2005－AL－99 (4)
2005／1／20

双二次最終多項式による有向マトロイドの実現不可能性判定

中山 裕貴*　森山 園子†　福田 公明‡　岡本 吉央§

*†東京大学大学院情報理工学系研究科
*nak-den@is.s.u-tokyo.ac.jp　†moriso@is.s.u-tokyo.ac.jp

‡ Department of Mathematics, Swiss Federal Institute of Technology Zurich
‡Department of Mathematics, Swiss Federal Institute of Technology Lausanne
‡fukuda@ifor.math.ethz.ch

§ Department of Computer Science, Swiss Federal Institute of Technology Zurich
§okamotoy@inf.ethz.ch

要旨

有向マトロイドとは，実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ のベクトル配置を抽象化した組合せモデルである．有向マトロイドは $\mathbb{R}^n$ のベクトル配置から得られるとき実現可能であるというが，この判定問題は NP 困難であることが知られている．実現不可能な有向マトロイドを判定する手段としては，Holt-Klee 条件を基にした non-HK* 性や，双二次最終多項式を用いた手法が提案されている．

我々は台集合の要素数が 8, ランクが 4 の有向マトロイドに着目する．このような有向マトロイドで一様なものは同型を除いて 2628 個あり，うち 24 個が実現不可能であることが知られているが，その証明は双二次最終多項式により，浮動小数点演算を用いて行われていた．本研究では，同手法を有理数演算を用いて適用し，実現不可能な 24 個の有向マトロイド全てを列挙した．さらに，非一様な有向マトロイドで，双二次最終多項式では発見できない実現不可能な有向マトロイドが存在することも示した．

Deciding non-realizability of oriented matroids by biquadratic final polynomials

Hiroki Nakayama*, Sonoko Moriyama†, Komei Fukuda‡, and Yoshio Okamoto§

*† Graduate School of Information Science and Technology, The University of Tokyo
*nak-den@is.s.u-tokyo.ac.jp　†moriso@is.s.u-tokyo.ac.jp

‡ Department of Mathematics, Swiss Federal Institute of Technology Zurich
‡ Department of Mathematics, Swiss Federal Institute of Technology Lausanne
‡fukuda@ifor.math.ethz.ch

§ Department of Computer Science, Swiss Federal Institute of Technology Zurich
§okamotoy@inf.ethz.ch

Abstract

An oriented matroid is a combinatorial model obtained as an abstraction of a vector configuration in a real vector space $\mathbb{R}^n$. An oriented matroid is defined realizable if it is obtained from a vector configuration in $\mathbb{R}^n$, but deciding realizability of an oriented matroid is known to be NP-hard. Hence the methods using non-HK*, which are based on Holt-Klee condition, and using biquadratic final polynomial, are proposed.

Now we focus on rank-4 oriented matroids on a 8-element ground set. It is known that there exist 2628 such uniform oriented matroids, and 24 of them are non-realizable. Their specific form were obtained by biquadratic final polynomials with floating-point arithmetic. In our study, we find all such 24 matroids by a same method with exact rational arithmetic. Furthermore, we show there exist non-realizable non-uniform oriented matroids which have no biquadratic final polynomial.

1 はじめに

1.1 研究の背景

有向マトロイドは，実ベクトル空間中のベクトル配置により得られる組合せモデルの抽象化である．ベクトル配置が与えられたとき，それらを列ベクトルとする行列を考え，その行列式の符号とベクトル配置を対応づけることができる．逆に言えば，符号の集合（カイロトープと呼ぶ）により，ベクトル配置の組合せ構造を表現することができる．ある有向マトロイドを表すカイロトープが与えられたとき，それを実現する実ベクトル配置が存在する場合にその有向マトロイドは実現可能であるといい，存在しないとき実現不可能であるという．有向マトロイドが実現可能であるか判定する問題を実現不可能性判定問題と呼ぶ。組合せ幾何学における実現可能性判定問題の多くがこの問題に帰着されるため，重要な役割を持っている．

与えられた有向マトロイドに対する実現可能性判定問題は NP 困難であることが知られている [16]．有向マトロイドが実現（不）可能であることの十分条件として，様々な性質が提案されてきた．実現可能性の十分条件としては Bokowski & Sturmfels [4] による有向マトロイドの solvability sequence の存在が知られており，一方実現不可能性の十分条件としては Edmonds & Fukuda [8] による non-Euclidean 性，Roudneff & Sturmfels [14] による Shannon の定理 [15] を用いた手法，Bokowski & Richter による双二次最終多項式 [12]，Fukuda, Moriyama & Okamoto [9] による，擬超平面配置の有界セルと組合せ同値な多面体を用いた non-HK* 性などの手法が提案されている．

台集合の要素数 n，ランク r の有向マトロイドの個数は，下の表 1 で与えられる [6].

