

グラフクラスにおける森の数え上げに対する高速指数時間 アルゴリズム

ハイディ・ゲバウアー¹ 岡本 吉央²

¹ スイス連邦工科大学チューリッヒ校 情報科学部

² 豊橋技術科学大学 情報工学系

概要

正則グラフと弦グラフにおける森の数え上げ問題が #P 完全であることを証明する。また、この問題に対して、3 正則グラフにおける $O^*(1.8494^m)$ 時間アルゴリズムと単位区間グラフにおける $O^*(1.9706^m)$ 時間アルゴリズムを与える。ただし、 m はグラフの辺数である。これらのアルゴリズムは Tutte 多項式の計算へ拡張できる。

Fast Exponential-Time Algorithms for the Forest Counting in Graph Classes

Heidi Gebauer¹ Yoshio Okamoto²

¹ Department of Computer Science, ETH Zurich

² Department of Information and Computer Sciences, Toyohashi University of Technology

Abstract

We prove the #P-completeness for counting the number of forests in regular graphs and chordal graphs. We also present algorithms for this problem, running in $O^*(1.8494^m)$ time for 3-regular graphs, and $O^*(1.9706^m)$ time for unit interval graphs, where m is the number of edges in the graph. The algorithms can be generalized to the Tutte polynomial computation.

1 はじめに

数え上げは組合せ論の基本であり、そのアルゴリズム的側面も研究されて来ている。その周辺で最も興味深い現象の 1 つに、グラフの全域木の数は多項式時間で数えられる [5] のに対して、森の数え上げは平面的二部グラフにおいてさえも #P 完全である [11]、ということが挙げられる。これら 2 つの数え上げ問題はグラフ (あるいはマトロイド) の Tutte 多項式の計算という一般的な枠組に当てはまり、この関連によって、アルゴリズムの数え上げの分野は実りある進展を見せて来ている。

一般に、#P 完全な数え上げ問題に対するアプローチは主に 2 つあり、1 つは近似アプローチ、もう 1 つは厳密アプローチである。近似アプローチにおいては、例えばマルコフ連鎖モンテカルロ法によって所望の値を定められた精度保証の下で高速に求めようとする。Jerrum の本 [4] を参照のこと。その一方で、厳密アプローチでは、厳密で正確な値に固執し、計算時間を出来る限り削減しようとする。与えられた問題が #P 完全であるとき、アルゴリズムが多項式時間で実行されることは期待できないので、準指数時間アルゴリズムか、または、指数時間アルゴリズムであるが、その底を出来る限り 1 に近くするこ

とを目標とする。

本論は厳密アプローチを取る。まず、森の数え上げ問題が正則グラフと弦グラフに対して #P 完全であることを示す。その次に、この問題に対して、3 正則グラフにおける $O^*(1.8494^m)$ 時間アルゴリズムと単位区間グラフにおける $O^*(1.9706^m)$ 時間アルゴリズムを与える。ただし、 m はグラフの辺数である。これらのアルゴリズムが Tutte 多項式の計算へ拡張できることも補足しておきたい。

関連研究 森の数え上げ問題 (または、より一般的に Tutte 多項式の計算) を厳密アプローチから研究した論文は幾つかある。その基盤となるのは、Jaeger, Vertigan & Welsh [6] による困難性の結果で、すなわち、彼らはグラフの森の数え上げ問題が #P 完全であることを示した。Vertigan & Welsh [11] はグラフが平面的二部グラフに限られていてもこの問題が #P 完全であることを証明した。

厳密アルゴリズムの側からは、森の数え上げについて多くのことは知られていない。Andrzejak [1] と Noble [7] は独立に木幅 (tree-width) が定数のグラフにおける森の数え上げに対して多項式時間アルゴリズムを与えた。著者の知るところでは、多項式時間解法が知られている非自明な場合はこれだけである。Giménez, Hliněný & Noy [3] はクリーク幅 (clique-width) が定数のグラフに対する準指数時間 (subexponential) アルゴリズムを与え、Sekine, Imai & Tani [8] は平面的グラフに対する準指数時間アルゴリズムを与えた。クリーク幅が 1 のグラフ (すなわち、コグラフ) に対しても #P 完全性は未解決であることを補足する。

