社団法人 情報処理学会 研究報告
IPSJ SIG Technical Report

2006－AL－106 (7)
2006／5／18

完全K分木型組織構造の２階層関係追加モデル

澤田 清
流通科学大学 情報学部 経営情報学科

概要 本研究では，高さ H の完全 K 分木型組織構造に関係を追加するモデルを提案する．ここでは，２つの深さ M と N（ただし，$M < N$）の各階層の全頂点対に辺を追加する場合に，完全 K 分木の全頂点対の最短経路の短縮長さを合計した総頂点間短縮経路長を最大にする最適深さの対 $(M, N)^*$ を求める．その結果，$(M, N)^* = (H-1, H)$ が示される．

A Model of Adding Relations in the Two Levels to an Organization Structure of a Complete K-ary Tree

Kiyoshi Sawada
Department of Information and Management Science, Faculty of Information Science,
University of Marketing and Distribution Sciences

Abstract This paper proposes a model of adding relations to an organization structure which is a complete K-ary tree of height H. When edges between every pair of nodes with the same depth M and between every pair of nodes with the same depth N which is greater than M are added, an optimal pair of depth $(M, N)^*$ is obtained by maximizing the total shortening path length which is the sum of shortening lengths of shortest paths between every pair of all nodes in the complete K-ary tree. It is shown that $(M, N)^* = (H-1, H)$.

1. はじめに

企業などの組織の構造には様々な種類があるが [1, 2]，それらの基本となるものは上下間の一元的な命令系統に基づく階層構造（ピラミッド組織と呼ばれている [3, 4]）である．ピラミッド組織構造には，上司と直属の部下との間にのみ，情報のやりとりを行える関係が存在する．しかし，直接の上下関係を飛び越えた指示命令や他部門との協力が必要な場合には，事前に直接の上下間以外の関係形成を行うことが有効であると考えられる．

ピラミッド組織構造は，構成メンバーを頂点に，上下のメンバー間関係を辺に対応させると，根付き木であると考えることができる．このとき，各頂点間の経路は組織内のメンバー間の関係をたどる情報伝達経路に対応している．また，根付き木に辺を追加することは，直接の上下関係以外の追加的関係の形成に相当する．著者らは，ピラミッド組織構造を対象として，組織全体の情報伝達が最も効率的になるような，メンバー間の関係追加位置を求めるモデルをいくつか提案した．文献 [5] では，完全２分木型組織構造に対して直系の関係を持つ異なる階層の２人のメンバー間に関係を追加するモデルを提案した．文献 [6] では，完全 K 分木型組織構造を対象として，１つの同一階層内で関係を追加する３つのモデル，(i) ２人のメンバー間の関係追加，(ii) 同じ上司

を持つメンバー間の関係追加，(iii) 全メンバー間の関係追加，を提案した．そこでは，完全 K 分木型組織構造の全メンバー間の最短経路長の総和（以後，総頂点間経路長と呼ぶ）が最小となるような関係追加の階層を解析的に求めた．

本論文では，1つの階層内の全メンバー間で関係を追加するモデルを拡張し，2つの階層それぞれの全メンバー間で関係を追加するモデルを提案し，総頂点間経路長を最小にする2つの階層を求める．すなわち，高さ $H\,(H=2,3,\cdots)$ の完全 K 分木 $(K=2,3,\cdots)$ 型組織構造に対して，深さ $M\,(M=1,2,\cdots,H-1)$ と深さ $N\,(N=M+1,M+2,\cdots,H)$ の各階層の全頂点対に辺を追加する場合に，総頂点間経路長を最小にする最適深さの対 $(M,N)^*$ を求める．ここで，完全 K 分木は，すべての葉の深さが同じで，かつすべての内部頂点の子の数が K である K 分木を指す [7]．また，深さは根からその頂点までの経路の長さを表す．

完全 K 分木の2頂点 v_i と $v_j\,(i,j=1,2,\cdots,(K^{H+1}-1)/(K-1))$ の間の最短経路の長さを $l_{i,j}$ とすると（ただし $l_{i,j}=l_{j,i}$，$l_{i,i}=0$），$\sum_{i<j} l_{i,j}$ は総頂点間経路長を表す．また，上述したような辺の追加を行った後の2頂点 v_i，v_j 間の最短経路の長さを $l'_{i,j}$ とすると，$l_{i,j}-l'_{i,j}$ は辺追加により2頂点間の最短経路の長さがどれだけ短縮されたかを表す．ここでは，これを2頂点間の短縮経路長と呼ぶ．さらに，全頂点間の短縮経路長の総和 $\sum_{i<j}(l_{i,j}-l'_{i,j})$ を，総頂点間短縮経路長と定義する．ここで，総頂点間短縮経路長を最大にすることは，総頂点間経路長を最小にすることを意味する．

