

灰色格子演算に基づく灰色ラフ集合の提案

山口 大輔[†]

李 国棟[†]

永井 正武[‡]

本論文では灰色理論における灰色格子演算の同値類に基づく制約付き灰色ラフ集合、その同値類の条件を緩和し、灰色格子演算の区間積および含意関係に基づく一般化灰色ラフ集合を提案する。伝統的なラフ集合はカテゴリデータを中心に近似対象としているのに対し、本提案は区間データを取り扱えるようになることで、取り扱い可能な値の種類が拡張されている。本論文ではまず灰色格子演算の整理と補足を行い、制約付きおよび一般化灰色ラフ集合をそれぞれ定義する。四つの数値例を示し、従来の手法との相違を考察している。提案方法は区間データに対応するデータベースシステムへの数理背景を提供し、実際への実現と拡張が可能である。

On the Combination of Rough Set Theory and Grey Theory Based on Grey Lattice Operations

Daisuke YAMAGUCHI[†]

Guo-Dong LI[†]

Masatake NAGAI[‡]

Rough set theory is used in many fields: Data classification, Feature extraction, Inference, Machine learning and Rule induction and so on. A lot of methods based on rough set theory are developed and applied. Traditional rough sets deal with categorical data or numerical discrete data. A new rough set named grey-rough set based on grey lattice operations in grey theory is proposed in this paper. Traditional rough set theory is compatible with the proposal on categorical data and numerical discrete data, because such data are special cases of the equivalence class as a whitened value. Moreover, by removing the equivalence relation from the condition of the upper/lower approximations, we propose a grey-rough set in order to deal with data which have a range as an interval. A numerical continuance quantity is possible to apply the proposal. The proposal is illustrated with several examples in detail.

1. はじめに

近年、不完全情報を取り扱う数理理論として、ラフ集合 [1-16] が注目を浴びている。ラフ集合は同値類の集合から可能性を含む集合として上近似、必然性を含む集合として下近似を行う。また、同値関係、識別不能関係からデータを類別するための極小決定ルールの抽出方法が提案されている。

文献 [4] によると、ラフ集合に関する文献が 1000 以上存在し、その適用範囲の広さと有効性が示されている。例えば文献 [4] において、ラフ集合はデータの特徴抽出や情報検索、信号処理、経済や市場調査に適用されている。その他、システム構造化 [17]、クラスタリング [18]、感性工学 [13-15, 19, 20]、ソフトウェア工学 [21, 22]、ニューラルネットワークとの併用 [23, 24] や遺伝的アルゴリズムとの併用 [25] などが行われている。これらの伝統的なラフ集合では主にカテゴリデータを取り扱ってきた。

近年、ラフ集合とファジー集合の互いの利点を生かすため、両者の理論の結合 [12, 33, 34] が試みられている。例えばラフメンバシップ関数の定義から、ファジー集合理論との互換性が示されている。また、

ファジー二項関係、ファジーメンバシップ関数から上近似・下近似を求める方法も報告されている。

灰色理論 [26-30] では灰数と呼ばれる数により情報の不確かさを取り扱っている。灰数とは確かな値は不明だが、おおよその範囲は既知な数であり、区間を持つ値である。灰数の適用例として、誤差解析 [31, 32] が挙げられる。誤差解析ではある測定値 x と真値が存在する範囲を $x = x_{\text{best}} + \delta x$ として表す。ただし、 x_{best} は最良推定値、 δx は誤差である。この式は灰色理論における $\otimes x = [x_{\text{best}} - \delta x, x_{\text{best}} + \delta x]$ 、 $\otimes x = x_{\text{best}}$ と等価である。灰数はこのようなファジーと異なる不確かさを取り扱う。

近年では IXSQL [39] など区間データへの直接サポートが可能なデータベースが開発されている。ただしこれまでのラフ集合ではカテゴリデータを中心に取り扱ってきた。上記の灰色理論を用いれば区間データへの情報表の操作がより容易になると考えられる。そこで本論文では新しい灰色ラフ集合の結合の試みとして、灰色格子演算 [40, 41] に基づくラフ集合を提案する。具体的には、灰色格子演算における同値類を使った制約付き灰色ラフ集合、その同値類の条件を緩和した一般化灰色ラフ集合を提案する。本提案手法は灰色格子演算により区間として与えられているデータについてもラフ集合が取り扱い

[†] 神奈川大学大学院工学研究科, Graduate School of Engineering, Kanagawa University

[‡] 神奈川大学工学部, Faculty of Engineering, Kanagawa University

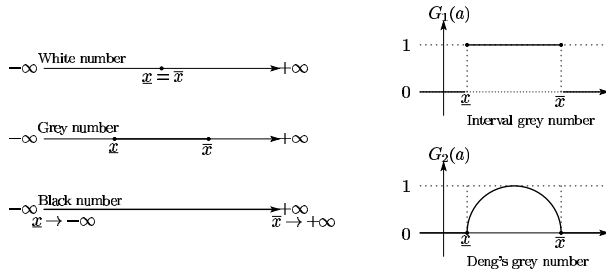


図 1 灰数の図的解釈

できるようになり、結果として従来のラフ集合よりもデータの取り扱いが拡張されている。

2. 灰色格子演算

灰色格子演算 [40, 41] は灰色理論で取り扱う数灰数 (grey number) に対して行われる演算の一種である。与えられた二つ以上の灰数についてその区間を拡大・縮小する演算であり、従来の集合演算や論理演算に相当する。既に提案されている演算を要約し、区間解析 [42–50]、格子代数 [51] および格子理論 [52] を元にいくつか補足を行う。

