

## ユークリッド距離空間型灰色理論によるシステム構造モデルの提案

永井 正武<sup>†</sup>      山口 大輔<sup>†</sup>      李 国棟<sup>†</sup>      水谷 晃三<sup>†</sup>

本論文は ISM, FSM およびグラフィカルモデリングと同様の命題として, 灰色理論を用いたシステム構造モデル GSM を提案する。GSM はシステムの不変構造を見つけるための新しい試みである。本手法は因果関係が不確定なデータ, すなわち任意の観測値をそのまま入力ベクトルとして構造化が可能である。有向グラフを構築するには弁別係数  $\zeta$ , 階層係数  $\theta$ , パス係数  $\psi$  の 3 パラメータと参照ベクトルを必要とする。ただし, 灰色分析を線形空間で定義しなおすことで, 従来よりもアルゴリズムの物理的意味と数理解根拠が明確になったという改善点がある。実例を含む 3 つの例題を示し, 従来手法との互換性と任意の観測値に対する構造結果を比較する。

## New System Modeling Method Based on Grey Theory

Masatake NAGAI<sup>†</sup>    Daisuke YAMAGUCHI<sup>†</sup>    Guo-Dong LI<sup>†</sup>    Kozo MIZUTANI<sup>†</sup>

This paper proposes about GSM which is a system modeling approach of systems used grey theory, just like ISM and FSM. A class of systems depends on the order of grey relational grade. A route of elements is found by a grey relational matrix. GSM acquires the unchangeable directed graph by using three parameters. It is possible that the GSM handles not only known data of a causal relation but also unknown data of a causal relation. Three examples are given in this paper, existing methods and our method are used, and output result of directed graph is compared.

### 1. はじめに

システムズアプローチでは, 複雑化したある問題を解決するために, 問題を形成する要因の関係を構造化することがしばしば行われる。特に, 要因(要素, 元, 項目, 概念など)の関係が視覚的にわかり, かつその構造が不変なものであれば, 問題の取り扱いや問題解決に向けて有力な情報となる。要因の関係を視覚的に構造化する方法をシステムモデリングという。システムモデリングを実現する手法として代表的なのは, グラフ理論を導入した ISM(Interpretive Structural Modeling)[1], あいまいさを導入した FSM(Fuzzy Structural Modeling)[2] などがある。

ISM は全ての要素に対して二項関係を調べ, 因果関係の有無を 1,0 の 2 値で表す。得られた値を行列とみなしてブール代数演算を行い可到達行列を求める。ISM は可到達行列から各要素の階層を数理的に見つけることができる方法である。ただし, ISM は入力値に 1,0 だけの制約があるため, 適用できない事例が存在する。

FSM では二項関係をさらにファジー二項関係に拡張している。すなわち, FSM は入力値をファジー数まで拡張し, かつ ISM と等価のグラフを構築する。FSM は連結構造および階層構造が係数  $\lambda, p$  によって可変となるため, ISM に比べて大幅に制約が緩和されている。

ISM/FSM における共通の問題点は, 全ての関係

を一对比較により値を入力しなければならないこと, 因果関係が不明確なデータでは構造化が困難なことなどが挙げられる。これは, 因果関係の有無または強弱を値として直接入力しなければならないことに起因する。現実には, 直接因果関係がわからなくても構造化しなければならない問題が存在する。観測値から数理的根拠に基づき, 間接的に二項関係が得られれば上記の問題解決への糸口となる。

このような視点からのアプローチとして Graphical Modeling (グラフィカルモデリング [4]) がある。グラフィカルモデリングは調査や実験などで得られたデータを基に, 変数間の相関を調べ, 結果をグラフに出力する手法である。因果関係が事前にわかっていなくても, 相関構造が得られる。多くの事例では, 事前の調査などにより変数間の因果関係を推測することが可能なため, 近年注目されている手法である。ただし, グラフィカルモデリングは階層構造については議論されておらず, グラフを見やすく調整する必要がある。

Deng[5, 6, 7] により提唱された灰色システムは, 入力または出力の関係が灰色(不確定)なシステムである。この灰色システム中の構成要素の因果関係を見つけることは, グラフィカルモデリングと同じ命題に帰着する。すなわち, 観測値から間接的に因果関係を求めることである。

筆者ら [8] は灰色関連度を基に上記の命題に対する 1 つの方法を提示した。本論文は灰色理論によるシステムモデリング手法として改善型 GSM(Grey Structural Modeling) 法を提案し, いくつかの例題

<sup>†</sup> 帝京大学大学院理工学研究科, Graduate School of Science and Engineering, Teikyo University

を掲げる。本論文で提案する GSM はグラフィカルモデリングと同様、データの因果関係が既知とは限らない。しかし、データ間の順序を灰色関連度により調べ、階層構造とパス構造を見つける。GSM は ISM/FSM の互換性を保ちながら、グラフィカルモデリングの利点を導入されることが特徴である。

## 2. GSM のための数学的準備

### 2.1 灰色分析 [9]

灰色関連空間  $\{P(X); \Gamma\}$  において、分析対象となるデータサンプル  $x_0, x_i \in X (i = 1, 2, \dots, m; m \geq 2)$  を

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= [x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}] \\ x_i &= [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

により与える。  $x_0, x_i$  はベクトルであり、  $n$  次元空間上の 1 点として定まる。

灰色分析はベクトル間の類似度、言い換えれば距離（空間）の近さを評価する分析法である。灰色分析の結果、各ベクトルに灰色関連度  $\gamma \in [0, 1]$  を与える。ただし、距離空間の定義から以下の前提条件を満たす必要がある。