2. で本モデルの総頂点間短縮経路長の定式化を行い，3. で総頂点間短縮経路長を最大にする最適深さの対 $(M,N)^*$ を解析的に求める．

2. 総頂点間短縮経路長の定式化

ここではまず，1つの階層内の全頂点対に辺を追加する場合の総頂点間短縮経路長の定式化 [6] を示し，その後で2つの階層に拡張した場合の総頂点間短縮経路長の定式化を行う．

2.1 1階層関係追加モデル

ここでは，高さ $H\,(H=1,2,\cdots)$ の完全 K 分木 $(K=2,3,\cdots)$ に対して，深さ $L\,(L=1,2,\cdots,H)$ の全頂点対に辺を追加したときの総頂点間短縮経路長の定式化を示す．

ここで，深さ L 以上の頂点間の短縮経路長の総和は，

$$\alpha_H(L)=\Big\{W(H-L)\Big\}^2\frac{K^L(K-1)}{2}\sum_{i=1}^{L}(2i-1)K^{i-1} \tag{1}$$

で与えられる．ただし，$W(h)(h=0,1,2,\cdots)$ は，高さ h の完全 K 分木の頂点数を表す．また，深さ L 以上の頂点と深さ L 未満の頂点との間の短縮経路長の総和は，

$$\beta_H(L)=W(H-L)K^L(K-1)\sum_{i=1}^{L-1}(2i-1)(L-i)K^{i-1}\,, \tag{2}$$

深さ L 未満の頂点間の短縮経路長の総和は，

$$\gamma(L)=\frac{K^L(K-1)}{2}\sum_{i=1}^{L-2}\sum_{j=1}^{i}(2j-1)(i-j+1)K^{j-1} \tag{3}$$

となる．ただし，$\sum_{i=1}^{0} \cdot = 0$，$\sum_{i=1}^{-1} \cdot = 0$ と定義する．

以上より，深さ L の全頂点対に辺を追加したときの総頂点間短縮経路長 $\sigma_H(L)$ は，

$$\sigma_H(L) = \alpha_H(L) + \beta_H(L) + \gamma(L) \tag{4}$$

と定式化される．

2.2　2階層関係追加モデル

ここでは，2.1 の 1 階層関係追加モデルの定式化を拡張し，高さ $H\,(H = 2, 3, \cdots)$ の完全 K 分木 $(K = 2, 3, \cdots)$ に対して，深さ $M\,(M = 1, 2, \cdots, H-1)$ と深さ $N\,(N = M+1, M+2, \cdots, H)$ の各階層の全頂点対に辺を追加したときの総頂点間短縮経路長の定式化を行う．ここで，深さ M 未満の頂点の集合を V_1，深さ M 以上 N 未満の頂点の集合を V_2，深さ N 以上の頂点の集合を V_3 と書くことにする．

このとき，V_3 内の頂点間の短縮経路長の総和は，式 (1) を用いて，

$$A_H(N) = \alpha_H(N) \tag{5}$$

と与えられる．また，V_1 と V_3 の頂点間および V_2 と V_3 の頂点間の短縮経路長の総和は，式 (2) を用いて，

$$B_H(N) = \beta_H(N) \tag{6}$$

となる．さらに，V_1 内の頂点間の短縮経路長の総和は，式 (3) を用いて，

$$C(M) = \gamma(M)\,, \tag{7}$$

V_1 と V_2 の頂点間の短縮経路長の総和は，式 (2) を用いて，

$$D(M, N) = \beta_{N-1}(M) \tag{8}$$

と定式化される．V_2 内の頂点間のうち，深さ M の頂点を根とする部分木内の頂点間の短縮経路長の総和は，式 (3) を用いて，

$$E(M, N) = \gamma(N-M)K^M \tag{9}$$

と与えられる．さらに，V_2 内の頂点間のうち，深さ M の頂点を根とする異なる部分木間の頂点間の短縮経路長は，次のように定式化される．すなわち，深さ M の辺追加のみによる短縮経路長の総和は，式 (1) を用いて，

$$F(M, N) = \alpha_{N-1}(M)\,, \tag{10}$$

深さ M の辺追加による経路長短縮後に，さらに深さ N の辺追加により短縮される経路長の総和は，

$$G(M, N) = (K^M - 1) \sum_{i=1}^{N-M-2} K^{N-i} \sum_{j=1}^{N-M-i-1} K^{N-M-j}(N-M-i-j) \tag{11}$$