近似アプローチから、森の数え上げ問題に対していわゆる完全多項式時間確率的近似スキーム (FPRAS) が存在するかどうかは大きな未解決問題である [10]。

正則グラフにおける幾つかの数え上げ問題に対して、Vadhan [9] は補間法 (interpolation technique) とフィボナッチ法 (Fibonacci technique) と呼ばれる方法を用いて #P 完全性の結果を示した。これらの技法は本稿でも暗に用いられている。正則グラフに対する厳密アルゴリズムとしては Eppstein [2] の 3 正則グラフにおけるハミルトン閉路の存在性、および、数え上げ問題がある。彼のアルゴリズムはこれらの問題をそれぞれ $O^*(2^{n/3})$ および $O^*(2^{3n/8})$ という計算量で解く。ただし、 n は与えられるグラフの頂点数である。

準備 本稿で扱うグラフは全て有限かつ無向である。グラフ $G = (V, E)$ に対して、頂点 $v \in V$ の G における次数 (degree) とは、 v に接続する辺の数であり、 $\deg_G(v)$ と表記する。グラフが k 正則 (k -regular) であるとは、その各頂点の次数が k となることである。グラフが平面的 (planar) であるとは、それが平面上に辺交差なく描けることである。グラフが二部 (bipartite) であるとは、その頂点集合を 2 つの部分に分割して、各辺が双方に端点を持つようにできることである。

グラフ $G = (V, E)$ の森 (forest) とは、辺部分集合 $F \subseteq E$ で、閉路を携えていないもののことである。我々の目標は与えられたグラフの森の数を計算することである。グラフのクラスを Γ で表したとき、次が考える問題のテンプレートである。

問題: Γ -#FORESTS

入力: グラフ $G \in \Gamma$;

出力: G の森の数。

ある多項式 $p(n)$ に対して $f(n) = O(g(n)p(n))$ が成り立つとき、 $f(n) = O^*(g(n))$ と書くことにする。すなわち、 O^* 記法では多項式因子を無視するのである。

2 計算困難性

この節では、困難性の結果に焦点を絞り、様々な Γ に対して問題 Γ -#FORESTS が #P 完全であることを証明する。

2.1 有界次数グラフ

最大次数が 3 であるグラフ全体のクラスを 3Δ と表記し、平面的二部グラフ全体のクラスを BP と表記する。また、最大次数が 3 である平面的二部グラフ全体のクラスを $3\Delta BP$ と表記する。

定理 2.1. 問題 $3\Delta BP$ -#FORESTS は #P 完全であり、特に、 3Δ -#FORESTS は #P 完全である。

この定理を証明するために、Vertigan & Welsh [11] によって #P 完全であることが証明されている BP -#FORESTS を用いる。まず、 $3\Delta BP$ -#FORESTS の次のような変種が #P 完全であることを証明する。

問題: 包含辺を持つ $3\Delta BP$ -#FORESTS

入力: 最大次数が 3 の平面的二部グラフ $G = (V, E)$ と辺部分集合 $S \subseteq E$;

出力: G の森で S を含むものの数。

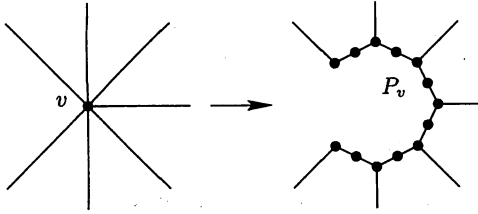


図 1: 頂点を道に置き換える (局所的な絵).

補題 2.2. 包含辺を持つ $3\Delta BP$ -#FORESTS は #P 完全である.

証明. 問題 BP -#FORESTS を包含辺を持つ $3\Delta BP$ -#FORESTS に帰着する平面的二部グラフ $G = (V, E)$ が BP -#FORESTS に対する入力として与えられているとする. グラフ G の平面埋め込みを固定する (これは線形時間で得られる). この埋め込みから, 次のようにして別のグラフ G' を得る. このとき, G' も平面的二部グラフであり, 更に, その最大次数は高々 3 になる. まず, 各頂点 $v \in V$ を長さ $2 \deg_G(v) - 2$ の道 P_v に置き換え, その道は頂点 v を取り巻くかのように埋め込む. 頂点 v の各近傍は元の埋め込みと同じ順序で P_v の頂点と 1 つおきに結ばれる. 図 1 を参照のこと. この操作を G の全ての頂点に対して行ない, 出来上がったグラフが G' である. このとき, G が平面的二部グラフだったので, G' もそうであり, G' の最大次数が高々 3 であることに注意する.