1.  $\|x_i\|_\zeta \geq 0$ ,  $x_i$  と  $\|x_i\|_\zeta$  は同等
2. 任意のスカラー  $\alpha$  に対し  $\|\alpha x_i\|_\zeta = \alpha \|x_i\|_\zeta$
3.  $\|x_i + x_j\|_\zeta \leq \|x_i\|_\zeta + \|x_j\|_\zeta$

$$\|x_i\|_\zeta = \left( \sum_{k=1}^n x_{ik}^\zeta \right)^{\frac{1}{\zeta}}, \zeta \geq 1, j = 1, 2, \dots, m$$

上記の前提条件を満たすとき、局所型灰色関連度  $\gamma_{0i} (0 \leq \gamma_{0i} \leq 1)$  は次式で得られる。

$$\gamma_{0i} = \frac{\max_{\forall i} \|x_0 - x_i\|_\zeta - \min_{\forall i} \|x_0 - x_i\|_\zeta}{\max_{\forall i} \|x_0 - x_i\|_\zeta} \quad (2)$$

ただし、  $x_0$  は局所型灰色関連度を算出するための参照ベクトルである。全体型灰色関連度  $\gamma_{ij} (0 \leq \gamma_{ij} \leq 1)$  ならば次式で得られる。

$$\gamma_{ij} = 1 - \frac{\|x_i - x_j\|_\zeta}{\max_{\forall i} \max_{\forall j} \|x_i - x_j\|_\zeta} \quad (3)$$

### 2.2 灰色分析における同値関係

灰色分析は灰色関連度を与えるだけでなく、各ベクトルに順序を与える [5, 7]。筆者らはこの順序に着目し、構造グラフを求める際の階層決定アルゴリズムに展開する。

灰色分析では、例えば  $\gamma_{0i} < \gamma_{0j} (i \neq j)$  となるベクトル  $x_i, x_j$  に対し、  $x_i \prec x_j$  という順序を与える。これは  $x_i$  より  $x_j$  の方が  $x_0$  に近い（類似している）ことを表す順序である。  $\gamma_{0i}, \gamma_{0j}$  に  $\gamma_{0k} (i \neq k, j \neq k)$  が与えられたとき、  $\gamma_{0i} < \gamma_{0j} < \gamma_{0k}$  であれば  $x_i \prec x_j \prec x_k$  かつ  $x_i \prec x_k$  となることは自明である。

以上のことを踏まえて、GSM における階層決定アルゴリズム提案のための“順序の公理 [10]”を以下に示す。ただし、これらの公理は全てユークリッド距離型灰色関連測度の性質 [9] に従う。

**公理 1.** 全体型灰色分析の同一性により  $\gamma_{ii} \leq \gamma_{ii}$  であるから、反射律  $x_i \prec x_i$  を満たす。

**公理 2.** 全体型灰色分析の対称性により  $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$  であるから反対称律  $x_i \prec x_j, x_j \prec x_i \Rightarrow x_i = x_j$  を満たす。

**公理 3.** 前述の通り推移律  $x_i \prec x_j, x_j \prec x_k \Rightarrow x_i \prec x_k$  を満たす。

Deng の定義した灰色関連測度 [5] との相違は公理 2 にある。Deng の灰色関連測度は全体性の公理から  $\gamma_{ij} \stackrel{\text{often}}{\neq} \gamma_{ji}$  となるため、推移律は明確化されていない。

上記の公理から、システムを構造化するための重要な性質を定義する。

**定義 1.** 公理 3 を満たす  $x_i, x_j, x_k (i \neq j \neq k)$  について、  $\psi \leq \gamma_{ij} \wedge \psi \leq \gamma_{jk} \wedge \psi \leq \gamma_{ik}$  であれば灰色推移律を満たす。ただし、  $\psi (0 \leq \psi \leq 1)$  をパス係数と定義する。

### 2.3 入力データにおける規約

GSM で取り扱うデータは 2 種類存在する。1 つは原因・結果（または入力・出力）などを表す関係値であり、もう 1 つは調査や実験で得られた観測値である。ISM/FSM は前者を利用し、Graphical Modeling は主に後者を用いる。

適用事例によってはすべてのシステム要素について因果関係が判明しているとは限らない。調査や実験によって得られたデータから因果関係を把握したい事例なども存在する。GSM は従来の ISM/FSM で取り扱ったデータとの互換性を保ち、かつ Graphical Modeling のように任意の観測値も取り扱えるように拡張する。

システムの構成要素  $s_i, s_j \in S (S \subset X; i, j = 1, 2, \dots, m)$  において、その直積集合  $S \times S$  の要素  $(s_i, s_j)$  に値を与えると、

$$A = [a_{ij}] \quad (4)$$

となる行列  $A$  が得られる。  $a_{ij}$  が 0 または 1 であれば順序対  $(s_i, s_j)$  は ISM における 2 項関係であり、  $A$  を従属行列または隣接行列と呼ぶ。  $a_{ij} \in [0, 1]$  の実数であれば順序対  $(s_i, s_j)$  は FSM におけるファジー 2 項関係であり、  $A$  をファジー従属行列と呼ぶ。式 (4) の入力データを GSM で取り扱うために、入力ベクトル  $x_i$  を以下に定義する。

**定義 2.** 入力データが因果関係を表す場合、システムの構成要素  $s_i$  の入力ベクトル  $x_i$  は、

$$x_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}] \quad (5)$$

とする ( $n = m$ )。

入力データが任意の観測値の場合、観測項目の集合  $T \subset X$  を定義する。観測項目を  $t_k \in T (k = 1, 2, \dots, n)$  とすると、入力データ  $x_{ik}$  は  $S \times T$  の要素  $(s_i, t_k)$  における観測値となる。