全体集合を \mathbb{U} 、その要素を $x (x \in \mathbb{U})$ とする。 \mathbb{R} を実数全体の集合、 X を x のとりうる実数の範囲の集合 ($X \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{U}$) とする。

定義 1. G を \mathbb{U} に対する灰色集合とすると、上端メンバシップ関数 $\bar{\mu}_G(x)$ と下端メンバシップ関数 $\underline{\mu}_G(x)$ により以下に定義される。

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\mu}_G(x) : x \rightarrow [0, 1] \\ \underline{\mu}_G(x) : x \rightarrow [0, 1] \end{array} \right\} \quad (1)$$

ただし $\underline{\mu}_G(x) \leq \bar{\mu}_G(x)$, $x \in \mathbb{U}$ 。 $\underline{\mu}_G(x) = \bar{\mu}_G(x)$ のとき、灰色集合 G はファジー集合となる。

定義 2. 要素 x が二つの値 \underline{x}, \bar{x} ($\underline{x} = \inf X, \bar{x} = \sup X$) を $\otimes x = x \left[\begin{smallmatrix} \bar{\mu} \\ \underline{\mu} \end{smallmatrix} \right]$ として持つとき、 $\otimes x$ について以下の定義を行う (図 1)。

1. $\underline{x} \rightarrow -\infty, \bar{x} \rightarrow +\infty$ のとき、 $\otimes x$ を黒数という
2. $\underline{x} = \bar{x}$ のとき、 $\otimes x$ は白数または白化値といい、 $\tilde{\otimes} x$ で表す
3. 上記のいずれでもないとき、 $\otimes x \rightleftharpoons [\underline{x}, \bar{x}]$ を灰数という

定義 3. 二つの灰数 $\otimes x$ および $\otimes y$ が区間として互いに等しいとき、関係 ' \rightleftharpoons ' (coincidence) として以下に定義する (図 2 右)。

$$\otimes x \rightleftharpoons \otimes y \quad \text{if } \underline{x} = \underline{y} \text{ and } \bar{x} = \bar{y} \quad (2)$$

ただし、' \rightleftharpoons ' は ' $=$ ' とは区別する。

定義 4. 二つの要素 x, y とそれらの灰数 $\otimes x = [\underline{x}, \bar{x}]$, $\otimes y = [\underline{y}, \bar{y}]$ について含意関係 ' \rightarrow ' (inclusion) を以下に定義する (図 2 左)。

$$\otimes x \rightarrow \otimes y \quad \text{if } \underline{y} \leq \underline{x} \text{ and } \bar{x} \leq \bar{y} \quad (3)$$

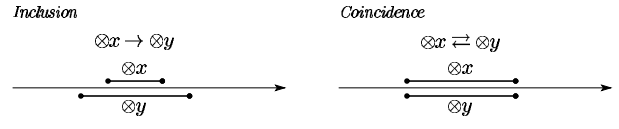


図 2 灰色格子演算における関係

と表す。ただし、混同を避けるため、要素間の関係については集合論の関係 ' $x \subseteq y$ ' を用いる。

任意の実数 $a (a \in \mathbb{R})$ または $\tilde{\otimes} x$ と $\otimes y$ については以下の表現を用いる。

$$a \rightarrow \otimes y \quad \text{if } \underline{y} \leq a \text{ and } a \leq \bar{y} \quad (4)$$

$$\tilde{\otimes} x \rightarrow \otimes y \quad \text{if } \underline{y} \leq \tilde{\otimes} x \text{ and } \tilde{\otimes} x \leq \bar{y} \quad (5)$$

先と同様に、要素間では $a \subseteq y, x \subseteq y$ と表す。

定義 5. 灰数を持つ三つの要素 x, y, z について、関係 ' \rightarrow ' は以下の順序関係を満たす。

1. $\otimes x \rightarrow \otimes x$
2. $\otimes x \rightarrow \otimes y, \otimes y \rightarrow \otimes x \Leftrightarrow \otimes x \rightleftharpoons \otimes y$
3. $\otimes x \rightarrow \otimes y, \otimes y \rightarrow \otimes z \Rightarrow \otimes x \rightarrow \otimes z$

定義 6. 灰数を持つ三つの要素 x, y, z について、関係 ' \rightleftharpoons ' は以下の同値関係を満たす。

1. $\otimes x \rightleftharpoons \otimes x$
2. $\otimes x \rightleftharpoons \otimes y \Leftrightarrow \otimes y \rightleftharpoons \otimes x$
3. $\otimes x \rightleftharpoons \otimes y, \otimes y \rightleftharpoons \otimes z \Rightarrow \otimes x \rightleftharpoons \otimes z$

定義 7. 二つの要素 x, y の持つ灰数 $\otimes x, \otimes y$ について以下の灰色格子演算を定義する (図 3)。

1. 区間和[§] (Join, $x \cup y$):

$$\otimes x \vee \otimes y \rightleftharpoons [\min(\underline{x}, \underline{y}), \max(\bar{x}, \bar{y})] \quad (6)$$

$$\tilde{\otimes} x \vee \tilde{\otimes} y \rightleftharpoons [\min(\tilde{\otimes} x, \tilde{\otimes} y), \max(\tilde{\otimes} x, \tilde{\otimes} y)] \quad (7)$$