Table 1: 有向マトロイドの個数

$n=$	2	3	4	5	6	7	8	9
$r=2$	1	1	1	1	1	1	1	1
$r=3$		1	2	4	17	143	4890	$\cdots$
$r=4$			1	3	12	206	181472	$\cdots$
$r=5$				1	4	25	6029	$\cdots$

有向マトロイドの中で一様なものの個数は，表 2 で与えられる [6].

Table 2: 一様な有向マトロイドの個数

$n=$	2	3	4	5	6	7	8	9
$r=2$	1	1	1	1	1	1	1	1
$r=3$		1	1	1	4	11	135	4382
$r=4$			1	1	1	11	2628	$\cdots$
$r=5$				1	1	1	135	$\cdots$

実現（不）可能である有向マトロイドの個数について，以下の結果が示されている．

命題 1.1 ([1]) ランク r，要素数 n の有向マトロイド $\mathcal{M}$ は，以下の条件のどれかを満たすとき，かつそのときに限り全て実現可能である．

1. $r \leq 2$ のとき
2. $r=3$ かつ $n \leq 8$ のとき
3. $r=4$ かつ $n \leq 7$ のとき
4. $r=5$ かつ $n \leq 8$ のとき
5. $r \geq 6$ かつ $n \leq r+2$ のとき

定理 1.2 ([11, 3])

1. $r=3$，$n=9$ なる一様な有向マトロイド 4382 個のうち，ただ 1 つの有向マトロイド `Rin`(9) のみ実現不可能である．
2. $r=4$，$n=8$ なる一様な有向マトロイド 2628 個のうち，ちょうど 24 個の有向マトロイドが実現不可能である．

我々は本研究で $r=4$，$n=8$ の場合に注目する．Bokowski & Richter による上の定理 2 [3] は，論文として形になっていないものの，彼らが提案した双二次最終多項式により判定したと推測される．しかし，この証明は浮動小数点演算を用いていると思われるため，有理数演算を用いた方法によっても再確認する必要がある．

一方で，他の手法を用いた証明により，一様な有向マトロイドについては non-Euclidean 性，non-Shannon 性，non-HK* 性により 24 個中 18 個の実現不可能な有向マトロイドを列挙することができたが，残りの 6 個については発見されていなかった．一方，非一様な有向マトロイドについては，表現不可能なものの個数さえ発見されておらず，non-Euclidean 性および non-HK* 性を用いた手法によりその一部が発見されているだけである．

そこで本研究では，双二次最終多項式を用い，かつ有理数演算ライブラリ cdd+ [5] を用いることで $n=8$，$r=4$ のときの実現不可能な有向マトロイドの列挙を行う．

1.2 本論文の構成

2 章で有向マトロイドをカイロトープの形で導入し，実現可能性の定義を行う．3 章では最終多項式および双二次最終多項式を導入し，4 章で実現不可能性を導く方法を紹介する．これを $n=8$，$r=4$ なる一様な有向マトロイドに対して適用した結果を 5 章で述べる．最後に，結論および今後の課題を 6 章に示す．

2 有向マトロイド

以下ではすべて，有向マトロイドの台集合の要素数を n，ランクを r と表記する．有向マトロイドの更なる詳細については，[1] を参照されたい．

E を有限の台集合とすると，有向マトロイド $\mathcal{M}$ は E と写像 $\chi: E^r \to \{0,+1,-1\}$ の組 $\mathcal{M}=(E,\chi)$ のことである．この写像 χ をカイロトープと呼び，ベクトル配置により定まるカイロトープを以下で定義することができる．

列ベクトルの集合 $X = (\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n) \in \mathbb{R}^{r\times n}$ を，$\mathbb{R}^r$ 上の n 個のベクトルの配置とする．$E=\{1,\ldots,n\}$ と定め，任意の要素数 r の集合 $(i_1,\ldots,i_r)\in E^r$ について，符号を以下の式で定めることができる．

$$\chi_X(i_1,\ldots,i_r)=\operatorname{sgn}\det(\boldsymbol{x}_{i_1},\ldots,\boldsymbol{x}_{i_r}).$$