**定義 3.** 入力値が任意の観測値のとき、システムの構成要素  $s_i$  の入力ベクトル  $x_i$  は

$$x_i = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}] \quad (6)$$

とする。

### 3. 構造化アルゴリズムの提案

本論文で提案する GSM 法のアルゴリズムを示す。アルゴリズムは階層決定処理およびパス決定処理の 2 つからなる。最終的に有向グラフ  $G = \{X, C, A\}$  を求める。

#### 3.1 階層決定アルゴリズム

式 (4) または式 (5) により与えられた入力ベクトル  $x_i$  および参照ベクトル  $x_0$  を与える。両者の値を用いて局部型灰色分析を行い、局部型灰色関連度  $\gamma_{0i}$  を算出する。

次に、 $\gamma_{0i} \approx \gamma_{0j}$  となる要素を見つけるため、要素  $s_i, s_j$  間の灰色関連度の誤差  $e_{ij}$  を

$$e_{ij} = |\gamma_{0i} - \gamma_{0j}| \quad \text{for all } i, j \quad (7)$$

により算出する ( $0 \leq e_{ij} \leq 1, e_{ii} = 0$ )。全ての要素の組み合わせについて誤差計算を行うと、

$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1m} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{m1} & e_{m2} & \cdots & e_{mm} \end{bmatrix} \quad (8)$$

となる誤差行列  $E$  が得られる。

行列  $E$  から明らかなように、 $e_{ij} \rightarrow 0$  であるほど  $\gamma_{0i} \approx \gamma_{0j}$  である。ここで、階層を取り扱う集合を定義する。

**定義 4.** ある階層  $i$  に属する要素  $s_j$  の集合を  $C_i$  としたとき、

$$C_i = \{s_j | e_{ij} \leq \theta\} \quad (9)$$

となる集合  $C_i$  を灰色階層集合と定義する。 $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 1$ ) を階層係数と定義する。

**定義 5.** 2 つの灰色階層集合  $C_i, C_j$  について、それらの共通集合を  $Q$  とすると

$$Q = C_i \cap C_j \quad (10)$$

で与えられる。 $Q \neq \emptyset$  のとき  $Q$  を灰色複階層集合と定義する。

**命題 1.** 全ての灰色階層集合  $C_i$  は少なくとも 1 つの要素を持つ。(証明は付録参照)

全ての階層集合が得られたら、濃度<sup>‡</sup>が最少である  $C_i$ , すなわち

$$\bar{C}_i = \min \quad (11)$$

<sup>‡</sup>絶対値との混同を避けるため、 $C_i$  の濃度を  $\bar{C}_i$  とする。

となる灰色階層集合  $C_i$  から順に

$$s = C_i - \bigcup_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^m C_j = \emptyset \quad (12)$$

を満たす要素  $s$  を配置していく。ただし①  $C_i \subset C_j$  となる灰色階層集合  $C_i$  は処理の対象外とする、② 階層の順序は局部型灰色関連度  $\gamma_{0i}$  の順序に従う。

要素を配置後、

$$C_i^* = C_i - s \quad \text{for all } i \quad (13)$$

により灰色階層集合を更新し、 $\bigcup_{i=1}^m C_i = \emptyset$  となるまで処理を繰り返す。

#### 3.2 パス決定アルゴリズム

式 (5) または式 (6) で与えられた入力ベクトルを用いて全体型灰色分析を行う。その結果、

$$R_{m \times m} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1m} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mm} \end{bmatrix} \quad (14)$$

となる灰色関連マトリクス  $R$  が得られる。灰色関連マトリクスからパス集合  $A$  を以下に定義する。

**定義 6.** 灰色関連マトリクス  $R$  において、次式の条件を満たす順序対  $(s_i, s_j)$  の集合  $A \subset S \times S$  をパス集合と定義する。

$$A = \{(s_i, s_j) | \gamma_{ij} \geq \psi, \gamma_{0i} < \gamma_{0j}\} \quad (15)$$

**命題 2.** パス集合  $A$  はパス係数  $\psi$  により一意に定まる。(証明は付録参照)

上記の定義により得られた順序対  $(s_i, s_j)$  について、要素  $s_i$  から  $s_j$  に矢印付きの線を引く。このとき、グラフの冗長性を防ぐために以下のルールを設ける。

**定義 7.** 灰色推移律を満たす要素  $s_i, s_j, s_k$  について、順序対  $(s_i, s_j), (s_j, s_k), (s_i, s_k)$  となるパスは省略してもよい。

**定理 1.** 入力データ、 $\theta, \psi$  が与えられればグラフ  $G = \{X, C, A\}$  は一意に定まる。(証明は付録参照)

#### 3.3 アルゴリズム要約

上記にて提案した GSM アルゴリズムを以下に要約する。同様にアルゴリズムのフローチャートを図 1 に示す。

1. ベクトル  $x_0, x_i$  および弁別係数  $\zeta$  を入力する
2. 階層構造を獲得する
  - 2.1. 階層係数  $\theta$  を入力する
  - 2.2. 誤差行列  $E$  を獲得する
  - 2.3. 灰色階層集合  $C$  を獲得する
  - 2.4. 式 (12) を満たす要素  $s$  を配置する
  - 2.5. 全ての  $C$  から  $s$  を消去する
  - 2.6.  $C$  に要素が残っていれば 2.4 へ
3. パスを獲得する
  - 3.1. パス係数  $\psi$  を入力する
  - 3.2. 灰色関連マトリクス  $R$  を獲得する
  - 3.3. 式 (15) を満たすパス集合  $A$  を獲得する

