

凸多角形間の交差判定・定方向貫通距離計算・ユークリッド距離計算 の統一のアプローチ

仁尾 都

明星大学経済学部 nio@mi.meisei-u.ac.jp

図形 P, Q と単位ベクトル d が与えられた時, Q から P へのアプローチ距離 $AD_d(P, Q)$ を定義し, その計算アルゴリズムを提示する. QP 間の引き抜き可能性判定問題と, 凸多角形 P, Q 間の交差判定, 定方向貫通距離計算およびユークリッド距離計算のための統一アプローチへの $AD_d(P, Q)$ の応用を提案する.

A unified approach for determining intersection detection and computing the directional penetration distance and the Euclid distance between convex polygons

Misato Nio

School of Economics, Meisei University, nio@mi.meisei-u.ac.jp

Given simple polygons P, Q and a unit vector d , the approach distance $AD_d(P, Q)$ is defined, and optimal algorithms are described for computing $AD_d(P, Q)$. For the applications of $AD_d(P, Q)$, the problem of determining the possibility of pulling away of Q from P and a unified approach for three problems of the determining the intersection detection, computing the directional penetration distance and the Euclid distance between convex polygons.

1. はじめに

凸多角形 P, Q に対し, 交差判定に関しては, Chazell ら[1]と Dobkin ら[2]が別のアルゴリズムを, $P \cap Q \neq \emptyset$ の場合の定方向貫通距離計算に関しては Dobkin ら[3]が, $P \cap Q = \emptyset$ の場合のユークリッド距離 $\text{dist}(P, Q)$ の計算については, Edelsbrunner[4]や Chin ら[5]がそれぞれ独自の最適アルゴリズムを提案した. それらの計算時間はすべて $O(\log n_p + \log n_q)$ である. このように, 種々の問題に対し独自の最適アルゴリズムが考案されてきた. 一方で, Dobkin らは自身が提案した交差判定アルゴリズム[2]とよく似た方法で定方向貫通距離計算が実現可能であることを[3]の中で指摘したが, その詳細を明らかにしなかった.

本研究の目的は, 交差判定と定方向貫通距離に限らず, クリッド距離計算をも含めた問題を統一的なアプローチ方法で最適に解決できる事を示すことである. そのために第2章で図形 P, Q と単位ベクトル d が与えられた時, P から Q へのアプローチ距離 $AD_d(P, Q)$ を定義し, $AD_d(P, Q)$ と他の距離との関係を検討し, 第3章で $AD_d(P, Q)$ の最適計算アルゴリズムを示し, 第4章で $AD_d(P, Q)$

と $AD_d(P,Q)$ を計算することにより P,Q 間の交差判定, 定方向貫通距離計算が $O(1)$ の計算時間でできる手順を示す. 第5章で $AD_d(P,Q)$ 計算アルゴリズムと基本的に同一手順を持つ $dist(P,Q)$ 計算アルゴリズムを示す. これにより, 3者の統一したアプローチが存在することを示すことができたと考え.

2. 用語の定義

(1) P_R, P_L, Q_R, P_L

単純多角形 P (Q) の頂点番号は反時計方向に順番に与えられている. d の $+\infty$ と $-\infty$ 方向から見たときの P (Q) の可視部分をそれぞれ P_R, P_L (Q_R, Q_L) と呼ぶ. P,Q が凸のとき, Q_R (P_L) の端の辺以外の辺 $r(l)$ が自身を含めて3分する部分のうち, y 座標が最も小さい部分を Q_{RL} ($P_L L$), 最も大きい部分を Q_{RU} ($P_L U$) と呼ぶ (図1). また P_L と Q_R の任意の一つの辺を含む十分長い直線ベクトルの交点を c とし, 直線ベクトルの左半平面の共通領域を PQ 領域と呼ぶ.