2. 区間積[¶] (Meet, $x \cap y$):

$$\otimes x \wedge \otimes y \rightleftharpoons \begin{cases} [\underline{x}, \bar{x}] & \text{if } \otimes x \rightarrow \otimes y \\ [\underline{y}, \bar{y}] & \text{if } \otimes y \rightarrow \otimes x \\ [\underline{x}, \bar{y}] & \text{if } \underline{x} \rightarrow \otimes y \text{ and } \bar{y} \rightarrow \otimes x \\ [\underline{y}, \bar{x}] & \text{if } \underline{y} \rightarrow \otimes x \text{ and } \bar{x} \rightarrow \otimes y \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

$$\tilde{\otimes} x \wedge \tilde{\otimes} y \rightleftharpoons \begin{cases} \tilde{\otimes} x & \tilde{\otimes} x = \tilde{\otimes} y \\ \emptyset & \tilde{\otimes} x \neq \tilde{\otimes} y \end{cases} \quad (9)$$

3. 補区間^{||} (Complimentary):

$$\otimes x^c = \{x \in X^c | x < \underline{x}, \bar{x} < x\} \quad (10)$$

4. 排他的区間和 (Exclusive Join, $x \oplus y$):

$$\otimes x \oplus \otimes y = \begin{cases} (\otimes x \vee \otimes y) \wedge (\otimes x^c \vee \otimes y^c) \\ (\otimes x \vee \otimes y) \wedge (\otimes x \wedge \otimes y)^c \end{cases} \quad (11)$$

[§]文献 [40, 41] では結合としている。

[¶]文献 [40, 41] では共通としている。

^{||}文献 [40, 41] では否定 (NOT) としている。

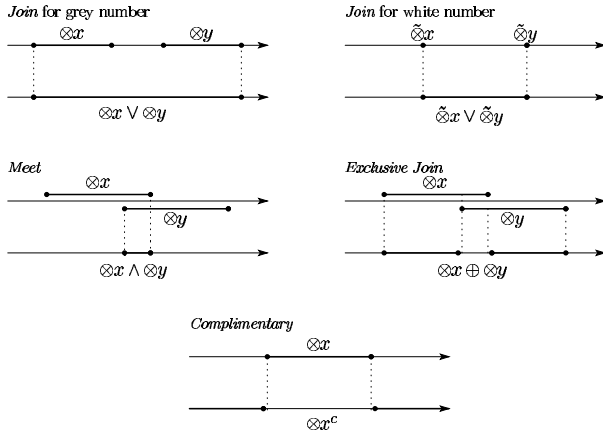


図 3 灰色格子演算の図的解釈

定理 1. 集合演算 [53, 54] と同様に、三つの灰数 $\otimes x, \otimes y, \otimes z$ について、灰色格子演算は以下の性質を持つ。

1. $\otimes x \rightarrow \otimes x \vee \otimes y, \otimes y \rightarrow \otimes x \vee \otimes y$
2. $\otimes x \rightarrow \otimes z$ and $\otimes y \rightarrow \otimes z$, then $\otimes x \vee \otimes y \rightarrow \otimes z$
3. $\otimes x \rightarrow \otimes y$, then $\otimes x \vee \otimes y \rightleftharpoons y$;
 $\otimes x \vee \otimes y \rightleftharpoons y$, then $\otimes x \rightarrow \otimes y$
4. $\otimes x \wedge \otimes y \rightarrow \otimes x, \otimes x \wedge \otimes y \rightarrow \otimes y$
5. $\otimes z \rightarrow \otimes x$ and $\otimes z \rightarrow \otimes y$, then $\otimes z \rightarrow \otimes x \wedge \otimes y$
6. $\otimes y \rightarrow \otimes x$, then $\otimes x \wedge \otimes y \rightleftharpoons y$;
 $\otimes x \wedge \otimes y \rightleftharpoons y$, then $\otimes y \rightarrow \otimes x$

定理 2. さらに、以下の法則が成立する。

1. $\otimes x \vee \otimes x \rightleftharpoons \otimes x, \otimes x \wedge \otimes x \rightleftharpoons \otimes x$ (巾等律)
2. $\otimes x \vee \otimes y \rightleftharpoons \otimes y \vee \otimes x, \otimes x \wedge \otimes y \rightleftharpoons \otimes y \wedge \otimes x$
(交換律)
3. $(\otimes x \vee \otimes y) \vee \otimes z \rightleftharpoons \otimes x \vee (\otimes y \vee \otimes z)$;
 $(\otimes x \wedge \otimes y) \wedge \otimes z \rightleftharpoons \otimes x \wedge (\otimes y \wedge \otimes z)$ (結合律)
4. $\otimes x \wedge (\otimes y \vee \otimes z) \rightleftharpoons (\otimes x \wedge \otimes y) \vee (\otimes x \wedge \otimes z)$;
 $\otimes x \vee (\otimes y \wedge \otimes z) \rightleftharpoons (\otimes x \vee \otimes y) \wedge (\otimes x \vee \otimes z)$
(分配律)
5. $(\otimes x \vee \otimes y) \wedge \otimes x \rightleftharpoons \otimes x$;
 $(\otimes x \wedge \otimes y) \vee \otimes x \rightleftharpoons \otimes x$ (吸収律)
6. $\otimes x \wedge \otimes x^c \rightleftharpoons \emptyset; \otimes x \vee \otimes x^c \rightleftharpoons \mathbb{R}$ (補元律)
7. $(\otimes x^c)^c \rightleftharpoons \otimes x$ (二重補完則)
8. $(\otimes x \vee \otimes y)^c \rightleftharpoons \otimes x^c \wedge \otimes y^c$;
 $(\otimes x \wedge \otimes y)^c \rightleftharpoons \otimes x^c \vee \otimes y^c$ (ド・モルガン則)