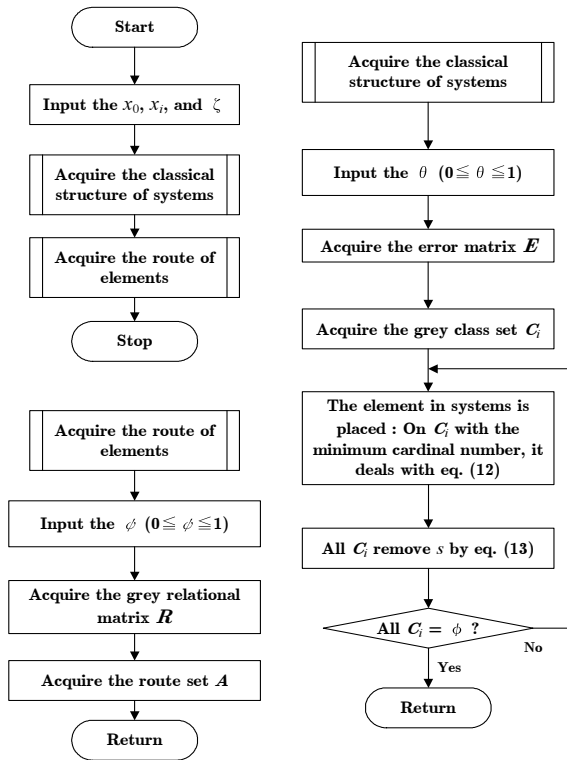


図 1 フローチャートによる GSM のアルゴリズム

#### 4. アルゴリズムの物理的意味

上記に示したアルゴリズムを、2次元データを例にして物理的意味を示す。

##### 4.1 階層決定処理の物理的意味

図 2 に階層決定アルゴリズムのイメージを示す。式 (5) および式 (6) に示す入力ベクトルは 2.1 にて示したように、 $n$ 次元空間の 1 点とみることができる。各入力ベクトルを今便宜的に中継点とみなす。

入力ベクトルとは別に目標点となるベクトル  $x_0$  を 1 点定める。この  $x_0$  と各入力ベクトルを用いて局所型灰色分析を実行すれば、目標点に対する各中継点の灰色関連度（距離の近さ）がわかる。各入力ベクトルは  $x_0$  に対する順序が与えられるので、 $\min_{\forall i} \{\gamma_{0i}\}$  となる要素  $s_i$  を最下層、 $\max_{\forall i} \{\gamma_{0i}\}$  となる要素  $s_i$  を最上層とすればシステムの構成要素に対する階層が得られる。

灰色関連度の計算により各要素が数直線上に並ぶ。しかし、現実的には並列配置が可能な項目が存在し、全ての項目が 1 直線上に並ぶとは限らない。新たな提案として定義 4 により  $\gamma_{0i} \approx \gamma_{0j}$  となる要素  $s_i, s_j$  は同一階層とみなすルールを設けた。

階層決定処理は灰色複階層集合  $Q$  に含まれない要素  $s$  から順に配置している。式 (12) は、上層または下層となる要素  $s$  から配置される。

##### 4.2 パス決定アルゴリズムの物理的意味

灰色関連マトリクスは類似行列である [9]。しかし、順序の公理により行列成分  $\gamma_{ij}$  は目標  $x_i$  に対す

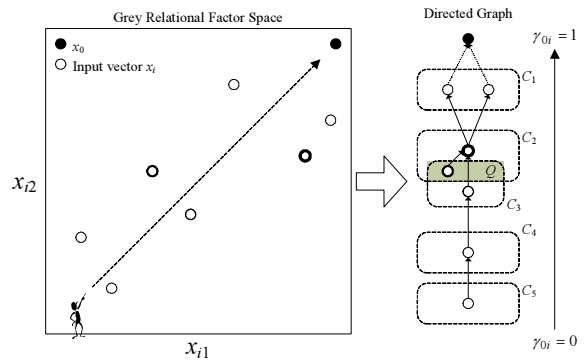


図 2 GSM における構造化処理の物理的意味

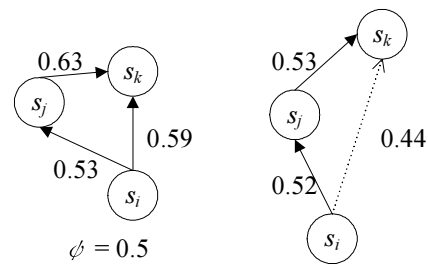


図 3 灰色推移律によるパス設定のイメージ

る局所的な順序を入力ベクトル  $x_j$  と与える。この順序が基本のパスとなる。ただし、全てのパスを与えるとグラフが冗長となるため、パス係数  $\psi$  を設ける。条件  $\psi \leq \gamma_{ij}$  は、距離の近いパス  $(s_i, s_j)$  だけを設定するという意味である。

$R$  は対称行列であるから反対称律  $s_i < s_j, s_j < s_i$  が成立する。しかし、階層決定時に各ベクトルの基本的な順序を与えているため、式 (15) は  $\gamma_{0i} < \gamma_{0j}$  であることを条件としている。その結果、階層決定とパス決定の 2 つの処理により強連結パス（サイクリックパス）の回避ができる。

灰色推移律を満足する要素  $s_i, s_j, s_k$  におけるパス設定のイメージを図 3 左に示す。図 3 左に示すように、 $s_i \rightarrow s_j, s_i \rightarrow s_k$  はともに距離が近い。そのため、全ての組み合わせについてパスを設定するとグラフに冗長性を生じる恐れがある。定義 7 により、灰色推移律を満たさないパスを残せばグラフが洗練される。

図 3 右は灰色推移律が成立しない例である。図 3 右に示すように、 $s_i, s_k$  は距離が長いため、 $s_j$  を経由した方が目標到達に近いというイメージになる。

#### 5. 例題

本提案手法を実際のデータに適用し、グラフを出力する。3 例を適用し、ISM/FSM との互換性および GSM の特徴を示す。

表 1 ISM を対象とする数値データ

$x_0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_1$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_2$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_3$	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
$x_4$	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$x_5$	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_6$	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_7$	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
$x_8$	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
$x_9$	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$x_{10}$	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
$x_{11}$	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0
$x_{12}$	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0
$x_{13}$	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
$x_{14}$	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
$x_{15}$	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1

データ出所: Warfield, Binary Matrices in System Modeling, IEEE Trans. Syst. Man & Cybern., SMC-3, p.445, 1973.