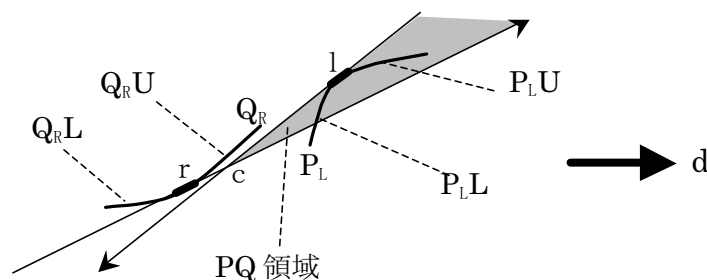


図1. Q_R と P_L

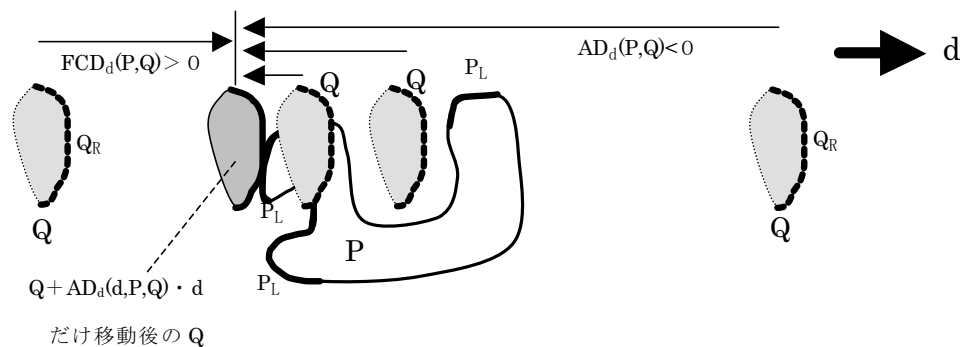


図2. アプローチ距離 $AD_d(P,Q)$ の定義

(2) アプローチ距離 $AD_d(P,Q)$

Dobkin らは, 単位ベクトル d が与えられた時, $P \cap Q \neq \emptyset$ の場合に限り, P と Q が接触点以外には共通点を持たない位置まで単位ベクトル d に沿って Q を移動するのに必要な最小距離を定方向貫通距離 $\delta_d(P,Q)$ と定義した[2]. 今回, 図形 P,Q と単位ベクトル d が与えられ, Q の基準点位置 q を通り, d と平行な数直線 u の $-\infty$ の位置に Q を設置し, 常に q が u 上にあるように, $+\infty$ 方向に P を移動させたとき始めて P に接触する時の Q の基準点位置を定方向任意距離引き抜き可能位

置 s とよび, 内積 $(s-q) \cdot d$ をアプローチ距離 (approach distance) とよび, $AD_d(P,Q)$ と表す. Q が P に接触することがない場合, $+\infty$ の値をとるとする. $AD_d(P,Q)$ は下記の式に表すことができる (図 2). 図 2 の点線で描かれた Q は移動前の Q であり, 実線は移動後の Q である.

$$AD_d(P,Q) = \inf \{ \{t \mid t \in \mathbb{R}^1, \exists q \in Q, q+td \in P\} \cup \{\infty\} \}$$

$AD_d(P,Q)$ の一般的な性質として, 下記があげられる.

- (1) $AD_d(P,Q)$ の実現点对は Q_R と P_L に存在する.
- (2) If $AD_d(P,Q) > 0$ or $AD_{-d}(P,Q) > 0$ then $P \cap Q = \phi$.
- (3) If P and Q are convex, $AD_d(P,Q) \leq 0$ and $AD_{-d}(P,Q) \leq 0$ then $P \cap Q \neq \phi$ and $\delta_d(P,Q) = -AD_{-d}(P,Q)$.
- (4) PQ 間の最遠点距離点对間のユークリッド距離 $= \inf_d(AD_d(P,Q))$.
- (5) P の直径 $= \inf_d(AD_d(P,P))$.

[定理 1] P, Q が単純多角形の場合, $AD_d(P,Q)$ を求める最適計算量は $O(n_p+n_q)$ である.

[証明] $x=(1,0)$ とする. $AD_x(P,Q)$ を実現する点对は, x 軸の $+\infty$ から見た場合の Q の可視辺の y 方向整列集合 Q_y と, x 軸の $-\infty$ から見た場合の P の可視辺の y 方向整列集合 P_y の間にあるが, Q_y と P_y の最適計算量は Lee のアルゴリズムの適用 [6] によりそれぞれ $O(n_q)$ と $O(n_p)$ である. 最小の y 座標を持つ Q_y と P_y の辺を最初のチェック対象として, y 座標の値を増やしながら同一 y 座標値を持つ点を有する辺対を探索し, 存在すればその間の最小距離を更新しつつ, 最後の辺まで行き着いたら終了する. この間, Q_y と P_y の可視辺の参照回数は高々 1 回であるのでこの段階の処理時間も $O(n_p+n_q)$ でかつ最適である. ■

定理 1 の証明で述べた手順を用い, $AD_x(P,Q)$ を計算し, $AD_x(P,Q) \geq 0$ であれば, 引き抜き可能であり, $AD_x(P,Q) < 0$ であれば, 引き抜き不可能である. そこで下記の定理を得る.