定義 8. 二つの灰数 $\otimes x, \otimes y$ について、以下の白化関数を定義する。図 4 に示すように、これらの関数の結果は全て実数である。

Midpoint $\text{mid}(\otimes x) = (\underline{x} + \bar{x})/2$

Diameter $\text{dia}(\otimes x) = \bar{x} - \underline{x}$

Radius $\text{rad}(\otimes x) = (\bar{x} - \underline{x})/2$

Magnitude $\text{mag}(\otimes x) = \max(|\underline{x}|, |\bar{x}|)$

Mignitude $\text{mig}(\otimes x) = \min(|\underline{x}|, |\bar{x}|)$

Absolute $\text{abs}(\otimes x) = \text{mag}(\otimes x) - \text{mig}(\otimes x)$

Midpoint, Magnitude, Mignitude, Diameter and Radius

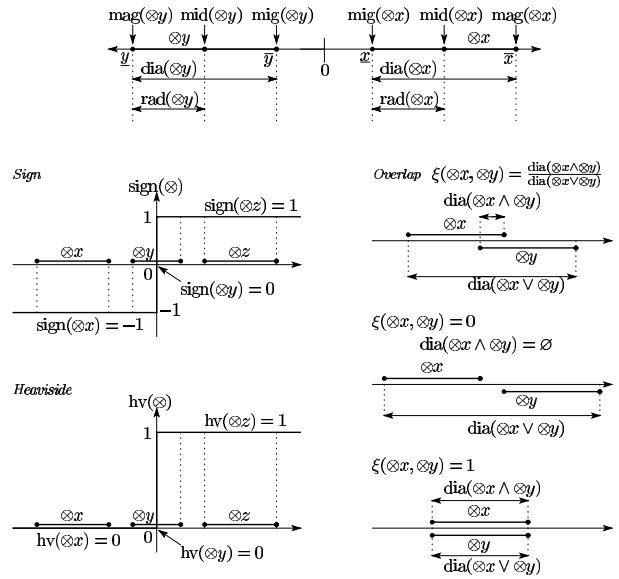


図 4 白化関数の図的解釈

Overlap $\xi(\otimes x, \otimes y) = \frac{\text{dia}(\otimes x \wedge \otimes y)}{\text{dia}(\otimes x \vee \otimes y)}$
where $\otimes x \wedge \otimes y \rightleftharpoons \emptyset \Leftrightarrow \xi(\otimes x, \otimes y) = 0$;
 $\otimes x \rightleftharpoons \otimes y \Leftrightarrow \xi(\otimes x, \otimes y) = 1$

Size $\text{size}(\otimes x) = (|\underline{x}| + |\bar{x}|)/2$

Pivot $\text{piv}(\otimes x) = \sqrt{\text{mag}(\otimes x) \cdot \text{mig}(\otimes x)}$

Sign $\text{sign}(\otimes x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 < \underline{x} \\ 0 & \text{if } 0 \rightarrow \otimes x \\ -1 & \text{if } \bar{x} < 0 \end{cases}$

Heaviside $\text{hv}(\otimes x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq \underline{x} \\ 0 & \text{if } \bar{x} < 0 \end{cases}$

3. 制約付き灰色ラフ集合

3.1 ラフ集合と灰色理論の結合

ラフ集合は関係 R に対する同値類 (equivalence class) の集合に対して上近似・下近似を行う。本論文では灰色格子演算で得られる同値関係 ' \rightleftharpoons ' からラフ集合と同等の処理が可能であることを導く。そして、ラフ集合と灰色理論の接点について議論する。

定義 9. 同値関係 ' \rightleftharpoons ' ($\rightleftharpoons \in R$) について、要素 $x \in U$ の同値類 $[x]_{GR}$ を以下に定義する。

$$[x]_{GR} = \{y \in U | x \rightleftharpoons y\} \quad (12)$$

そして、同値類 $[x]_{GR}$ は以下の性質を持つ。

1. $x \in [x]_{GR}$ for any x
2. $x \rightleftharpoons y$, then $[x]_{GR} = [y]_{GR}$
3. $[x]_{GR} \neq [y]_{GR}$, then $[x]_{GR} \cap [y]_{GR} = \emptyset$

定義 10. 灰色理論における近似空間を $A(U, \rightleftharpoons)$ と定義する。このとき A に含まれる同値類 $[x]_{GR}$ の集合は U / \rightleftharpoons である。