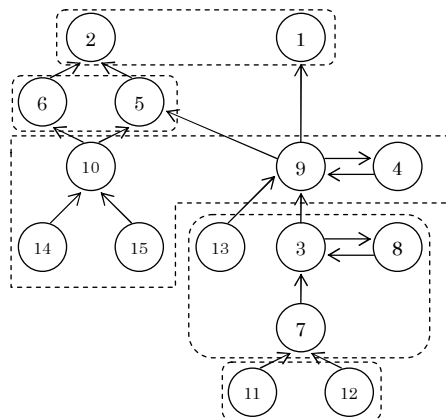


図 4 ISM による表 1 の構造グラフ

### 5.1 ISM を対象とする数値データの例

表 1[1] は、物理的意味が与えられていないが 15 の要素に対し因果関係の有無を一对比較により入力したデータである。ただし、参照ベクトル  $x_0$  は GSM を適用するために筆者らが追加した。表 1 のデータに ISM と GSM の両者を適用し、得られたグラフの比較を行う。

参照ベクトル  $x_0$  の成分はすべて 0 にした。ISM で与えるデータは 0 の数が多い要素が上層に設定される。つまり、0 が多いということはこれ以上先に遷移する要素が存在しないことを表している。

ISM を適用した結果、図 4 に示す有向グラフが得られている。GSM を適用すると図 5 に示すグラフが得られる。図 5 右の破線のパスは、灰色推移律が成立していることを表す。ISM で得られたグラフと GSM で得られたグラフを比較すると、概ね同じ傾向のグラフが得られている。

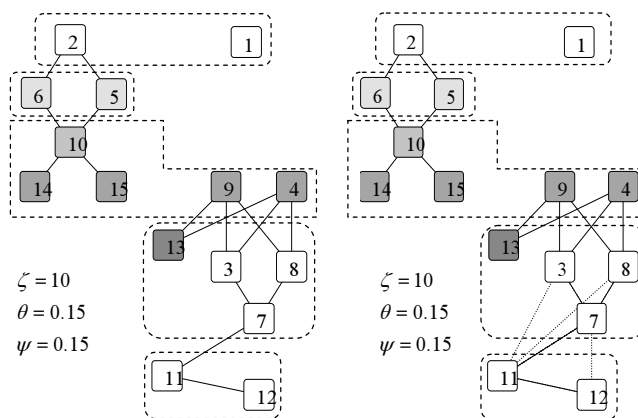


図 5 GSM による表 1 の構造グラフ

### 5.2 FSM を対象とする数値データの例

表 2[3] は、駐車場を建設する際に発生することが想定される問題を 12 項目抽出し、ある項目が他の項目に与える影響を数値化したデータである。抽出された項目を構造化し、重要な項目とそうでない項目を FSM・GSM にて整理する。

FSM および GSM を実行した結果、図 6 に示す有向グラフが得られている。図 6 中に示す GSM のグラフは、11→2,5 または 9→10 という 2 つの大きな構造が得られている。特に、灰色推移律を満たすパスを取り除くことでグラフが洗練され、階層構造がより明確になっている。

### 5.3 任意の観測値を数値データとする例

教育学において学習項目の構造化 [11, 12, 13, 14, 15] は伝統的かつ重要な問題である。筆者らはペトリネットによる学習経路の算出とエージェントによる学習経路の提示を行うシステムを提案している [16, 17, 18]。

学習項目の構造化は ISM による方法をはじめ、多数の報告がある。本適用例はあるプログラミング言

語の学習実験を行い、学習者側からみた学習項目の構造化を試みる。

本適用例では 16 名の学生を対象として各項目を学習させ、学習に要した時間を計測する。そして、総学習時間に対する時間の割合を学生ごとに算出し表 3 のデータを獲得している。 $t_0$  を参照ベクトルとして GSM を適用し、学習項目の階層構造化を試みる。

GSM を適用した結果、図 7 が得られている。図 7 のグラフに灰色推移律を含むパスを取り除くと図 8 のグラフが得られる。

洗練された構造化学習項目は、学習環境に関するパス (15 → 16) とプログラム作成までに必要な最低限必要とされる項目のパス (18 → 10) の 2 つに大別されている。

## 6. 考察

### 6.1 既存の方法との比較

既存の構造化手法である ISM, FSM および Graphical Modeling と本稿で提案している GSM の各特徴を比較を表 4 に示す。取り扱いデータは、ISM, FSM, GSM となるにつれて拡張されている。

表 2 FSM を対象とする数値データ

$x_0$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
$x_1$	0.00	0.36	0.59	0.49	0.33	0.46	0.30	0.33	0.46	0.57	0.32	0.54
$x_2$	0.64	0.00	0.64	0.58	0.46	0.52	0.42	0.46	0.54	0.61	0.39	0.63
$x_3$	0.48	0.35	0.00	0.49	0.34	0.44	0.30	0.31	0.44	0.53	0.27	0.46
$x_4$	0.44	0.38	0.57	0.00	0.48	0.44	0.34	0.35	0.50	0.56	0.28	0.49
$x_5$	0.62	0.57	0.66	0.61	0.00	0.56	0.40	0.39	0.58	0.69	0.33	0.57
$x_6$	0.69	0.51	0.61	0.54	0.45	0.00	0.39	0.37	0.51	0.64	0.36	0.55
$x_7$	0.64	0.54	0.74	0.68	0.61	0.59	0.00	0.51	0.66	0.71	0.47	0.64
$x_8$	0.74	0.60	0.72	0.66	0.59	0.64	0.50	0.00	0.64	0.77	0.44	0.68
$x_9$	0.69	0.49	0.63	0.55	0.49	0.49	0.36	0.36	0.00	0.65	0.32	0.56
$x_{10}$	0.41	0.34	0.41	0.39	0.28	0.28	0.24	0.24	0.34	0.00	0.21	0.41
$x_{11}$	0.64	0.60	0.76	0.71	0.71	0.72	0.55	0.58	0.67	0.82	0.00	0.72
$x_{12}$	0.51	0.41	0.50	0.46	0.38	0.46	0.31	0.33	0.47	0.64	0.29	0.00