[定理 2] Q を P から d 方向に任意距離の引き抜きが可能かどうかを $\Theta(n_p+n_q)$ の手間で判定できる.

[定理 3] P と Q を単純多角形とするとき, Q を P から任意距離の引き抜きが可能な方向 d が存在するかどうかの判定問題の計算量は $O(n_p^2 n_q^2)$ である.

[証明] 本問題は ++ を Minkowski 和とすると $P++(-Q)$ に交差しない座標原点 q を光源とする光線の存在を判定する問題と同一である. $P++(-Q)$ の計算手間は $O(n_p^2 n_q^2)$ である. q から $P++(-Q)$ への視野角領域の計算は $P++(-Q)$ のすべての辺を反時計方向周りに辿りながら q からの辺への視野角領域を計算し, すでに得た視野角領域に対し, 新しく得た視野角領域を重複部分を除いて継ぎ足して行けば求まる. 視野角領域計算の手間は $P++(-Q)$ の辺数 $O(n_p n_q)$ に等しい. 最後に単連結の視野角領域が 0 と 2π の間を覆うかどうかを判定すればよい. ■

[定理 4] P, Q が凸多角形の場合, $AD_d(P,Q)$ を求める計算量は $O(\log n_p + \log n_q)$ である.

定理4の証明のためのアルゴリズムは第3章で、最悪計算量は第5章で示す。

3. 凸多角形間アプローチ距離 $AD_d(P,Q)$ の計算アルゴリズム

以下のアプローチ距離 $AD_d(P,Q)$ の計算アルゴリズムの正しさは補題1で保障される。

[補題1] P, Q を凸多角形とし、 $d=(1,0)$ とする。PQ領域が y 軸方向に上界を持つ場合、 Q_R と P_L の任意の辺ペアの端点のうち最大の y 座標値を持つ端点 r を持つ Q_R または P_L を A とすると AU 以外に、また下界を持つ場合には最小の y 座標値を持つ端点を持つ Q_R または P_L を A とすると AL 以外に、 $AD_d(P,Q)$ の実現点对の A 側の一方が存在する。

[証明] PQ領域が y 軸方向に下界を持つ場合を証明する。一般性を失うことなく、 A を Q_R とし、 $\exists q(q_x, q_y) \in Q_R$, かつ $q_y < r_y$ で q_y と同じ y 座標を持つ P_L の点 $p(p_x, p_y)$ が存在すれば、 r を通り x 軸と平行な直線が P_L と交わる交点 $s(s_x, r_y)$ が必ず存在する。 Q_R と P_L は y 軸方向に単調で、共に凸であるから、 $q_y < r_y$ の範囲で、 q_y が小さくなるにしたがって、 $p_x - q_x$ は単調に増大する。したがって $p_x - q_x > s_x - r_x$ 。どの q にも p が存在しない場合は、 $AD_d(P, Q_R)$ は正の無限大となるので、 Q_R 以外に最短点对の一方があると考えてよい。PQ領域が y 軸方向に上界を持つ場合も同様である。■

[凸多角形間アプローチ距離計算アルゴリズム]

以降の新座標系は、ベクトル d の方向が x 軸と一致するように座標軸を回転したものと見なす。ただし、 P, Q の頂点座標は以降のアルゴリズムで実際に参照されるときに座標変換を受けるものとする。

(1) Q_R と P_L を求める。

(2) Do

(2-1) Q_R, P_L のいずれかの辺の数が多くとも2つになったとき、 $AD_d(P_L, Q_R)$ を計算し、その絶対値を出力し、手続きを終了する。

(2-2) Q_R, P_L の中間辺 r, l を含む直線ベクトルの交点 c を求める。交点が存在しない場合は、 Q_R, P_L の辺数の多い方の中間辺の隣の辺を中間辺として再定義し、 c を求める。

(2-3) PQ領域が y 軸方向に上界が存在する場合、 Q_R と P_L の中間辺の端点のうち最大の y 座標値を持つ端点を持つ Q_R または P_L を A とすると AU を、また下界が存在する場合には最小の y 座標値を持つ端点を持つ Q_R または P_L を A とすると AL を削除する。