全ての $v \in V$ に対する P_v の辺の集合の合併を S と置く. このとき, G の森全体から G' の森で S を含むもの全体への自然な全単射が存在することが分かり, よって, 補題が証明された. \square

定理 2.1 の証明. 包含辺を持つ $3\Delta BP$ -#FORESTS を $3\Delta BP$ -#FORESTS へ帰着する. 最大次数が 3 の平面的二部グラフ $G = (V, E)$ と $S \subseteq E$ が与えられて, $s = |S|$ とする. このとき, 各 $\ell \in \{1, \dots, s+1\}$ に対して, G の各辺 $e \in S$ を長さ $2\ell - 1$ の道 P_e に置き換えることで, グラフ $G_\ell = (V_\ell, E_\ell)$ を構成する. 例を図 2 に挙げる. ただし, G_1 は G と同型なので注意する.

パラメータ $\ell \in \{1, \dots, s+1\}$ を固定する. グラフ G_ℓ の森全体から G の森全体への写像を次のように定義する. グラフ G_ℓ の森 $F_\ell \subseteq E_\ell$ が G の森 $F \subseteq E$ に写されるのは, 次のとき, そしてそのときに限る.

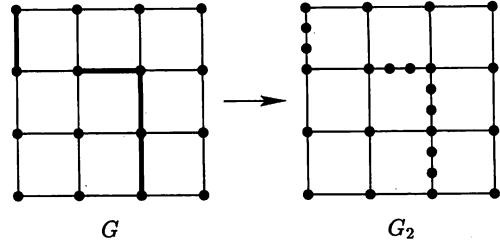


図 2: 辺を道に置き換える. 青い太線は S に属する辺であり, G_2 においてそれらが皆長さ 3 の道に置き換えられている.

- 条件 $e \in S \cap F$ が成り立つときは, P_e の辺全てが F_ℓ に属する.
- 条件 $e \in S \setminus F$ が成り立つときは, P_e の少なくとも 1 つの辺が F_ℓ の属する.
- 条件 $e \notin S$ が成り立つときは, e が F_ℓ に属するとき, そのときに限り, e が F に属する.

グラフ G の各森 F が G_ℓ の $(2^{2\ell-1} - 1)^{|S \setminus F|}$ 個の森の像になっていることを確認できる. したがって, G_ℓ の森の数は次の量に等しい.

$$\begin{aligned} \sum_F (2^{2\ell-1} - 1)^{|S \setminus F|} &= \sum_{i=0}^s \sum_{F: |S \setminus F|=i} (2^{2\ell-1} - 1)^i \\ &= \sum_{i=0}^s a_i x_\ell^i. \end{aligned}$$

ただし, $x_\ell = 2^{2\ell-1} - 1$ であり, a_i は G の森 F で $|S \setminus F| = i$ を満たすもの数である. 異なる全ての $\ell, \ell' \in \{1, \dots, s+1\}$ に対して $x_\ell \neq x_{\ell'}$ であるので, 全ての $\ell \in \{1, \dots, s+1\}$ に対して G_ℓ の森の数が分かれば, そこから a_0, \dots, a_s を多項式時間で得ることができる. グラフ G の森で S を含むもの数が a_0 であるから, これで帰着が完了した. \square

2.2 正則グラフ

記号 $k\text{REG}$ によって k 正則グラフ全体の族を表し, $k\text{REGP}$ によって k 正則平面的グラフ全体の族を表すことにする.

定理 2.3. 問題 3REGP -#FORESTS は #P 完全である.

証明. 定理の証明のために, 問題 $3\Delta BP$ -#FORESTS を 3REGP -#FORESTS に帰着する. 最大次数 3 の平

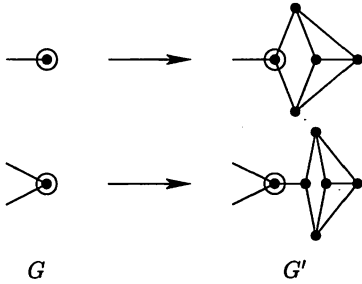


図 3: 次数 1 と次数 2 の頂点にグラフを貼り付ける.