となる．ただし，ここでも，$\sum_{i=1}^{0} \cdot = 0$，$\sum_{i=1}^{-1} \cdot = 0$ と定義する．

以上より，深さ M と深さ N の各階層の全頂点対に辺を追加したときの総頂点間短縮経路長 $S_H(M,N)$ は,

$$\begin{aligned}
S_H(M,N) &= A_H(N)+B_H(N)+C(M)+D(M,N)+E(M,N)+F(M,N)+G(M,N)\\
&= \Big\{W(H-N)\Big\}^2\frac{K^N(K-1)}{2}\sum_{i=1}^{N}(2i-1)K^{i-1}\\
&\quad + W(H-N)K^N(K-1)\sum_{i=1}^{N-1}(2i-1)(N-i)K^{i-1}\\
&\quad + \frac{K^M(K-1)}{2}\sum_{i=1}^{M-2}\sum_{j=1}^{i}(2j-1)(i-j+1)K^{j-1}\\
&\quad + W(N-M-1)K^M(K-1)\sum_{i=1}^{M-1}(2i-1)(M-i)K^{i-1}\\
&\quad + \frac{K^N(K-1)}{2}\sum_{i=1}^{N-M-2}\sum_{j=1}^{i}(2j-1)(i-j+1)K^{j-1}\\
&\quad + \Big\{W(N-M-1)\Big\}^2\frac{K^M(K-1)}{2}\sum_{i=1}^{M}(2i-1)K^{i-1}\\
&\quad + (K^M-1)\sum_{i=1}^{N-M-2}K^{N-i}\sum_{j=1}^{N-M-i-1}K^{N-M-j}(N-M-i-j) \qquad (12)
\end{aligned}$$

と定式化される.

式 (12) に

$$W(h)=\frac{K^{h+1}-1}{K-1} \qquad (13)$$

を代入して整理すると，次式が得られる.

$$\begin{aligned}
S_H(M,N) &= \frac{1}{4(K-1)^3}\Big[2(2NK-K-2N-1)K^{2H+2}+2(K+1)K^{2H-N+2}\\
&\quad -8K^{H+N+2}+4(NK^2+2K-N)K^{H+1}+4(N-M)(K-1)K^{N+M+1}\\
&\quad +(N-M)\Big\{(N-M-1)K-N+M-1\Big\}(K^2-1)K^N\\
&\quad +M\Big\{(M-1)K^3+(-M+3)K^2+(-M-3)K+M+1\Big\}K^M\Big]. \qquad (14)
\end{aligned}$$

以下では，式 (14) の $S_H(M,N)$ を最大にする最適深さの対 $(M,N)^*$ を求める.

3. 最適深さ対

ここでは，M を与えた場合に総頂点間短縮経路長を最大にする深さ N^* を求めた後で，総頂点間短縮経路長を最大にする最適深さの対 $(M,N)^*$ を求める.

3.1 M を与えた場合の最適深さ N^*

M を与えた場合の総頂点間短縮経路長を最大にする深さ N^* を求める.

$$R_{H,M}(N) = S_H(M,N) \tag{15}$$

とおき, $R_{H,M}(N)$ の N に関する差分をとると,

$$\begin{aligned}\Delta R_{H,M}(N) &\equiv R_{H,M}(N+1) - R_{H,M}(N)\\ &= \frac{1}{4(K-1)^2}\Bigg[\left\{4K^2 - \frac{2K(K+1)}{K^N}\right\}K^{2H} + \left\{-8K^{N+2} + 4K(K+1)\right\}K^H\\ &\quad + \left\{(N-M)(N-M+1)(K-1)^2 - 2K\right\}(K+1)K^N\\ &\quad + 4\left\{(N-M)(K-1) + K\right\}K^{N+M+1}\Bigg]\end{aligned} \tag{16}$$

を得る. ただし, $N = M+1, M+2, \cdots, H-1$ である. ここで, 式 (16) の K^H を

$$x = K^H \tag{17}$$

とおくと, 実数 x に関する 2 次関数 $T_{M,N}(x)$ が得られる.

$$\begin{aligned}T_{M,N}(x) &= \frac{1}{4(K-1)^2}\Bigg[\left\{4K^2 - \frac{2K(K+1)}{K^N}\right\}x^2 + \left\{-8K^{N+2} + 4K(K+1)\right\}x\\ &\quad + \left\{(N-M)(N-M+1)(K-1)^2 - 2K\right\}(K+1)K^N\\ &\quad + 4\left\{(N-M)(K-1) + K\right\}K^{N+M+1}\Bigg].\end{aligned} \tag{18}$$

また, $T_{M,N}(x)$ を x に関して微分すると,

$$T'_{M,N}(x) = \frac{1}{(K-1)^2}\left[\left\{2K^2 - \frac{K(K+1)}{K^N}\right\}x - 2K^{N+2} + K(K+1)\right] \tag{19}$$

となる.