$x_1$  収容施設の問題       $x_5$  利用期間の問題       $x_9$  利用者の条件の問題  
 $x_2$  舗装するか否かの問題       $x_6$  利用手続きの問題       $x_{10}$  建設費の問題  
 $x_3$  建設場所の問題       $x_7$  一台当たりの駐車面積の問題       $x_{11}$  利用開始日の問題  
 $x_4$  利用料金の問題       $x_8$  駐車場の配置の問題       $x_{12}$  周辺の環境の問題

データ出所：天笠三知夫，システム構成論，森山書店，p.67，1986.

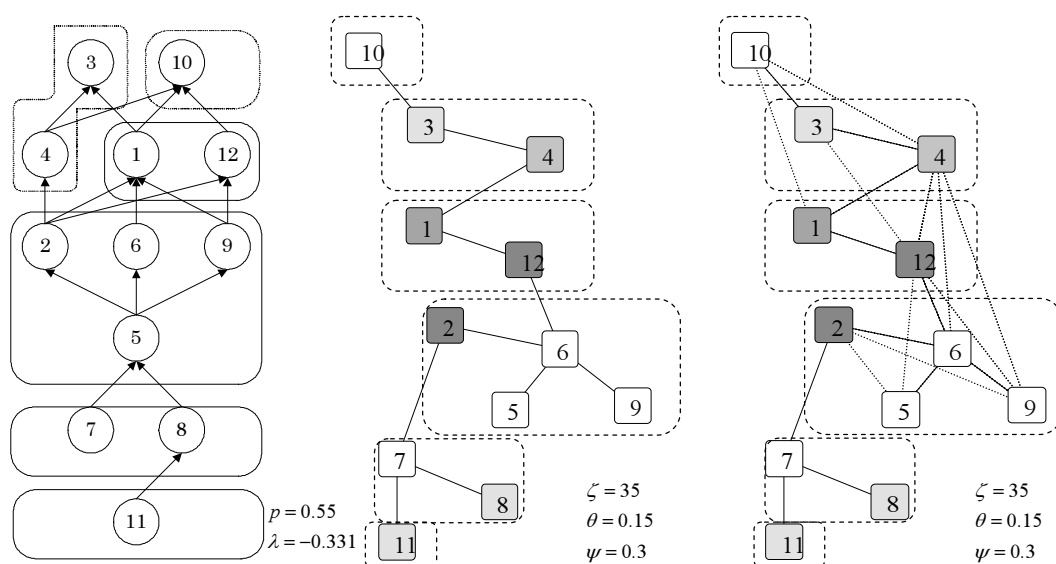


図 6 表 2 のデータにおける構造グラフ（左：FSM を適用，中および右：GSM を適用）

特に，取り扱う集合が各手法ともに異なっている。ISM, FSM は項目間の因果関係を直接的に表現する値であるのに対し，GSM は任意に観測された値を取り扱う。

ISM は入力されたデータにより階層数が固定となる。FSM, GSM は分析者が操作を加えることにより階層数が可変となる。ただし，FSM はパラメータが  $\lambda, p$  の 2 つであるのに対し，GSM では  $\zeta, \theta, \psi$  の 3 つとなっている。弁別係数  $\zeta$  は灰色関連空間を伸ばしたり縮める役割を持つ [9]。  $\zeta \rightarrow \infty$  としていき，入力データの灰色関連度特性に変化がなくなったときの値を用いる。これは不変的な構造を見つける幾何学的な問題を，システムモデリングにおいて解決するための 1 方法と捉えることができる。

サイクリックパスは一定項目間を巡回する構造であり，存在しないことが望ましい。ISM ではサイクリックパスの回避は手続き上できない。FSM では

操作次第で回避できることが報告されている [2, 3]。GSM においても構造化処理を行うことで回避することができる。

## 6.2 GSM の特徴

上述の比較から本稿で提案する GSM の位置づけを図 9 に示す。GSM の特徴をまとめると以下のようになる。

1. 取り扱い可能なデータ集合の拡張
2. 因果関係が間接的なデータの構造化が可能
3. 階層およびパスの調整が可能
4. 弁別係数による不変構造発見方法の導入
5. 強連結パスの回避が可能

GSM は既存の手法と異なり，構造獲得のための基準値，すなわち参照ベクトル  $x_0$  を必ず与えなければならない。参照ベクトル獲得のために従来の手法よりも工数が増えることが考えられる。また，誤っ

