。明らかに、 $B_4(S_3 | S_4) = B_4(\bigvee (S_1 \cup S_2) | S_4)$ である。また、 $S_2 \cap S_5 \neq \phi$ より、 $S_3 \cap S_5 \neq \phi$ である。従って、 $B_4(S_3 | \bigvee S_j) = B_4(S_3 | S_4)$ であるため、 $B_4(S_3 | S_4) = |S_3^L| \times |S_4^R| = 1 \times 1 = 1$ 。よって、 $b(v_4) = |B_4(S_3 | S_4) \cup B_4(S_2 | S_4)| = 6 + 1 = 7$ 。

最後の例として、 $b(v_5)$ を求める。 $v_5 \in S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5$ である。まず、 $S_1 \cap S_3 = \phi$ であるため、 $S_1 \cap S_j = \phi$ ($j \in \{3, 4, 5\}$)である。従って、 S_2^L と $\bigvee S_2^L$, S_3^L と $\bigvee S_3^L$, S_4^L と $\bigvee S_4^L$ を順次考えればよい。 $b(v_5) = |S_2^L| \times |\bigvee S_2^L| + |S_3^L| \times |\bigvee S_3^L \setminus S_2^L| + |S_4^L| \times |\bigvee S_4^L \setminus S_3^L \setminus S_2^L| = 3 \times 4 + 1 \times 3 + 1 \times 2 = 17$ である。

5. おわりに

本報告では、区間グラフの1個の頂点に対するbetweenness値を計算する $O(|V|)$ のアルゴリズムを提案した。今後の課題としては、区間グラフを部分グラフとして含むクラス、例えば、三角グラフやperfectグラフ、toleranceグラフなどに対して、betweenness値を高速に計算するためのアルゴリズムを考えたい。また、パス総数に絡めたbetweenness値を評価関数とした場合、区間グラフを含め、そのようなbetweenness centerを求める方法を考えたい。さらにbetweenness値を全て求めなくても、より効率的にbetweenness centerを特定できるような方法がないかどうか検討したい。

文献

- [1] L. C. Freeman, "A Set of Measures of Centrality Based on Betweenness," *Sociometry*, 40, 35 - 41(1977).
- [2] L. C. Freeman, S. P. Borgatti & D. R. White, "Centrality in Valued Graphs: A Measure of Betweenness Based on Network Flow," *Social Networks* 13, 141 - 154, (1991).
- [3] U. Brandes, "A Faster Algorithm for Betweenness Centrality," *Journal of Mathematical Sociology* 25(2), pp. 163 - 177, (2001).
- [4] A. M. Farley, "Betweenness Centers of Trees and Unicyclic Graphs," 35th South Eastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory & Computing, Abstracts No. 18 (2004).
- [5] A. M. Farley, "Betweenness Centers on Extended Cacti" (private communication).
- [6] K. S. Booth & G. S. Leuker "Testing for the Consecutive Ones property Interval Graphs and Graph Planarity Using PQ-tree Algorithms," *J. of Computer and System Sciences* 13, 335-379, (1976).
- [7] N. Korte & R. H. Möhring, "An Incremental Linear-Time Algorithm for Recognizing Interval Graphs," *SIAM J. Comput.* Vol. 18, No. 1, pp. 68-81, (1989).
- [8] 伊理 白川, 梶谷 篠田他: 演習グラフ理論, コロナ社, 1983.
- [9] Floyd, "Algorithm 97: shortest path," *Comm. ACM*, 5, 6, p. 345.
- [10] S. Nakayama, S. Masuyama, "An Algorithm for Solving The Minimum Vertex Ranking Spanning Tree Problem on Interval Graphs," *IEICE. Trans. Fundamentals*. Vol. E86-A, 5, 1019-1026, (2003).
- [11] P. C. Gilmore & A. J. Hoffman, "A characterization of comparability graphs and of interval graphs," *Canad. J. Math.*, 16, 539-548 (1964).
- [12] M. C. Golumbic & A. N. Trenk: *Tolerance Graphs*, Cambridge Univ. Press (2004).
- [13] M. C. Golumbic, *Algorithmic graph theory and perfect graphs*, Academic Press, New York, (1980).
- [14] <http://www.knc.info.gifu-u.ac.jp/~kaneko/AL98.htm> (本原稿の更新版)