4. 凸多角形間交差判定・定方向貫通距離計算アルゴリズム

(1) $AD_d(P,Q)$ を求め、 $AD_d(P,Q) > 0$ の場合、計算目的が交差判定、あるいは定方向貫通距離計算なら、”交差せず”を出力して終了。

(2) $AD_{-d}(P,Q)$ を求め、 $AD_{-d}(P,Q) > 0$ の場合、計算目的が交差判定、あるいは定方向貫通距離計算なら、”交差せず”を出力して終了。

(3) 計算目的が交差判定なら、 P と Q は交差として終了。

(4) 計算目的が定方向貫通距離計算なら、 $-AD_{-d}(P,Q)$ を出力して終了。

5. 凸多角形間ユークリッド距離計算アルゴリズム

アプローチ距離計算とは基本的に同じ手順で、2つの凸多角形 P, Q ($P \cap Q = \phi$) 間の $\text{dist}(P, Q)$ 計算も可能であることを示す。以下の距離計算アルゴリズムの正しさは補題 2, 補題 3 で保障される。

〔補題 2〕 P, Q を凸多角形とし、 $P \cap Q = \phi$ とする。 $\forall p_0 \in P, \forall q_0 \in Q$ とし、座標系をベクトル $q_0 p_0$ が x 軸と同一方向になるように回転すると、 P と Q の最短距離点对は Q_R と P_L に存在する。

〔証明〕 Q の最大 (小) y 座標を持つ頂点を $q_u(q_l)$ とする。点 $q \in Q_L$ ($q \neq q_u, q \neq q_l$) と点 $p \in P$ を取り上げる。線分 qp は q, p 以外は Q, P には交差しないと考える。ベクトル qp の右半平面に q_u が存在する場合を考えよう。 q_u を通り qp に平行な直線は必ず P と交差するので、最初に交差する点を p' とする。 p' を通る P の支持線が q_u を通り x 軸に平行な直線と交わる交点を t とすると、始点を t とし q_u を通る半直線と、始点を t とし p' を通る半直線とが作る凸錐に対し、 Q_L は点 q_u で凸錐の外から凸錐に接し、 P は点 p' で凸錐の外から凸錐に接し、 p はベクトル $q_u p'$ の左半平面にある。したがって、 Q_L と P は凸であるから、 $\text{dist}(q, p) > \text{dist}(q_u, p')$ 。したがって q は最短点对の一方になりえない。ベクトル qp の左半平面に q_l が存在する場合も同様に q は最短点对の一方になりえないことが証明できる。 ■

〔補題 3〕 P, Q を凸多角形とし、 $P \cap Q = \phi$ とする。 $\forall p_0 \in P, \forall q_0 \in Q$ とし、座標系をベクトル $q_0 p_0$ が x 軸と同一方向になるように座標回転する。 Q_R と P_L の端ではない辺で、その延長線が交点 c を持つような辺を r と l とする。

(a) r と l が共に PQ 領域に含まれない端点を持つなら、それらの端点のうち c からの距離が最も大きい端点を持つ辺が属する Q_R または P_L を A とする。 PQ 領域が y 軸方向に上界を持つなら AU 以外に、下界を持つなら AL 以外に最短距離の実現点对の A 側の一方が存在する。

(b) そうでないなら、 PQ 領域が y 軸方向に下界を持つ場合は最も小さい y 座標を持つ端点が属する Q_R または P_L を A とすると AL 以外に、 PQ 領域が y 軸方向に上界を持つ場合は最も大きい y 座標を持つ端点が属する Q_R または P_L を A とすると AU 以外に、最短距離の実現点对の一方が存在する。

〔証明〕 (a) 一般性を失うことなく、 PQ 領域が y 軸方向に下界を持ち、 r と l の PQ 領域に含まれない端点のうち c から最も遠い端点 f を持つものを r とするとき、 (a) が正しいことを証明する。 $\forall q \in Q_R, \forall p \in P_L$ とするが、ただし、線分 qp は q, p 以外には P, Q と交差しないものとする。 l の PQ 領域外の上に、 c から $\text{dist}(c, f)$ に等しい距離に点 f' を採る。 ff' の延長線と P_L の最初の交点が存在すればそれを f'' とする。ベクトル pq の左半平面内に f'' が存在するとき、 Q, P が凸であるから、 $\text{dist}(q, p) > \text{dist}(f, f'')$ 。よって q は最短点の一方になり得ない。 f'' が存在しないとき、あるいはベクトル pq の左半平面内に f'' が存在しないとき、 p はベクトル ff'' の左半平面とベクトル qc の右半平面の共通領域内にあり、 qp と r の延長線の交点を q' とする。関数 $\text{ang}(u, v)$ を、ベ