表 3 総学習時間に対する各項目の学習割合

	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8	s9	s10	s11	s12	s13	s14	s15	s16
t <sub>0</sub>	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
t <sub>1</sub>	2.3	0.0	0.0	86.3	0.0	0.0	2.0	3.6	5.0	0.0	0.0	12.7	0.0	22.6	0.0	0.0
t <sub>2</sub>	0.6	0.0	0.0	2.2	20.0	0.5	0.0	3.4	1.5	0.0	0.0	0.7	5.5	6.2	0.0	0.7
t <sub>3</sub>	3.5	0.0	0.0	1.5	9.8	13.7	0.0	21.3	1.4	0.0	0.0	0.9	1.3	31.8	0.0	1.7
t <sub>4</sub>	4.1	3.4	0.0	1.6	18.9	1.9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	75.8	12.5	7.3	0.0	1.0
t <sub>5</sub>	0.6	0.0	0.0	2.1	29.2	2.8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.6	5.2	4.3	0.0	0.0
t <sub>6</sub>	44.9	0.0	0.0	3.8	22.0	4.8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.9	4.9	27.8	0.0	0.0
t <sub>7</sub>	1.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.7	9.6	0.0	4.0	0.0	0.0	0.0	42.5	0.0	7.9	0.0
t <sub>8</sub>	0.0	9.8	0.0	0.0	0.0	3.8	2.1	46.9	6.9	0.6	7.1	0.0	12.9	0.0	0.0	12.1
t <sub>9</sub>	5.3	0.0	12.3	0.0	0.0	3.0	14.7	2.1	37.1	45.5	7.6	4.7	0.7	0.0	42.2	0.6
t <sub>10</sub>	1.0	8.6	14.0	0.0	0.0	6.0	3.5	5.9	37.5	5.9	0.0	0.6	6.9	0.0	11.4	0.7
t <sub>11</sub>	0.8	0.0	13.8	2.6	0.0	6.4	1.1	0.0	3.1	2.4	0.0	0.7	1.8	0.0	9.0	0.7
t <sub>12</sub>	1.3	0.0	30.7	0.0	0.0	5.2	15.3	0.0	2.4	0.0	0.0	0.6	1.5	0.0	8.3	22.6
t <sub>13</sub>	0.0	0.0	29.1	0.0	0.0	2.5	51.8	0.0	1.1	0.0	0.0	0.8	4.2	0.0	5.3	34.0
t <sub>14</sub>	3.5	0.0	0.0	0.0	0.0	1.4	0.0	0.0	0.0	0.0	1.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
t <sub>15</sub>	2.9	36.6	0.0	0.0	0.0	22.9	0.0	2.0	0.0	0.0	18.9	0.0	0.0	0.0	13.5	13.7
t <sub>16</sub>	26.7	41.7	0.0	0.0	0.0	17.8	0.0	5.3	0.0	0.0	10.8	0.0	0.0	0.0	2.5	0.9
t <sub>17</sub>	1.2	0.0	0.0	0.0	0.0	2.2	0.0	9.6	0.0	45.7	54.2	0.0	0.0	0.0	0.0	11.1
t <sub>18</sub>	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	4.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

t<sub>1</sub> プログラミング言語とは何か  
t<sub>2</sub> プログラム生成の流れ  
t<sub>3</sub> 主な高級言語  
t<sub>4</sub> 基本命令体系  
t<sub>5</sub> 基本処理命令  
t<sub>6</sub> アルゴリズムとは何か  
t<sub>7</sub> Visual Basic の基礎  
t<sub>8</sub> Visual Basic の起動方法  
t<sub>9</sub> フォームの作成方法  
t<sub>10</sub> ツールボックスの利用方法  
t<sub>11</sub> 動作の指定方法  
t<sub>12</sub> ソースコードの記述  
t<sub>13</sub> プログラムの実行方法  
t<sub>14</sub> 高級言語とは何か  
t<sub>15</sub> エディタの使い方  
t<sub>16</sub> コンパイル方法  
t<sub>17</sub> 実行コマンド  
t<sub>18</sub> 機械語とは何か

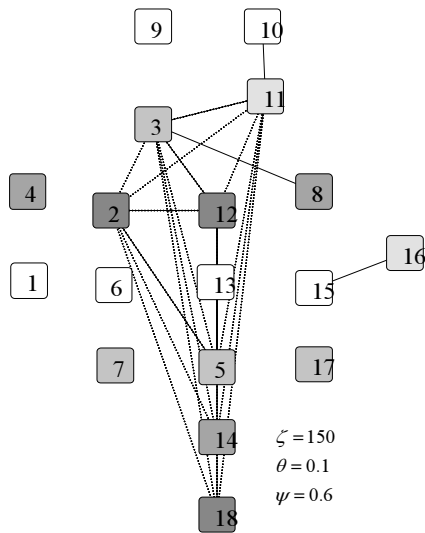


図 7 構造化学習項目

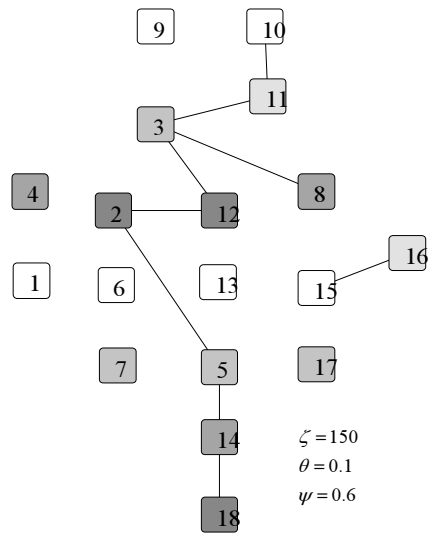


図 8 洗練された構造化学習項目

た値を入力すると適切な有向グラフを得ることができなくなる。参照ベクトルの設定は正しく行わなければならない。ただし、GSMはISMやFSMにおける、二項関係データの二対比較法によるデータ入力の工数が削減可能である。

## 7. おわりに

本論文は灰色理論によるシステムモデリング手法として改善型 GSM 法を提案した。灰色分析を線形空間で再定義することにより、アルゴリズムの物理的な意味を与えるだけでなく、線形空間の数理的根拠に基づく手法を提案した。