このとき, $4K^2 - \dfrac{2K(K+1)}{K^N} > 0$ より, $T_{M,N}(x)$ は下に凸であり, さらに

$$\begin{aligned}T_{M,N}(K^{N+1}) &= \frac{1}{4(K-1)^2}\Bigg\{2(K-2)\left(2K^N - 1 - \frac{1}{K}\right)K^{N+3}\\ &\quad + (N-M)(N-M+1)(K-1)^2(K+1)K^N\\ &\quad + 4(N-M)(K-1)K^{N+M+1} + 2\left(2K^M - 1 - \frac{1}{K}\right)K^{N+2}\Bigg\} > 0,\end{aligned} \tag{20}$$

$$T'_{M,N}(K^{N+1}) = \frac{1}{K-1}K^2\left(2K^N - 1 - \frac{1}{K}\right) > 0 \tag{21}$$

であることから, $x \geq K^{N+1}$ のとき $T_{M,N}(x) > 0$ となることがわかる. したがって, $H \geq N+1$, すなわち $N = M+1, M+2, \cdots, H-1$ に対して, $\Delta R_{H,M}(N) > 0$ が成り立つ.

以上より, M を与えた場合の総頂点間短縮経路長を最大にする深さ N は, $N^* = H$ である.

3.2 最適深さ対 $(M,N)^*$

総頂点間短縮経路長を最大にする最適深さの対 $(M,N)^*$ を求める．
式 (14) の $S_H(M,N)$ に $N=H$ を代入した式を $Q_H(M)$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
Q_H(M) &\equiv S_H(M,H) \\
&= \frac{1}{4(K-1)^3}\Big[2(2HK-K-2H-5)K^{2H+2}+\Big\{2(1+2H)K^3+10K^2-4HK\Big\}K^H \\
&\quad +4(H-M)(K-1)K^{H+M+1} \\
&\quad +(H-M)\Big\{(H-M-1)K-H+M-1\Big\}(K^2-1)K^H \\
&\quad +M\Big\{(M-1)K^3+(-M+3)K^2+(-M-3)K+M+1\Big\}K^M\Big] \qquad (22)
\end{aligned}
$$

を得る．$Q_H(M)$ の M に関する差分を計算すると，

$$
\begin{aligned}
\Delta Q_H(M) &\equiv Q_H(M+1)-Q_H(M) \\
&= \frac{1}{4(K-1)}\Big[2\Big(H-M-1-\frac{1}{K-1}\Big)\Big(2K^M-1-\frac{1}{K-1}\Big)K^{H+1} \\
&\quad +\Big\{(K+1)(K-1)M^2+(K^2+4K-1)M+2K\Big\}K^M\Big] > 0 \qquad (23)
\end{aligned}
$$

となる．ただし，$M=1,2,\cdots,H-2$ である．
以上より，総頂点間短縮経路長を最大にする最適深さ対は，$(M,N)^*=(H-1,H)$ である．

4. おわりに

本研究では，高さ H の完全 K 分木型組織構造を対象として，組織全体の情報伝達が最も効率的になるような関係追加位置を求める目的で，２つの階層それぞれの全メンバー間に関係を追加するモデルを提案した．総頂点間短縮経路長を定式化し，それを最大にする２つの階層の深さを求めた結果，$(M,N)^*=(H-1,H)$ となった．これは，最下位層と最下位層の１つ上の階層で関係の追加を行うことで組織全体の情報伝達効率を最も改善できることを示している．

参考文献

[1] S. P. Robbins, Essentials of Organizational Behavior, 7th ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 2003.

[2] Y. Takahara, M. Mesarovic, Organization Structure: Cybernetic Systems Foundation, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2003.

[3] N. Takahashi, "Sequential analysis of organization design: a model and a case of Japanese firms", European Journal of Operational Research, vol.36, pp.297–310, 1988.

[4] 高橋伸夫, 組織の中の決定理論, 朝倉書店, 東京, 1993.

[5] 澤田 清, "総頂点間経路長を最小にする完全2分木の階層間隣接化," 日本応用数理学会論文誌, vol.13, no.3, pp.353–360, 2003.

[6] K. Sawada, R. Wilson, Models of adding relations to an organization structure of a complete K-ary tree, European Journal of Operational Research, to appear.

[7] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein, Introduction to Algorithms, 2nd ed., MIT Press, Cambridge, Mass., 2001.