定義 11. 全体集合 \mathbb{U} の部分集合を S とするとき、 S の上近似 (*upper approximation*), 下近似 (*lower approximation*), 境界を以下に定義する。

$$GR^*(S) = \{x \in \mathbb{U} | [x]_{GR} \cap S \neq \emptyset\} \quad (13)$$

$$GR_*(S) = \{x \in \mathbb{U} | [x]_{GR} \subseteq S\} \quad (14)$$

$$BND(S) = GR^*(S) - GR_*(S) \quad (15)$$

上記の近似の組 $\langle GR^*(S), GR_*(S) \rangle$ を制約付き灰色ラフ集合と定義する。

定理 3. 定義 11 にて示した制約付き灰色ラフ集合は以下の性質を持つ。

1. $GR_*(S) \subseteq S \subseteq GR^*(S)$
2. $GR_*(\emptyset) = GR^*(\emptyset) = \emptyset$;
 $GR_*(\mathbb{U}) = GR^*(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$
3. $GR_*(S \cap T) = GR_*(S) \cap GR_*(T)$;
 $GR^*(S \cup T) = GR^*(S) \cup GR^*(T)$
4. $S \subseteq T$ implies $GR_*(S) \subseteq GR_*(T)$;
 $S \subseteq T$ implies $GR^*(S) \subseteq GR^*(T)$
5. $GR_*(S \cup T) \supseteq GR_*(S) \cup GR_*(T)$;
 $GR^*(S \cap T) \subseteq GR^*(S) \cap GR^*(T)$
6. $GR_*(\mathbb{U} - S) = \mathbb{U} - GR^*(S)$;
 $GR^*(\mathbb{U} - S) = \mathbb{U} - GR_*(S)$
7. $GR_*(GR_*(S)) = GR^*(GR_*(S)) = GR_*(S)$;
 $GR^*(GR^*(S)) = GR_*(GR^*(S)) = GR^*(S)$

証明. 関係 ' \supseteq ' は Pawlak [1,2] によるラフ集合の関係 R に含まれるため、伝統的ラフ集合と同様に成立する。 \square

灰色ラフ集合における上近似・下近似はラフ集合のそれらと同様に扱うことができる。上近似は S に帰属する可能性のある要素の集合であり、下近似は S に必ず帰属する要素の集合である。

これまで伝統的なラフ集合はカテゴリデータまたは離散データのみを取り扱っていた。本提案の灰色ラフ集合は、区間を持つ離散データまたは連続データも取り扱いが可能なように拡張されている。

3.2 例題

3.2.1 カテゴリデータの例

表 1 [55] はラフ集合を提唱した Pawlak による例である。六名の患者を三つの状態からインフルエンザ (Flu) であるかどうかを示した情報表である。本例はカテゴリデータであり、伝統的なラフ集合で取り扱われる。

表 1 上に示されている {yes, no} を {1, 0} に、{very high, high, normal} を {2, 1, 0} としたとき、このカテゴリデータは表 1 下に示す離散数値データとなる。Headache, Muscle-pain および Temperature について関係 ' \supseteq ' における同値類 $[p]_{GR}$ の集合は以下に与えられる。

$$\{\{p_1\}, \{p_2, p_5\}, \{p_3\}, \{p_4\}, \{p_6\}\}$$

表 1 カテゴリデータ (離散データ) の例 [55]

Patient	Headache	Muscle-pain	Temperature	Flu
p_1	no	yes	high	yes
p_2	yes	no	high	yes
p_3	yes	yes	very high	yes
p_4	no	yes	normal	no
p_5	yes	no	high	no
p_6	no	yes	very high	yes
p_1	0	1	1	yes
p_2	1	0	1	yes
p_3	1	1	2	yes
p_4	0	1	0	no
p_5	1	0	1	no
p_6	0	1	2	yes

ここで、患者 p_2, p_5 は各属性の値が $\otimes p_2 \Leftrightarrow \otimes p_5 \Leftrightarrow \tilde{\otimes} p_2 = \tilde{\otimes} p_5$ となるから同値類になる。

患者の集合 $S_1 = \{p | \text{Flu} = \text{yes}\} = \{p_1, p_2, p_3, p_6\}$ とすれば、 S_1 の上近似および下近似は以下のよう
に得られる。

$$GR^*(S_1) = \{p_1, p_2, p_3, p_5, p_6\}$$

$$GR_*(S_1) = \{p_1, p_3, p_6\}$$

$$BND(S_1) = \{p_2, p_5\}$$

また、患者の集合 $S_2 = \{p | \text{Flu} = \text{no}\} = \{p_4, p_5\}$ とすれば、 S_2 の上近似および下近似は以下のよう
に得られる。

$$GR^*(S_2) = \{p_2, p_4, p_5\}$$

$$GR_*(S_2) = \{p_4\}$$

$$BND(S_2) = \{p_2, p_5\}$$

このように、本適用例では属性の値を白化値とみた場合の灰色ラフ集合となる。カテゴリデータは表のように離散数値データに変換することで、制約付き灰色ラフ集合が適用できる。

3.2.2 区間を持つデータの例

表 2 は UCI [56] の AUTO-MPG データを筆者らが再編集したものである。自動車全 391 台のうち 108 台について、表に示す 10 社のメーカーに分類し、七つの属性の値の最小値および最大値を調べた。

表のうち、Cylinders と Model year の属性に注目すると表 3 が得られる。この表から定義 9 に示す同値類 $[x]_{GR}$ の集合は以下に与えられる。

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4, 8\}, \{5, 9\}, \{6\}, \{7\}, \{10\}\}$$