クトル u に対し、ベクトル v がなす角 ($-\pi \leq \text{角} \leq \pi$) を表すとすると、 $\triangle cff'$ は 2 等辺三角形なので $\pi/2 > \text{ang}(ff',fc) > \text{ang}(fp,fc)$ 。さらに、 f がベクトル qp の左半平面内に存在するので、 $\text{ang}(ff',fc) > \text{ang}(q'p,fc) > 0$ であるから、結局、 $\pi/2 > \text{ang}(fp,fc) > \text{ang}(q'p,fc) > 0$ が得られ、 $\text{dist}(f,p) < \text{dist}(q',p)$ となる。一方 $\text{dist}(q',p) < \text{dist}(q,p)$ であるから、 $\text{dist}(f,p) < \text{dist}(q,p)$ となり、 q は最短点对の一方にはなり得ない。

(b) 一般性を失うことなく、 PQ 領域が y 軸方向に下界を持ち、 r と l の端点のうち最も y 座標の小さい端点を持つ図形が Q_R である場合に (b) が正しいことを証明する。 P と Q は交差せず、また凸であるので、 $Q_R L$ の点 q と $\{P_L U U l\}$ の点 p とを結ぶ線分 qp は Q または P の少なくとも一方の内点を必ず通るので、 $Q_R L$ と $\{P_L U U l\}$ の間には最短点对が存在し得ない。次に、 $Q_R L$ と $P_L L$ の間には、 $Q_R L$ の最下点を除いては最短点对が存在し得ないことを示す。 r の端点のうち、 y 座標が小さい端点を f とする。 $\forall q \in Q_R L, \forall p \in P_L L$ とする。 q と p が互いに可視であることを前提にするのは何も問題はない。したがって、 p の位置は r の始点と終点で作るベクトルの右半平面内に存在し、 f を通り qp に平行な直線は必ず $P_L L$ と交点 f' で交差する。 $Q_R L$ と $P_L L$ が凸であるから、 $\text{dist}(q,p) > \text{dist}(f,f')$ 。よって q は最短点对の一方にはなり得ない。 PQ 領域が y 軸方向に下界がある場合も同様である。■

下記のアルゴリズムは、 $P \cap Q = \phi$ であることを前提とする。 $P \cap Q = \phi$ であることを確認するには、4 章に述べた P, Q 間の交差判定アルゴリズムを用いればよい。

[凸多角形間距離計算アルゴリズム]

$\forall p_0 \in P, \forall q_0 \in Q$ とし、以降の新座標系は、ベクトル $q_0 p_0$ が x 軸と同じ方向になるように座標軸を回転したものと見なす。ただし、 P, Q の頂点座標は以降のアルゴリズムで実際に参照されるときに座標変換を受けるものとする。

(1) Q_R と P_L を求める。

(2) Do

(2-1) Q_R と P_L のいずれかの辺の数が多くとも 2 つになったとき、 Q_R と P_L の距離計算を行い、手続きを終了する。

(2-2) Q_R と P_L の中間辺 r, l を含む直線ベクトルの交点 c を求める。交点が存在しない場合は、 Q_R と P_L の辺数の多い方の中間辺の隣の辺を中間辺として再定義し、 c を求める。

(2-3) (a) r と l が共に PQ 領域外存在する端点を持つなら、それらの PQ 領域外の端点のうち c からの距離が最も大きい端点を持つ Q_R または P_L を A とする。 PQ 領域が y 軸方向に上界を持つなら AU を、下界を持つなら AL を削除する。

(b) そうでないなら、 PQ 領域が y 軸方向に上界がある場合、 r と l の端点のうち最大の y 座標値を持つ端点を持つ凸鎖 A の AU を、また下界がある場合には最小の y 座標値を持つ端点を持つ凸鎖 A の AL を削除する。

第 3 章と第 5 章の 2 つのアルゴリズムの手順 (1) は $O(\log n_p + \log n_q)$ である。(2-2) 以降の手順は、2 分法を進めるたびに一方の凸鎖の半分の頂点が削除されるので、計算量は

$O(\log n_p + \log n_q)$ となる。また、各アルゴリズムの手順 (2-1) は凸鎖と一つの辺との間のアプローチ距離あるいはユークリッド距離の計算を高々2回行うことになるが、それぞれは基本的には bimodal な関数の最小値を求める問題であるので2分法が適用でき、計算量は $O(\log n_p)$ または $O(\log n_q)$ となる。よって上記のアルゴリズムはすべて $O(\log n_p + \log n_q)$ で最適である。また、余分なメモリは $O(1)$ だけ消費する。