この式中の $\det(\boldsymbol{x}_{i_1},\ldots,\boldsymbol{x}_{i_r})$ を，ブラケットにより $[i_1\cdots i_r]$ と表すことにする．これを変数と見て，ブラケットにより生成される多項式のことをブラケット多項式とも呼ぶ．χ_X はカイロトープとしての性質を満たしている．カイロトープ χ は一般に以下の公理を満たす．

定義 2.1 台集合 E 上のランク r のカイロトープ χ とは，写像 $E^r\to\{0,+1,-1\}$ で以下の性質を満たすものとする．

1. χ は常に 0 にはならない．
2. χ は交代性を満たす．つまり全ての $i_1,\ldots,i_r \in E$ および置換 σ に対して，$\chi(i_{\sigma_1},\ldots,i_{\sigma_r})=\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\chi(i_1,\ldots,i_r)$ を満たす．
3. $k=1,\ldots,r$ に対し $\chi(j_k,i_2,\ldots,i_r)\cdot\chi(j_1,\ldots,j_{k-1},i_1,j_{k+1},\ldots,j_r)\ge 0$ を満たすような全ての $i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_r$ に対して，$\chi(i_1,\ldots,i_r)\cdot\chi(j_1,\ldots,j_r)\ge 0$ が成立する．

上の定義の 3. より，以下の関係（3 項 Grassmann-Plücker relations）が導かれる．

任意の $i_1,\ldots,i_r,j_1,j_2\in E$ について，
(1) $\chi(j_1,i_2,i_3\ldots,i_r)\cdot\chi(i_1,j_2,i_3,\ldots,i_r)\ge 0$,
(2) $\chi(j_2,i_2,i_3\ldots,i_r)\cdot\chi(j_1,i_1,i_3,\ldots,i_r)\ge 0$
がともに満たされるとき，
$\chi(i_1,\ldots,i_r)\cdot\chi(j_1,j_2,i_3,\ldots,i_r)\ge 0$ が成立．

χ は交代性を満たすため，$i_1<i_2<\cdots<i_r$ なる添字に対してのみ，符号を定義しておけば良い．以降，$\{(i_1,\ldots,i_r)\mid 1\le i_1<\cdots<i_r\le d\}$ なる集合を $\Lambda(n,d)$ で表す．

カイロトープ χ は，あるベクトル配置 X が存在し，$\chi_X=\chi$ となるとき，実現可能であるといい，そうでないとき実現不可能であるという．また，カイロトープ χ は 0 への写像を含まないとき一様であり，そうでないとき非一様であるという．これらカイロトープによる定義は，超平面配置による実現可能性・一様性の定義の言い換えである．

あるカイロトープ χ の実現（不）可能性を確実に示すためのもっとも原始的な方法として，行列 X を $(I_r\mid \boldsymbol{x}_{d+1},\ldots,\boldsymbol{x}_n)$ と置き，$\binom{n}{r}-1$ 個の制約からなる，$r\times(n-r)$ 変数の連立不等式を解けばよい．この不等式系が解を持てば実現可能であり，そうでなければ実現不可能となる．しかしこの方法は計算が複雑すぎるため，代わりに実現（不）可能性の十分条件となるような性質が利用されている．本研究で用いる双二次最終多項式もそのうちの 1 つである．

3 最終多項式

3.1 最終多項式の定義

下の定義は，[2] によっている．

与えられた $1\le r\le n$，体 K に対し，全てのブラケット $[i_1\cdots i_r]$（但し $(i_1,\ldots,i_r)\in\Lambda(n,r)$）により生成されるブラケット多項式の集合を $K[\Lambda(n,r)]$ と書き，その部分集合 $I^K_{n,r}\subset K[\Lambda(n,r)]$ を，全ての $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{r+1})\in\Lambda(n,r+1)$ および $(\mu_1,\ldots,\mu_{r-1})\in\Lambda(n,r-1)$ に対し

$$\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^i\cdot[\lambda_1,\ldots,\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},\ldots,\lambda_{r+1}]\cdot[\lambda_i,\mu_1,\ldots,\mu_{r-1}] \quad (1)$$