ただし、各社を名称ではなく番号で表す。例として各国のメーカーの集合 $S_1 = \{\text{No.} | \text{Country} = \text{Japan}\} = \{5, 6, 7, 8\}$, $S_2 = \{\text{No.} | \text{Country} = \text{Germany}\} = \{1, 2, 9\}$, $S_3 = \{\text{No.} | \text{Country} = \text{USA}\} = \{3, 4\}$ and $S_4 = \{\text{No.} | \text{Country} = \text{Sweden}\} = \{10\}$ につい

表 3 抜粋した AUTO-MPG データ

No.	Manufacturer	Cylinders	Model-year	Country
1	Audi	4,5	70,80	Germany
2	BMW	4,4	70,77	Germany
3	Cadillac	8,8	76,79	USA
4	Ford	4,6	70,81	USA
5	Honda	4,4	74,82	Japan
6	Mazda	3,4	72,82	Japan
7	Subaru	4,4	74,81	Japan
8	Toyota	4,4	70,81	Japan
9	Volkswagen	4,4	74,82	Germany
10	Volvo	4,6	72,81	Sweden

ての上近似・下近似が以下のように得られる。

$$GR^*(S_1) = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}, GR_*(S_1) = \{6, 7\},$$

$$BND(S_1) = \{4, 5, 8, 9\}$$

$$GR^*(S_2) = \{1, 2, 5, 9\}, GR_*(S_2) = \{1, 2\},$$

$$BND(S_2) = \{5, 9\}$$

$$GR^*(S_3) = \{3, 4, 8\}, GR_*(S_3) = \{3\},$$

$$BND(S_3) = \{4, 8\}$$

$$GR^*(S_4) = \{10\}, GR_*(S_4) = \{10\},$$

$$BND(S_4) = \emptyset$$

このように、情報表にデータが区間として与えられていても、同値類 $[x]_{GR}$ からラフ集合を取り扱うことができる。同値類 $[x]_{GR}$ の上・下近似の結果は集合である。したがって、既に多数提案されている伝統的なラフ集合理論が本提案灰色ラフ集合に適用可能である。

4. 一般化灰色ラフ集合

4.1 一つの属性に注目した場合の灰色ラフ集合

従来のラフ集合では、与えられた全属性における同値類の集合を基準に情報表の個体をクラスタリングしている。本提案灰色ラフ集合では同値類の制約を緩和するため、事前のクラスタリングを行わない。代わりに与えられた属性一つずつに対して局所的な上近似・下近似を行い、それらの結果から最終的な上近似・下近似を獲得する。上記の処理を灰色格子演算の含意関係と区間積によって実現する。

定義 12. 灰色ラフ集合における情報システム $IS = (O, A, V, \rho)$ を定義する。ただし、

- O は情報システムに存在する個体 (*object*)
- A は属性 (*attribute*)
- V は属性持つ値であり本論文では $V = \mathbb{R}$
- ρ は情報関数 (*information function*) であり、 $\rho: O \times A \rightarrow V$

定義 13. ある属性 $a \in A$ において、個体 $x \in O$ がもつ値を $\otimes(x, a) \in V$ とする、ただし $(x, a) \in O \times A$ とする。属性 a における任意の値を $\otimes s$ としたとき、属性 a における、同値類 $[x]_{GR}$ を用いない上近似・下近似を以下に定義する。

$$GL^*(\otimes s) = \{x \in O \mid \otimes(x, a) \wedge \otimes s \neq \emptyset\} \quad (16)$$

$$GL_*(\otimes s) = \{x \in O \mid \otimes(x, a) \rightarrow \otimes s\} \quad (17)$$

$$BND(\otimes s) = GL^*(\otimes s) - GL_*(\otimes s) \quad (18)$$

GL は一つの属性 a にだけ着眼したときの灰色ラフ近似である。

4.2 与えられた全ての属性に対する灰色ラフ集合 (一般化灰色ラフ集合)

定義 14. n 個の属性 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ について、要素 x がそれぞれ値 $\{\otimes(x, a_1), \otimes(x, a_2), \dots, \otimes(x, a_n)\}$ を持つとする。 n 個の属性について任意の値を持つ集合 $S = \{\otimes s_1, \otimes s_2, \dots, \otimes s_n\}$ に対する O の上近似・下近似を以下に定義する。

$$GW^*(S) \Leftrightarrow [GW^*(S), \overline{GW^*(S)}] \quad (19)$$

$$GW_*(S) \Leftrightarrow [GW_*(S), \overline{GW_*(S)}] \quad (20)$$

$$\underline{GW^*(S)} = \bigcap_{i=1}^n GL^*(\otimes s_i) \quad (21)$$

$$\overline{GW^*(S)} = \bigcup_{i=1}^n GL^*(\otimes s_i) \quad (22)$$

$$\underline{GW_*(S)} = \bigcap_{i=1}^n GL_*(\otimes s_i) \quad (23)$$

$$\overline{GW_*(S)} = \bigcup_{i=1}^n GL_*(\otimes s_i) \quad (24)$$

これらの組 $\langle GW^*(S), GW_*(S) \rangle$ を一般化灰色ラフ集合と定義する。ただし、 $\underline{GW_*(S)} \subseteq \overline{GW_*(S)}$ 、 $\underline{GW^*(S)} \subseteq \overline{GW^*(S)}$ 。