〔定理5〕第3, 4章で示したアルゴリズムにより、凸多角形 P, Q 間の交差判定、および定方向貫通距離を $O(\log n_p + \log n_q)$ で計算することができる。

〔定理6〕第5章で示したアルゴリズムにより、凸多角形 P, Q 間のユークリッド距離を $O(\log n_p + \log n_q)$ で求めることができる。

6. 結果の検討

定方向最長距離計算と距離計算のアルゴリズムの類似点と相違点を明確にするために、それらの対照表を表1に示す。太線部分は削除対象を示す。

表1. アプローチ距離計算とユークリッド距離計算のアルゴリズムの相違比較

	アプローチ距離計算	ユークリッド距離計算
座標変換	x軸が定方向 d と一致するよう座標変換	x軸がベクトル pq ($\forall p \in P, \forall q \in Q$) と一致するよう座標変換
r と l が PQ 領域外に端点を持つ場合		
その他の場合		同左

なお、表1には PQ 領域の y 座標下限が有限である場合のみを記載した。 PQ 領域の y 座標上限が有限である場合は表中の図は180度回転して見る必要があり、その場合は、削除対象は upper 部分と lower 部分が入れ替わる。双方の違いを明確にするために、あえて表1のアプローチ距離

計算においては r と l の両方が外端点を持つケースを別扱いにした。これによりこのケースでも定方向最長距離計算の削除対象を c からの y 座標距離が大きい部分と見るならば、ユークリッド距離と基本的に同一の選択基準と見なすことができ、両者は基本的に同じである。

交差判定に Dobkin らの方法 [1] を用いても、Dobkin らの交差判定アルゴリズムは $AD_d(P,Q)$ 計算アルゴリズムとよく似ているため、本報告が述べたアプローチの統一性は損なわれることはないが、Dobkin らの交差判定アルゴリズムの実装が必要になる。本報告が提案する統一アプローチの方がはるかに簡潔である。なお、本方式で行う交差判定法は2回のアプローチ距離計算が必要なので処理量が多いという懸念に対しては、アプローチ距離計算における2分法を進める段階で、常に Q_R と P_L の両端の辺で作る外接凸錐間の交差判定を行い、交差がなければ PQ は交差しないとして処理を終了し、また Q_R と弦と P_L の弦との間で常に交差判定を行い、交差すれば P と Q は交差するとして処理を終了することにより処理を高速化できる。

なお、第3章で検討した Q を P から任意距離だけ引き抜くことができるかどうかの判定する引き抜き可能性判定問題に対して本報告が示した $O(n_p^2 n_q^2)$ は単なるひとつの上界である可能性が残る。機械・建築等の分野や、鋳物製造分野での応用が考えられ、3次元への拡張も今後の課題となる。

7. 終わりに

図形 P, Q と単位ベクトル d が与えられた時、 Q から P へのアプローチ距離 $AD_d(P, Q)$ を定義し、その計算最適アルゴリズムを提示した。さらに QP 間の引き抜き可能性判定問題と、凸多角形 P, Q 間の交差判定、定方向貫通距離計算およびユークリッド距離計算を最適に行うための統一アプローチ実現のために $AD_d(P, Q)$ の応用することを提案した。

[1] B. M. Cazelle and D. P. Dobkin, Detection is easier than computation, Proc. 12th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 1980, 146-153

[2] D. P. Dobkin and D. G. Kirkpatrick, Fast detection of polyhedral intersection, Theoretical Computer Science 27,241-253, 1983

[3] D. P. Dobkin, J. Hershberger, D. Kirkpatrick, Subhash Suri, Computing the Intersection-depth of Polyhedra, Algorithmica, vol. 9, 518-533, 1993

[4] H. Edelsbrunner, Computing the extreme distance between two Convex Polygons, Journal of Algorithm 6, pp.213-pp.224, 1983

[5] F. Chin and C. A. Wang, Optimal Algorithm for the Intersection and the Minimum Distance Problem Between Planar Polygons, IEEE Transactions on Computers, Vol. C-32, No. 12, December 1983 1203-1207, 1983

[6] 浅野哲夫, 計算幾何学, 朝倉書房, pp207, ISBN-254-115053-7 C3041