なるブラケット多項式のシチヂーで生成されるイデアルと定義する．任意のベクトル配置に対

し，この式の値は必ず0となり，よって，$I^K_{n,r}$ に属するブラケット多項式の値も0となる．

次に，有向マトロイド $\mathcal{M}$ に対し，ブラケット多項式の集合 $I^K_{\mathcal{M}}, P^K_{\mathcal{M}}, N^K_{\mathcal{M}}$ を，それぞれ以下の通り定義する．χ による任意のベクトル配置に対し，各々に属するブラケット多項式の値はそれぞれ0，正，非負となる．

- $I^K_{\mathcal{M}}$ は，$K[\Lambda(n,d)]$ 上のイデアルであり，$\{[i_1 \cdots i_r] \in \Lambda(n,r) \mid \chi(i_1,\ldots,i_r) = 0\}$ により生成される．特に χ が一様であるとき，$I^K_{\mathcal{M}} = \{0\}$ である．
- $P^K_{\mathcal{M}}$ は乗法に関して半群であり，K の正の要素，ブラケットの集合 $\{[i_1 \cdots i_r] \cdot \chi(i_1,\ldots,i_r) \mid \chi(i_1,\ldots,i_r) = +1\}$ および $\{-[i_1 \cdots i_r] \cdot \chi(i_1,\ldots,i_r) \mid \chi(i_1,\ldots,i_r) = -1\}$ により生成される．
- $N^K_{\mathcal{M}}$ は半環であり，$P^K_{\mathcal{M}}$ およびブラケットの自乗 $\{[i_1,\ldots,i_r]^2 \mid [i_1,\ldots,i_r] \in K[\Lambda(n,r)]\}$ により生成される．

ブラケット多項式 f は，$I^K_{n,d}$ に属し，かつ $I^K_{\mathcal{M}}, P^K_{\mathcal{M}}, N^K_{\mathcal{M}}$ に属する要素の和として表せるとき，つまり $f \in I^K_{n,d} \cap (I^K_{\mathcal{M}} + P^K_{\mathcal{M}} + N^K_{\mathcal{M}})$ が成り立つとき，f は $\mathcal{M}$ の最終多項式であるという．

系 3.1 有向マトロイド $\mathcal{M}$ は，それが最終多項式を持つとき、またそのときに限り，実現不可能である．

有向マトロイドが実現不可能であるとき，最終多項式が存在することは Hilbert の零点定理により保証されているが，最終多項式の具体的な形を求めることは困難である．そこで，次に述べる双二次最終多項式を導入する．

3.2 双二次最終多項式

双二次最終多項式は最終多項式の特別な場合であり，線形計画問題を解くことによって求めることができるため，通常の最終多項式に比べて容易に見つけることができる．ランクが r の有向マトロイド $\mathcal{M}$ に対し，その実現空間を $\mathcal{R}(\mathcal{M}) \subset \bigwedge_r \mathbb{R}^n$ とする．$\mathcal{M}$ に対して，$\binom{n}{r}$ 個の変数を持つ線形不等式により定義される凸多面体 $\mathcal{P}(\mathcal{M}) \subset \bigwedge_r \mathbb{R}^n$ を対応づけ，以下の性質が成り立つとする．

1. $\mathcal{P}(\mathcal{M}) = \emptyset$ のとき有向マトロイドは実現不可能，つまり $\mathcal{R}(\mathcal{M}) = \emptyset$.
2. 線形不等式の双対問題を解くことで $\mathcal{P}(\mathcal{M}) = \emptyset$ を示すことができたとき，その双対解より $\mathcal{M}$ の双二次最終多項式が構成できる．

系 3.1 および双二次最終多項式の性質より，以下の系が言える．

系 3.2 有向マトロイド $\mathcal{M}$ が双二次最終多項式を持つとき，$\mathcal{M}$ は実現不可能である．

線形不等式系を導き双二次最終多項式を構成する方法について，次章で説明する．

4 実現不可能性の証明

以下の章では，有向マトロイドは全て $r = 4$, $n = 8$ であるものとする．

実現不可能性の証明のため，式 (1) に代わるシチヂーとして，Grassmann Plücker relation を用いる．これは以下の式

$$[\tau_1\tau_2\lambda_1\lambda_2][\tau_1\tau_2\lambda_3\lambda_4] + [\tau_1\tau_2\lambda_1\lambda_4][\tau_1\tau_2\lambda_2\lambda_3] = [\tau_1\tau_2\lambda_1\lambda_3][\tau_1\tau_2\lambda_2\lambda_4] \quad (2)$$