面的二部グラフ $G = (V, E)$ が $3\Delta BP$ -#FORESTS の入力として与えられている。一般性を失わずに G には次数 0 の頂点がないと仮定できる。このとき、 G から 3 正則グラフ G' を次のように構成する。図 3 (上) に示すように適当なグラフを次数 1 の各頂点に貼り付け、図 3 (下) に示すように適当なグラフを次数 2 の各頂点に貼り付ける。出来上がるグラフが 3 正則であり、平面的であることが確認できる。グラフ G における次数 1 と次数 2 の頂点数をそれぞれ n_1, n_2 で表すことにする。このとき、 G' の森の数は G の森の数に $c_1^{n_1} c_2^{n_2}$ を掛けたものに等しくなることが分かる。ただし、 c_1, c_2 はそれぞれ G の次数 1, 2 の頂点に貼り付けたグラフの森の数である。これで帰着が完了した。□

同様に、次を示すこともできる (詳細は省略する)。

定理 2.4. 各 $k \geq 3$ に対して、 $k\text{REG}$ -#FORESTS は #P 完全である。

2.3 弦グラフ

グラフが弦グラフ (chordal graph) であるとは、その誘導閉路の長さがどれも 3 であることである。弦グラフ全体のクラスを CHORDAL で表す。

定理 2.5. 問題 CHORDAL-#FORESTS は #P 完全である。

定理 2.5 を証明するために、次のような変種を用いる。

問題: 除外辺を持つ CHORDAL-#FORESTS

入力: 弦グラフ $G = (V, E)$ と、辺部分集合 $S \subseteq E$;

出力: G の森で、 S の辺をどれも含まないものの数。

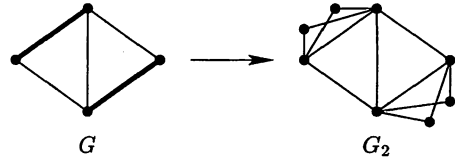


図 4: 長さ 2 の道で結ぶ。青い太線が S に属する辺である。

補題 2.6. 除外辺を持つ CHORDAL-#FORESTS は #P 完全である。

証明. 帰着には、 Γ -#FORESTS が #P 完全であるような任意のグラフクラス Γ を用いることができる。例えば、 $\Gamma = \text{BP}$ とする。与えられたグラフ $G = (V, E) \in \Gamma$ に対して、弦グラフ $G' = (V', E')$ を $V' = V, E' = \binom{V}{2}$ とすることで構成する。すなわち、 G' は V 上の完全グラフである。ここで、 $S = \binom{V}{2} \setminus E$ とすると、 G の森全体と G' の森で S の辺をどれも含まないものの全体の間には 1 対 1 対応が存在することが分かる。□

定理 2.5 の証明. この証明では、先ほどと同様に、除外辺を持つ CHORDAL-#FORESTS を CHORDAL-#FORESTS に帰着する。弦グラフ $G = (V, E)$ と $S \subseteq E$ が与えられていて、 $s = |S|$ とし、各 $\ell \in \{0, \dots, s\}$ に対して各 $e \in S$ の両端点を並列に長さ 2 の ℓ 個の道で結んでできたグラフを $G_\ell = (V_\ell, E_\ell)$ とする。例を図 4 に示した。ただし、 G_0 は G と同形であるので注意する。

パラメータ $\ell \in \{0, \dots, s\}$ を固定して、 e の両端点へ新たに付け加えた G_ℓ の道の辺集合を $P_e^1, P_e^2, \dots, P_e^\ell$ と表記する。このとき、 G_ℓ の森全体から G の森全体への写像を次のように定義する。グラフ G_ℓ の森 $F_\ell \subseteq E_\ell$ がグラフ G の森 $F \subseteq E$ へ写されるのは次のとき、そのときに限る。

- 条件 $e \in S \cap F$ が成り立つときには、 F_ℓ が P_e^1, \dots, P_e^ℓ の中の 1 つを含む。
- 条件 $e \in S \setminus F$ が成り立つときには、 F_ℓ が P_e^1, \dots, P_e^ℓ の辺をどれも含まない。
- 条件 $e \notin S$ が成り立つときには、 e が F_ℓ に属するとき、そのときに限り、 e は F に属する。

このとき、グラフ G のそれぞれの森 F はグラフ G_ℓ の $(3^\ell + \ell 3^{\ell-1})^{|S \cap F|} 3^{|S \setminus F|}$ 個の森の像になっている。

したがって、 G_ℓ の森の数は次の量に等しい。

$$\begin{aligned} & \sum_F (3^\ell + \ell 3^{\ell-1})^{|S \cap F|} 3^{\ell |S \setminus F|} \\ &= \sum_{i=0}^s \sum_{F: |S \cap F|=i} (3^\ell + \ell 3^{\ell-1})^i 3^{\ell(s-i)} \\ &= 3^{\ell s} \sum_{i=0}^s \sum_{F: |S \cap F|=i} (1 + \ell/3)^i \\ &= 3^{\ell s} \sum_{i=0}^s a_i x_\ell^i. \end{aligned}$$