定理 4. 定義 14 にて示した一般化灰色ラフ集合は以下の性質を持つ。

1. $GW_*(S) \subseteq GW^*(S)$
2. $GW_*(\mathbb{R}) = GW^*(\mathbb{R}) = O$;
 $GW_*(\emptyset) = GW^*(\emptyset) = \emptyset$
3. $GW^*(S \cup T) \supseteq GW^*(S) \cup GW^*(T)$;
 $GW_*(S \cap T) \subseteq GW_*(S) \cap GW_*(T)$
4. $GW_*(S \cup T) \supseteq GW_*(S) \cup GW_*(T)$;
 $GW^*(S \cap T) \subseteq GW^*(S) \cap GW^*(T)$
5. $S \subseteq T$ implies $GW_*(S) \subseteq GW_*(T)$;
 $S \subseteq T$ implies $GW^*(S) \subseteq GW^*(T)$
6. $GW_*(S^c) = O - GW^*(S)$;
 $GW^*(S^c) = O - GW_*(S)$

ただし、 $S^c = \{\otimes s_1^c, \otimes s_2^c, \dots, \otimes s_n^c\}$, $S \cup T \Leftrightarrow \otimes s_i \vee \otimes t_i$ for all i , $S \cap T \Leftrightarrow \otimes s_i \wedge \otimes t_i$ for all i .

定義 15. 定義 14 の近似の精度 $\alpha(S)$ および近似の質 $\gamma(S)$ を以下に定義する。

$$\alpha(S) = \frac{\text{card}\{GW_*(S)\}}{\text{card}\{GW^*(S)\}} \quad (25)$$

$$\gamma(S) = \frac{\text{card}\{GW_*(S)\}}{\text{card}\{O\}} \quad (26)$$

定義 16. $GW^*(S)$ または $GW_*(S)$ の個体 x について、灰色重複関連度 Ξ を定義する。

$$\Xi(S, x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi(\otimes(x, a_i), \otimes s_i) \quad (27)$$

この灰色重複関連度 Ξ は以下の順序関係を満たす。

1. $\Xi(S, x_j) \leq \Xi(S, x_j)$
2. $\Xi(S, x_j) \leq \Xi(S, x_k), \Xi(S, x_k) \leq \Xi(S, x_j) \Leftrightarrow \Xi(S, x_k) = \Xi(S, x_j)$ ただし $j \neq k$

表 2 AUTO-MPG データ (UCI [56] のデータを基に筆者らが再編集)

No.	Manufacturer	M.P.G.	Cylinders	Displacement	Horsepower	Weight	Acceleration	Model-year	Country
1	Audi	20,36.4	4,5	97,131	[67,103]	2,19,2.95	[14,19.9]	70,80	Germany
2	BMW	21.5,26	4,4	[121,121]	[110,113]	2,23,2.60	[12.5,12.8]	70,77	Germany
3	Cadillac	16.5,23	8,8	[350,350]	[125,180]	3,90,4.38	[12.1,17.4]	76,79	USA
4	Ford	15,36.1	4,6	[98,250]	[65,98]	1,80,3.57	[13.6,21]	70,81	USA
5	Honda	24,44.6	4,4	81,120	[53,97]	1,76,2.49	[13.8,18.5]	74,82	Japan
6	Mazda	18,46.6	3,4	70,120	[52,110]	1,97,2.72	[12.5,19.4]	72,82	Japan
7	Subaru	26,33.8	4,4	97,108	[67,93]	1,99,2.39	[15.5,18]	74,81	Japan
8	Toyota	19,39.1	4,6	71,168	[52,122]	1,65,2.93	[12.6,21]	70,81	Japan
9	Volkswagen	25,43.1	4,4	[79,105]	[48,78]	1,83,2.22	[12.2,21.5]	74,82	Germany
10	Volvo	17,30.7	4,6	[121,163]	[76,125]	2,87,3.16	[13.6,19.6]	72,81	Sweden

$$3. \Xi(S, x_j) \leq \Xi(S, x_k), \Xi(S, x_k) \leq \Xi(S, x_l) \Rightarrow \Xi(S, x_j) \leq \Xi(S, x_l) \text{ ただし } j \neq k \neq l$$

この灰色ラフ集合は灰数に含まれる区間を用いることで、同値類の集合を用いずに上近似・下近似を実現している。一般化灰色ラフ集合の上端 \overline{GW} は 1 つ以上の属性値 $\otimes s$ について GL^* または GL_* の条件を満たす個体の集合であり、下端 \underline{GW} は指定した全ての属性の値 $\otimes s$ について GL^* または GL_* の条件を満たす個体の集合を意味する。

定義 16 は、上近似または下近似によって得られた個体に対して順序を与える。その順序とは、重複の多さ、言い換えると区間の類似度を基準とする。定義 16 では、重複の多い区間を備える個体を上位に、逆に重複の少ない要素を下位にする。重複が多い区間とは、灰数 $\otimes s$ と $\otimes(x, a)$ の備える区間が類似していることを意味する。