で表され，式 (1) と同じく，有向マトロイドが実現可能であるとき，任意の $\tau_{1,2}, \lambda_{1,2,3,4} \in E$ に対してこの式は成立する．また，$\lambda_{1,2,3,4}$ の順番を適当に入れ替えることにより，式 (2) の3つの項すべてを正にすることができ，このような $\tau_{1,2}, \lambda_{1,2,3,4}$ を正規化されているという．

式 (2) が正規化されているとき，以下の2つの不等式が直ちに導かれる．

$$[\tau_1\tau_2\lambda_1\lambda_2][\tau_1\tau_2\lambda_3\lambda_4] < [\tau_1\tau_2\lambda_1\lambda_3][\tau_1\tau_2\lambda_2\lambda_4]$$
$$[\tau_1\tau_2\lambda_1\lambda_4][\tau_1\tau_2\lambda_2\lambda_3] < [\tau_1\tau_2\lambda_1\lambda_3][\tau_1\tau_2\lambda_2\lambda_4]$$

さらに，両辺の対数をとる．以下，$[\tau_1\tau_2\lambda_i\lambda_j]$ の対数を $L_{[\tau_1\tau_2\lambda_i\lambda_j]}$ と書く．

$$L_{[\tau_1\tau_2\lambda_1\lambda_2]} + L_{[\tau_1\tau_2\lambda_3\lambda_4]} < L_{[\tau_1\tau_2\lambda_1\lambda_3]} + L_{[\tau_1\tau_2\lambda_2\lambda_4]}$$
$$L_{[\tau_1\tau_2\lambda_1\lambda_4]} + L_{[\tau_1\tau_2\lambda_2\lambda_3]} < L_{[\tau_1\tau_2\lambda_1\lambda_3]} + L_{[\tau_1\tau_2\lambda_2\lambda_4]}$$

全ての $\lambda_{1,2}, \tau_{1,2,3,4} \in E$ の取り方により生成された不等式の集合を $\mathcal{B}_\chi$ と置く．この不等式系 $\mathcal{B}_\chi$ が実行可能解を持たないとき，$\mathcal{P}(\mathcal{M}) = \emptyset$ であり，有向マトロイドは実現不可能であると判定できる．

ここで，$\mathcal{P}(\mathcal{M})=\emptyset$ を示すために必要な不等式の集合は通常 $\mathcal{B}_\chi$ 全体である必要は無く，$\mathcal{B}_\chi$ の部分集合でよい．そのような部分集合は，双対線形計画問題を解くことにより求めることができる．求まった不等式の部分集合に対し，元の等式の「左辺の積 − 右辺の積」が双二次最終多項式となっている．

例 4.1 ([1, 14]) $r=4$，$n=8$ の有向マトロイド RS(8) が実現不可能であることを示す．RS(8) は，次のカイロトープ $\chi:\binom{E}{4}\to\{+1,-1\}$ により与えられる．

Table 3: RS(8) のカイロトープ

1234+	1235+	1236+	1237+	1238+	1245+	1246+
1247−	1248+	1256+	1257−	1258−	1267−	1268−
1278+	1345−	1346+	1347−	1348−	1356+	1357+
1358+	1367−	1368−	1378+	1456+	1457−	1458−
1467+	1468−	1478+	1567+	1568+	1578−	1678+
2345−	2346−	2347−	2348−	2356+	2357+	2358+
2367−	2368+	2378+	2456+	2457−	2458+	2467−
2468+	2478+	2567+	2568+	2578−	2678−	3456+
3457−	3458−	3467−	3468−	3478+	3567+	3568+
3578−	3678−	4567−	4568+	4578−	4678−	5678+