ただし、 $x_\ell = 1 + \ell/3$ であり、 a_i は G の森 F で $|S \cap F| = i$ を満たすものの数である。異なる全ての $\ell, \ell' \in \{0, \dots, s\}$ に対して $x_\ell \neq x_{\ell'}$ となるので、全ての $\ell \in \{0, \dots, s\}$ に対して G_ℓ の森の数が分かれば、 a_0, \dots, a_s を多項式時間で計算できる。ここで、 a_0 は G の森で S の辺をどれも含まないものの数であるので、帰着が完了する。 \square

3 厳密アルゴリズム

本節では、森の数え上げ問題に対する高速 (指数時間) アルゴリズムの設計に焦点を絞る。自明なアルゴリズムの計算量は $O^*(2^m)$ であるので、目標はこの上界を打ち破ることである。本節を通じて、与えられたグラフの辺数を m と表記する。

3.1 正則グラフ

問題 3REG-#FORESTS (すなわち、3 正則グラフの森の数え上げ問題) に対するアルゴリズムから始める。計算量は $O^*(1.8494^m)$ である。

与えられた頂点数 n の 3 正則グラフを G とする。まず、 G の任意の極大独立集合 I を取ってくる。このとき、 I の頂点数が $n/4$ 以上であることはすぐに分かる¹。集合 I の頂点 v に接続する辺はちょうど 3 個であるので、例えば、 e_1, e_2, e_3 と表記しよう。グラフ G の森 F を固定したとき、次の 4 つの条件の中のちょうど 1 つが成り立つ。

1. 頂点 v に接続するどの辺も F に含まれない。
2. 辺 e_1, e_2, e_3 の中のちょうど 1 つが F に含まれる。
3. 辺 e_1, e_2, e_3 の中のちょうど 2 つが F に含まれる。

¹より一般的に、頂点数 n の k 正則グラフの極大独立集合の頂点数は $n/(k+1)$ 以上である。

4. 頂点 v に接続する全ての辺が F に含まれる。

この分割スキームによって、探索木に基づくアルゴリズムを与えることができる。集合 I の全ての頂点に対して探索し終わると、 G の辺の $3n/4$ 個以上に触ったことになる。よって、 G においてまだ触れられていない辺の数は高々 $m - 3n/4 = m - m/2 = m/2$ である。すなわち、探索木の葉にあるインスタンスには辺が高々 $m/2$ 個しかないのので、それらのインスタンスは自明なアルゴリズムによって、 $O^*(2^{m/2})$ 時間で解くことができる。

では、分割スキームをより詳細に記述してみる。集合 I の頂点 v に接続する辺 e_1, e_2, e_3 に対して、 $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ とする。各部分集合 $S' \subseteq S$ に対して、アルゴリズムは G の森で、 S' を含み、 $S \setminus S'$ のどの辺も含まないものの数を計算する。そのような森の数は G において S' を縮約し、 $S \setminus S'$ を除去したものの森の数と等しい。ここで、 $|S'| \leq 1$ のとき、縮約・除去によって出来るグラフは (孤立点の存在を除いて) 同一であることが重要なので、注意したい。したがって、 I の各頂点に対する部分問題の数は高々 5 であり、そのそれぞれに対して、辺数は 3 だけ減る。

これによって、次の計算量評価が得られる。入力グラフ G の辺数が m のとき、上のアルゴリズムが作る探索木のノード数の最大値とすると、 $T(m) \leq O^*(5^{n/4} \times 2^{m/2}) = O^*(5^{m/6} \times 2^{m/2}) = O^*(1.8494^m)$ となる。部分問題を作るためにかかる時間は多項式で抑えられるので、次の定理が得られる。

定理 3.1. 問題 3REG-#FORESTS は $O^*(1.8494^m)$ 時間で解ける。

同様に、 k 正則グラフに対しても次の定理が得られる。詳細は省略する。

定理 3.2. 任意の $k \geq 2$ に対して、数え上げ問題 k REG-#FORESTS は $O^*((2^k - k)^{\frac{2m}{k+1}} 2^{m - \frac{2m}{k+1}})$ 時間で解ける。