例題を 3 つ適用し、ISM/FSM とデータの取り扱いについて互換性があることを示した。また、任意の観測値に対するシステムの構造化を行った。

グラフは結果を視覚化するため、定量評価の方法が多数報告されている。今後は様々な分野に本手法を適用し、定量的評価を行う。また、最適な構造を与える係数  $\zeta, \theta, \psi$  の決定方法などが今後の課題となる。

## 謝辞

本研究の遂行にあたり貴重な助言を賜った神奈川大学工学部教授北岡正敏博士に深く感謝いたします。

表 4 GSM とその他の手法との比較

	ISM	FSM	Graphical Modeling	GSM
適用集合理論	クリスプ集合	Fuzzy 集合	クリスプ集合	灰色集合
入力値の二項関係	代数的二項関係	Fuzzy 数的二項関係	相関関係	灰色関連度関係
取り扱うデータ	0, 1 の 2 値	[0,1] の実数値	任意の実数	任意の実数
入力値の因果関係	確定的既知	あいまいな既知値	間接的既知 (観測値)	確定・あいまい・間接的既知
得られるグラフ	有向グラフ	有向グラフ	条件付有向グラフ	有向グラフ
階層数の調節	固定	可変可能 ( $\lambda$ )	人間が見やすく調節	可変可能 ( $\zeta, \theta$ )
強連結構造の回避	不可	可 ( $p$ )	可 (共分散選択)	可 ( $\zeta, \psi$ )

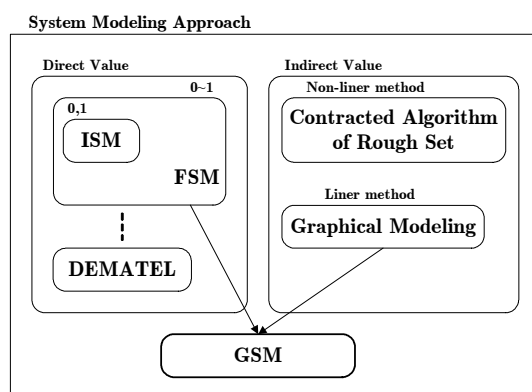


図 9 伝統的手法に対する GSM の位置づけ

### 参考文献

[1] J. N. Warfield, "Binary Matrices in System Modeling," IEEE Trans. Syst., Man, and Cybern., vol.SMC-3, no.5, pp.441-449, Sept. 1973.

[2] 田崎栄一郎, 天笠美知夫, 滝沢雅人, "あいまい理論によるシステムの構造モデル," 日本オペレーションズ・リサーチ学会論文誌, vol.20, no.4, pp.285-310, Dec. 1977.

[3] 天笠美知夫, システム構成論, 森山書店, 1986.

[4] 宮川雅巳, グラフィカルモデリング, 朝倉書店, 1997.

[5] J.L. Deng, Grey Systems, China Ocean Press, 1988.

[6] K.L. Wen, Grey Systems Modeling and Prediction, Yang's Scientific Press, Tucson, 2004.

[7] 永井正武, 山口大輔, 灰色理論と工学応用方法, 共立出版, 2004.

[8] 山口大輔, 小林俊裕, 水谷晃三, 永井正武, "灰色理論による構造化モデルの提案," 情報処理学会研究報告, AL-96-4, pp.25-32, July 2004.

[9] 山口大輔, 李国棟, 水谷晃三, 永井正武, "ユークリッド距離による灰色関連測度の提案," 情報処理学会研究報告, FI78-2, pp.9-16, Mar. 2005.

[10] 松坂和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 1968.

[11] 佐藤隆博, ISM 構造学習法, 明治図書出版, 1987.

[12] 竹谷 誠, "IRS テスト構造グラフの構成法と活用法," 日本教育工学会誌, vol.5, no.3, pp.93-103, 1980.

[13] 松原 勇, "グラフ理論を用いた授業設計支援システムに関する一考察," 信学論 (A), vol.J69-A, no.9, pp.1043-1049, Sept. 1986.

[14] 竹谷 誠, 佐々木整, "学習者描画の認知マップによる理解度評価法," 信学論 (D-II), vol.J80-D-II, no.1, pp.336-347, Jan. 1997.

[15] 斎藤 一, 大内 東, 前田 隆, "構造モデリングと概念地図を用いた概念形成支援法とそのシステムの試作," 信学論 (D-I), vol.J84-D-I, no.9, pp.1431-1439, Sept. 2001.

[16] 水谷晃三, 池本 悟, 山口大輔, 永井正武, "MAS-KNOPPIX による Web 型学習システムの提案," 信学技報, May 2005.

[17] 池本 悟, 小林俊裕, 水谷晃三, 永井正武, "学習経路提示とグループ化による Web 教育への実践と考察," 信学技報, May 2005.

[18] B.Y. Cai, M. Nagai, J.R. Zhong, "The Comparison and Development Strategy of Web-Based Learning And Traditional Learning by 5W1H Method and Interpretive Structure Model," GCCCE/NEIT 2002, pp.198-205.

## A 付録

### 1.1 命題 1 の証明

式 (7) おいて,  $\forall i$  に対して  $e_{ii} = \gamma_{0i} - \gamma_{0i} = 0$  となる。式 (9) において  $\theta = 0$  としたとしても  $e_{ii} \leq \theta$  は成立する。ゆえに, 灰色階層集合  $C_i$  は少なくとも 1 つの要素  $s_i$  を持つ。

### 1.2 命題 2 の証明

パス集合  $A$  は灰色関連マトリクス  $R$  を事前に算出する。そして, 式 (15) の条件  $\gamma_{0i} < \gamma_{0j}$  はパス集合算出前に決定している。ゆえに, パス係数  $\psi$  を定めればパス集合  $A$  は一意に定まる。

### 1.3 定理 1 の証明

命題 1 および命題 2 の証明により, グラフ  $G$  は一意に定まる。