実現不可能性の証明のため，以下の 6 個の等式を取ってくる．下の集合において，添字は既にソートされており，下線の引いてある添字が $\tau_{1,2}$，残りが $\lambda_{1,2,3,4}$ に対応している．

$$\begin{aligned}
[\underline{12}34][\underline{12}56]+[\underline{12}45][\underline{12}36] &= [\underline{12}35][\underline{12}46]\\
[\underline{1}2\underline{3}4][\underline{13}57]+[\underline{13}74][\underline{1}2\underline{3}5] &= [\underline{13}54][\underline{1}2\underline{3}7]\\
[\underline{1}23\underline{4}][\underline{14}85]+[\underline{1}35\underline{4}][\underline{1}2\underline{4}8] &= [\underline{1}38\underline{4}][\underline{1}2\underline{4}5]\\
[1\underline{23}4][\underline{23}76]+[\underline{23}64][1\underline{23}7] &= [\underline{23}74][1\underline{23}6]\\
[1\underline{2}3\underline{4}][\underline{24}68]+[\underline{2}38\underline{4}][1\underline{24}6] &= [\underline{2}36\underline{4}][1\underline{24}8]\\
[12\underline{34}][\underline{34}78]+[2\underline{3}7\underline{4}][1\underline{3}8\underline{4}] &= [2\underline{3}8\underline{4}][1\underline{3}7\underline{4}]
\end{aligned}$$

両辺対数をとり，線形不等式の集合

$$\begin{aligned}
L_{[1245]}+L_{[1236]} &< L_{[1235]}+L_{[1246]}\\
L_{[1374]}+L_{[1235]} &< L_{[1354]}+L_{[1237]}\\
L_{[1354]}+L_{[1248]} &< L_{[1384]}+L_{[1245]}\\
L_{[2364]}+L_{[1237]} &< L_{[2374]}+L_{[1236]}\\
L_{[2384]}+L_{[1246]} &< L_{[2364]}+L_{[1248]}\\
L_{[2374]}+L_{[1384]} &< L_{[2384]}+L_{[1374]}
\end{aligned}$$

が得られるが，この不等式集合において左辺の集合と右辺の集合は同じであり，よって左辺の和と右辺の和は等しい．よってこの不等式系は解を持たず，RS(8) は実行不可能であることが示される．

また，この不等式系より，RS(8) の双二次最終多項式

$$\begin{aligned}
&([1234][1256]+[1245][1236])\cdot\\
&\quad([1234][1357]+[1374][1235])\cdot\\
&([1234][1485]+[1354][1248])\cdot\\
&\quad([1234][2376]+[2364][1237])\cdot\\
&([1234][2468]+[2384][1246])\cdot\\
&\quad([1234][3478]+[2374][1384])\ -\\
&[1235][1246][1354][1237][1384][1245]\cdot\\
&\quad[2374][1236][2364][1248][2384][1374]
\end{aligned}$$

が生成され，これは $K[\Lambda(8,4)]$ 上で 0 になる．また，上の式を展開すると係数が負の項が打ち消され，係数が正の項 63 個が残る．この多項式が最終多項式であることは，この 63 個の項が全て $P^{\mathbb{R}}_{\mathtt{RS(8)}}$ に属するため，最終多項式の定義より直ちに示すことができる．

一方，有向マトロイドが非一様であるときには，下の命題で示すように，用いることのできない Grassmann-Plücker relation が存在する．

命題 4.2 $\mathcal{M}$ を，非一様な有向マトロイドとする．$\mathcal{M}$ により導かれる *Grassmann-Plücker relation* の中で，値が 0 となるブラケットを含むものは，実現不可能性の証明に用いることはできない．

Proof: 値が 0 となるブラケットを含む Grassmann-Plücker relation は，式中の 3 項のうちどれか 1 つ以上が必ず 0 となるため，式 (2) から導くことのできる関係は

- 「正の二次式 = 正の二次式」
- 「0 である二次式 < 正の二次式」

のどちらかであり，「正の二次式 < 正の二次式」の形は導出することができないため，この関係式を用いることはできない．　□

そのため，非一様な有向マトロイドの実現不可能性の証明は，項の値が 0 でないブラケットのみを含んだ Grassmann-Plücker relation だけを用いて行うことになる．よって，カイロトープの値が 0 になるものが多くなるほど，実現不可能性の証明に利用することのできる Grassmann-Plücker relation の個数が減少する．

5 実験結果

実験には，Finschi & Fukuda [6] が構成した有向マトロイドカタログを用いる．このカタログにはあるランクと台集合を持つ全ての有向マトロイドが列挙されており，我々はランクが 4，台集合の要素数が 8 のものを対象とする．そのような有向マトロイドの総数は 181472 個存在し，そのうち 2628 個が一様である．今回は，一様なもののみについて実験を行った．