問題 2REG-#FORESTS は (上のアルゴリズムとは違う方法を用いて) 多項式時間で解くことができるので、補足する。最大次数が高々 k のグラフに対して同じアルゴリズムが働き、計算量も同じである。

3.2 単位区間グラフ

定理 2.5 では、弦グラフの森の数え上げが #P 完全であることを証明した。この節の主目的は弦グラフ

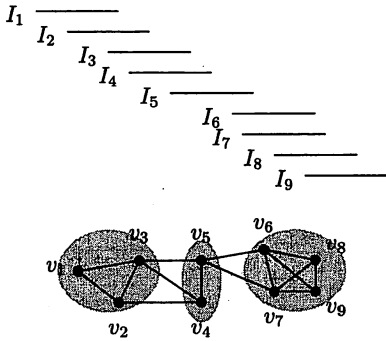


図 5: 単位区間グラフの例。区間は縦にずらして描いてあり、区間 I_i に対応する頂点が v_i である。網掛けがクリーク分割を表している。

フに対する高速アルゴリズムを与えることであるべきだが、まだ上手な解法が見つかっていない。そのため、ここでは弦グラフの特殊な場合である単位区間グラフを取り扱うことにする。

グラフ $G = (V, E)$ が単位区間グラフ (unit interval graph) であるとは、数直線上の単位区間の集合 $I = \{I_1, \dots, I_n\}$ とある全単射 $\psi: V \rightarrow I$ が存在して、 $\{u, v\} \in E$ であるとき、そのときに限り、 $\psi(u) \cap \psi(v) \neq \emptyset$ となることである。単位区間グラフ G の定義にある単位区間の集合 I は G の単位区間表現 (unit interval representation) と呼ばれる。例を図 5 に示す。与えられたグラフが単位区間グラフかどうか判定し、そして、そうであるならば、その単位区間表現を 1 つ生成する多項式時間アルゴリズムが存在する。よって、ここでの目的のためには、単位区間グラフがその単位区間表現 I とともに与えられると仮定してよい。単位区間グラフが弦グラフになることも容易に分かる。

単位区間グラフ $G = (V, E)$ とその単位区間表現 I 、および、対応する全単射 ψ が与えられている。まず、 G は 2 連結であると仮定できる。というのは、グラフの森の数はその全ての 2 連結成分の森の数の積となるからである。このとき、次の前処理を行なう。まず、 I において最も左にある区間 I_1 を見て、 I_1 と交わる I の区間を全て集める。グラフ G の頂点で、今集められた区間に対応するものを全体を C_1 と表記する。ここで、集めた区間を I から取り除き、残りの I において最も左にある区間 I_2 を探す。集めた区間に対応する G の頂点全体を C_2 とする。そして、集めた区間を I から取り除き、同様に進めていく。この

ようにして、頂点集合 V の分割 $\{C_1, \dots, C_k\}$ が得られ、これを G の (I に関する) クリーク分割 (clique partition) と呼ぶことにする。これは次の 2 つの性質を満たす。

1. 各 $i \in \{1, \dots, k\}$ に対して、集合 C_i は G のクリークである。
2. 各 $i, j \in \{1, \dots, k\}$ に対して ($i < j$)、 C_i と C_j の間に辺が存在するとき、そのときに限り、 $i = j + 1$ である。

単位区間グラフ G の I に関するクリーク分割は一意であり、線形時間で得られることを補足する。図 5 では得られるクリーク分割が網掛けで示してある。

辺 $e \in E$ が非中間辺 (non-bridging edge) であるとは、 e がある C_i の 2 頂点を結ぶことである。そうでないときには、 e を中間辺 (bridging edge) と呼ぶ。構成法と G が 2 連結であるという仮定より、各 $i \in \{1, \dots, k-1\}$ に対して $|C_i| \geq 3$ であり、また、 $|C_k| \geq 2$ となる。次の補題はアルゴリズム解析において重要である。

補題 3.3. 上記の仮定の下で、 G の中間辺の数は高々 $2m/3$ である。ただし、 m は G の辺数である。

証明. . . . まず $k = 1$ のとき、中間辺は存在しないので、補題は成立する。

一般の場合の考察を理解しやすくするために、 $k = 2$ の場合を考える。集合 C_i の要素数を n_i とするとき、中間辺の数が $\binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2}$ に中間辺の数を足したものの $2/3$ 倍になることを示すわけである。構成法より中間辺の数は高々 $(n_1 - 1)n_2$ であり、よって、示せばよいことは

$$(n_1 - 1)n_2 \leq n_1(n_1 - 1) + n_2(n_2 - 1)$$

である。この不等式は常に成り立つので、この場合の証明は終了する。

一般の k に対して、中間辺の数は高々 $\sum_{i=1}^{k-1} (n_i - 1)n_{i+1}$ であり、非中間辺の数はちょうど $\sum_{i=1}^k \binom{n_i}{2}$ である。上で見た $k = 2$ の場合と同じ論法によって、

$$\sum_{i=1}^{k-1} (n_i - 1)n_{i+1} \leq \sum_{i=1}^k n_i(n_i - 1)$$

を示せば十分であることが分かる。これを証明するためには、全ての $x, y \in \mathbb{R}$ に対して $x^2 + y^2 \geq 2xy$

が成り立ち、全ての $x \geq 2$ に対して $x^2/2 - x \geq 0$ が成り立つことを用いる。このとき、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k n_i(n_i - 1) \\ &= \sum_{i=1}^k n_i^2 - \sum_{i=1}^k n_i \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} (n_i^2/2 + n_{i+1}^2/2) + n_1^2/2 + n_k^2/2 \\ &\quad - \sum_{i=1}^k n_i \\ &\geq \sum_{i=1}^{k-1} n_i n_{i+1} + n_1^2/2 + n_k^2/2 - n_1 - \sum_{i=2}^k n_i \\ &\geq \sum_{i=1}^{k-1} n_i n_{i+1} - \sum_{i=2}^k n_i \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} n_i n_{i+1} - \sum_{i=1}^{k-1} n_{i+1} \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} n_{i+1}(n_i - 1) \end{aligned}$$

が成り立ち、補題の証明が終わる。 \square

グラフ G のクリーク分割 $\{C_1, \dots, C_k\}$ が与えられているので、全ての $i \in \{1, \dots, k\}$ に対して C_i が誘導する G の部分グラフ $G[C_i]$ の森を全て列挙する。各 C_i の各森 F_i に対して、 F_1, \dots, F_k の各連結成分を縮約したグラフを G' として、 G' の上で自明なアルゴリズムを動かす。これが提案するアルゴリズムである。正当性は森の数（あるいは、Tutte 多項式）の縮約除去公式から従う。

グラフ $G[C_i]$ における森の数は高々 $\sum_{j=0}^{n_i-1} \binom{n_i}{j}$ である。よって、自明なアルゴリズムの実行回数は高々 $\prod_{i=1}^k \sum_{j=0}^{n_i-1} \binom{n_i}{j}$ である。次の補題がこの量の上限を与える。

補題 3.4. 任意の $n \geq 3$ に対して、

$$\left(\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \right)^{1/\binom{n}{2}} \leq 7^{1/3}$$

が成り立つ。

証明. 便宜上、補題にある式の左辺を $f(n)$ と置く。直接計算することで、 $f(3) = 7^{1/3} \geq 1.9130$, $f(4) = 42^{1/6} \leq 1.8644$, $f(5) = 386^{1/10} \leq 1.8141$, $f(6) = 13212^{1/15} \leq 1.8825$, $f(7) = 82160^{1/21} \leq 1.7141$ が

分かる。よって、 $n \geq 8$ に対して $f(n) \leq 1.9$ を示せば十分である。

また便宜上、 $z = \binom{n}{2}$ と置く。条件 $n \geq 8$ より、 $z \geq 28$ が成り立つ。このとき、 $g(z) = \left(\sum_{j=0}^{\sqrt{2z}} \binom{z}{j} \right)^{1/z}$ と置くと、 $z = \binom{n}{2}$ とした場合 $f(n) = g(z)$ が成り立つ。有名な上界 $\sum_{i=0}^b \binom{a}{i} \leq (ea/b)^b$ を用いると

$$\begin{aligned} g(z) &= \left(\sum_{j=0}^{\sqrt{2z}} \binom{z}{j} \right)^{1/z} \\ &\leq \left(\left(\frac{ez}{\sqrt{2z}} \right)^{\sqrt{2z}} \right)^{1/z} \\ &= \left(\frac{e}{\sqrt{2}} \sqrt{z} \right)^{\sqrt{2/z}} \end{aligned}$$