Bokowski & Richter-Gebert [3] により，2628 個中で 24 個の有向マトロイドが実現不可能であることが知られており，non-Euclidean 性，non-HK* 性を用いた手法では，そのうち 18 個のみ具体的な形が得られていた．

一方，今回の双二次最終多項式を用いた手法により，一様な場合について，今までは特定できていなかった 6 個を含め，24 個すべての実現不可能な有向マトロイドを列挙し，それらは Finschi & Fukuda の有向マトロイドカタログの 2〜5，7〜21，114〜118 番であることが分かった．また，非一様な場合について，双二次最終多項式を持たないものの，実現不可能な有向マトロイドが存在し，有向マトロイドカタログの 2685,2686 番がそのような例となっていることが確認された．

6 まとめ

$r = 4$，$n = 8$ の場合において，有向マトロイドが一様である場合には双二次最終多項式を用いた手法により実現不可能なものをすべて（non-HK* 性で発見できないものも含めて）見つけることができた．

一方で，有向マトロイドが非一様な場合については，non-HK* 性を用いた手法で発見できるもので，双二次最終多項式によっては見つけることができないものが存在することが確かめられた．ランクが 3 の場合，要素数が 14 のもので双二次最終多項式は存在しないにも関わらず実現不可能なものが存在することが示されている [13] が，今回得られたものはそれよりも要素数が小さい．

今後の課題として，まず $r = 4, n = 8$ のときの非一様な有向マトロイドについて，その中で双二次最終多項式により実現不可能とわかるものの個数を調べ，non-Euclidean 性や non-HK* 性を用いた結果と比較する必要がある．さらに，他のランク r，要素数 n についても実験を行うことも，双二次最終多項式の有効性を検証するために不可欠である．

References

[1] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White and G. M. Ziegler, *Oriented Matroids, Encyclopedia of Mathematics,* Vol. 46, Cambridge University Press 1993.

[2] J. Bokowski, J. Richter and B. Sturmfels, Nonrealizability proofs in computational geometry, *Discrete and Comput. Geometry*, **5**, 333–350, 1990.

[3] J. Bokowski and J. Richter-Gebert, On the classification of non-realizable oriented matroids, Part I: Generation, Preprint 1283, TH Darmstadt, 17 pages, 1990.

[4] J. Bokowski and B. Sturmfels, On the coordinatization of oriented matroids, *Discrete Comput. Geometry* **1**, 293–306, 1986.

[5] cdd+, http://www.cs.mcgill.ca/~fukuda/soft/cdd_home/cdd.html

[6] L. Finschi, A graph theoretical approach for reconstruction and generation of oriented matroids, Ph.D. Thesis, Swiss Federal Institute of Technology Zürich, 179 pages, 2001.

[7] J. Folkman and J. Lawrence, Oriented matroids, *J. Combinatorial Theory*, Ser. B **25**, 199–236, 1978.

[8] K. Fukuda, Oriented matroid programming, Ph.D. Thesis, University of Waterloo, 223 pages, 1982.

[9] K. Fukuda, S. Moriyama and Y. Okamoto, Non-LP orientations, nonlinear shellings and non-representable oriented matroids, コンピューテーション研究会, 2004.

[10] A. Mandel, Topology of oriented matroids, Ph.D. Thesis, University of Waterloo, 333 pages, 1982.

[11] J. Richter, Kombinatorische Realisierbarkeitskriterien für orientierte Matroide, (Diplomarbeit, TH Darmstadt, 112 pages); *Mitteilungen Math. Seminar Gießen*, **194**, 1989.

[12] J. Richter-Gebert, New construction methods for oriented matroids, Dissertation, KTH Stockholm, 102 pages, 1992.

[13] J. Richter-Gebert, Two interesting oriented matroids, *Documenta Mathematica*, **1**, 137–148, 1996.

[14] J.-P. Roudneff and B. Sturmfels, Simplicial cells in arrangements and mutations of ori-

ented matroids, *Geometriae Dedicata*, **27**, 153–170, 1988.

[15] R. W. Shannon, Simplicial cells in arrangements of hyperplanes, *Geometriae Dedicata*, **8**, 179–187, 1979.

[16] P. Shor, Stretchability of pseudolines is NP-hard, in: "Applied Geometry and Discrete Mathematics – The Victor Klee Festschrift" (P. Gritzmann, B. Sturmfels, eds.), DIMACS Series in Discrete Math. and Theoretical Computer Science, **4**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 531–554, 1991.