が得られる。ただし、 e は自然対数の底である。この最後の式を $h(z)$ と置くと、「 $z \geq z' \geq 28$ に対して $h(z') \geq h(z)$ 」という単調非増加性が成り立つ。したがって、 $g(z) \leq h(z) \leq h(28) < 1.9$ が得られて、証明が完了する。 \square

補題 3.4 を示したので、計算量の上界を次のように算出できる。グラフ G' の辺数を m' とすると、これは G の中間辺の数と同じである。よって、補題 3.3 より $m' \leq 2m/3$ が成立し、実行時間は高々

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^k \sum_{j=0}^{n_i-1} \binom{n_i}{j} \times O^*(2^{m'}) \\ &= \prod_{i=1}^k \left(\sum_{j=0}^{n_i-1} \binom{n_i}{j} \right)^{1/\binom{n_i}{2}} \times O^*(2^{m'}) \\ &\leq \prod_{i=1}^k \left(\left(\sum_{j=0}^{n_i-1} \binom{n_i}{j} \right)^{1/\binom{n_i}{2}} \right)^{\binom{n_i}{2}} \\ &\quad \times O^*(2^{m'}) \\ &\leq (7^{1/3})^{\sum_{i=1}^k \binom{n_i}{2}} O^*(2^{m'}) \\ &= (7^{1/3})^{m-m'} O^*(2^{m'}) \\ &\leq O^*(7^{m/9} 2^{2m/3}) = O^*(1.9706^m) \end{aligned}$$

となり、結論として次の定理が得られる。

定理 3.5. 単位区間グラフの森の数を $O^*(1.9706^m)$ 時間で計算できる。

4 まとめと未解決問題

種々のグラフクラスにおいて、森の数え上げ問題に対する #P 完全性の結果と高速指数関数アルゴリズムを与えた。アルゴリズムは Tutte 多項式の計算へ拡張できる (詳細は省略する)。

大きな未解決問題は、単位区間グラフにおいて森の数え上げ (あるいは、Tutte 多項式の計算) がどれほど難しいか明らかにすることである。今のところ、これが #P 完全かどうか分かっていない。弦グラフに対しては、自明な $O^*(2^m)$ 時間アルゴリズムよりも高速なアルゴリズムを設計できておらず、そのようなアルゴリズムを得ることは挑戦である。

一般に、グラフクラスにおける数え上げ問題は (近似アプローチからも厳密アプローチからも) アルゴリズム理論や計算量理論の観点からほとんど研究されておらず、興味深い問題が多く残っている。更なる研究が望まれる。

参考文献

- [1] A. Andrzejak. An algorithm for the Tutte polynomials of graphs of bounded treewidth. *Discrete Mathematics* **190** (1998) 39–54.
- [2] D. Eppstein. The traveling salesman problem for cubic graphs. *Proc. 8th WADS, Lecture Notes in Computer Science* **2748** (2003) 307–318.
- [3] O. Giménez, P. Hliněný, and M. Noy. Computing the Tutte polynomial on graphs of bounded clique-width. *Proc. 31st WG, Lecture Notes in Computer Science* **3787** (2005) 59–68.
- [4] M. Jerrum. *Counting, Sampling and Integrating: Algorithms and Complexity*. Birkhäuser, Basel, 2003.
- [5] G. Kirchhoff. Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung Galvanische Ströme geführt wird. *Annalen Physik Chemie* **72** (1847) 497–508.
- [6] F. Jaeger, D.L. Vertigan and D.J.A. Welsh. On the computational complexity of the Jones and Tutte polynomials. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **108** (1990) 35–53.

- [7] S.D. Noble. Evaluating the Tutte polynomial for graphs of bounded tree-width. *Combinatorics, Probability and Computing* **7** (1998) 307–321.
- [8] K. Sekine, H. Imai, and S. Tani. Computing the Tutte polynomial of a graph and the Jones polynomial of a knot of moderate size. *Proc. 6th ISAAC. Lecture Notes in Computer Science* **1004** (1995) 224–233.
- [9] S.P. Vadhan. The complexity of counting in sparse, regular, and planar graphs. *SIAM Journal on Computing* **31** (2001) 398–427.
- [10] V.V. Vazirani. *Approximation Algorithms*. Springer, New York, 2001. 日本語訳: V.V. ヴァジラーニ, 『近似アルゴリズム』, 浅野孝夫訳, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2002年.
- [11] D.L. Vertigan and D.J.A. Welsh. The computational complexity of the Tutte plane: the bipartite case. *Combinatorics, Probability and Computing* **1** (1992) 181–187.