4.3 例題

4.3.1 抜粋した Auto-MPG データへの適用

表 3 で示した Auto-MPG データを情報表 IS とすると、個体および属性は以下に与えられる。

$$O = \{\text{Audi, BMW}, \dots, \text{Volvo}\}, \text{card}\{O\} = 10$$

$$A = \{\text{Cylinder, Model year}\}$$

ここで、近似の対象となる集合 Japanese を

$$\text{Japanese} = \{\text{Honda, Mazda, Subaru, Toyota}\}$$

とする。この集合の持つ属性の値は以下に与えられる。

$$\otimes(\text{Japanese, Cylinder}) \rightleftharpoons [3, 6] \quad (28)$$

$$\rightleftharpoons \bigvee_{x \in \text{Japanese}} \otimes(x, \text{Cylinder})$$

$$\otimes(\text{Japanese, Model year}) \rightleftharpoons [70, 82] \quad (29)$$

$$\rightleftharpoons \bigvee_{x \in \text{Japanese}} \otimes(x, \text{Model year})$$

これら二つの属性の条件を同時に満たす O の上近似 $\overline{GW}^*(\text{Japanese})$ 、下近似 $\underline{GW}_*(\text{Japanese})$ を表 4 に示す。この表には近似の精度、近似の質および各個体をそれぞれ対象としたときの近似・下近似の結果も示している。本適用例では厳しい評価条件下を想定して \underline{GW} の結果のみを表示している。

他国のメーカーの値を Japanese と同様に与えた場合、German, American および Swedish という集合で近似結果が表に示すように得られた。

4.3.2 全属性を含む Auto-MPG データへの適用

表 2 に示す Auto-MPG データを情報表 IS とすると、属性 A は

$$A = \{\text{MPG, Cylinder}, \dots, \text{Modelyear}\}$$

全七属性となる。前例と同様に集合 Japanese の属性値を与える。

$$\otimes(\text{Japanese, MPG}) \rightleftharpoons [18, 46.6] \quad (30)$$

$$\otimes(\text{Japanese, Displacement}) \rightleftharpoons [70, 168] \quad (31)$$

$$\otimes(\text{Japanese, Horsepower}) \rightleftharpoons [52, 122] \quad (32)$$

$$\otimes(\text{Japanese, Weight}) \rightleftharpoons [1.65, 2.9] \quad (33)$$

$$\otimes(\text{Japanese, Acceleration}) \rightleftharpoons [12.5, 21] \quad (34)$$

ただし、Cylinder と Model year については式 (28) と式 (29) をそれぞれ用いる。

集合 Japanese に対する O の上近似 $\overline{GW}^*(\text{Japanese})$ 、下近似 $\underline{GW}_*(\text{Japanese})$ を表 5 に示す。この表にも他の個体を対象としたときの近似・下近似、近似精度および近似の質を示している。表 4 との違いは、上近似または下近似で得られている個体が少なく、境界に含まれる個体が増えている。これは使用している属性数が増えたためだと思われる。この例題においても他国のメーカーの値を基に German, American および Swedish として近似結果が得られた。

5. 考察

5.1 提案方法と従来の方法との違い

表 6 は既に報告されている方法と本提案灰色ラフ集合の近似方法をまとめた。Zhang and Cheng らのラフ灰色集合は Dubois らの方法に近い、なぜならば Dubois はメンバシップ関数を基にラフ集合を近似しているのに対し Zhang らは白化関数を基に定義しているからである。Zhang and Wu の方法は区間類似度に基づくラフ近似を行う、そのため $\alpha = 1$ のとき本提案の制約付き灰色ラフ集合に相当する。ただし、 α の適切な設定といった課題が残されている。

Wu の方法は通常の方法を区間の境界に設定した上で Pawlak によるラフ近似を行う。Yao の方法は Pawlak による伝統的なラフ近似の結果を区間集合として境界に設定している。本提案の一般化灰色ラフ集合も区間集合として定義しているが、以下の点で上記の方法と異なる。

1. Wu および Yao らの方法は与えられた集合の要素に対して近似するのに対し、提案方法は与え

表 4 抜粋した属性を用いたときの AUTO-MPG データの近似結果

S	$GW^*(S)$	$GW_*(S)$	$GW^*(S) - GW_*(S)$	$\alpha(S)$	$\gamma(S)$
American	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10	1, 2, 3, 4, 7, 8, 10	5, 6, 9	0.7	0.7
German	1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10	1, 2, 5, 7, 9	4, 6, 8, 10	0.556	0.5
Japanese	1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10	1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10	\emptyset	1	0.9
Swedish	1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10	7, 10	1, 2, 4, 5, 6, 8, 9	0.222	0.2

表 5 全ての属性を用いたときの AUTO-MPG データの近似結果

S	$GW^*(S)$	$GW_*(S)$	$GW^*(S) - GW_*(S)$	$\alpha(S)$	$\gamma(S)$
American	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10	2, 3, 4, 10	1, 5, 6, 7, 8, 9	0.4	0.4
German	1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10	1, 2, 7, 9	4, 5, 6, 8, 10	0.444	0.4
Japanese	1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10	2, 5, 6, 7, 8	1, 4, 9, 10	0.556	0.5
Swedish	1, 4, 8, 10	10	1, 4, 8	0.25	0.1

られた区間データの含意関係の有無などに該当する要素を灰色ラフ集合としている (図 5)。

2. Wu および Yao らの方法は上近似・下近似の解がそれぞれ 1 つであるのに対し、提案方法は上近似・下近似とも区間集合で与えられるため、解が 1 つとは限らない。

5.2 一般化灰色ラフ近似の性質

表 7 は本提案一般化灰色ラフ集合で得られる上近似・下近似の性質を表している。ここで S は近似対象となる集合、 (x, a) は情報表に含まれるデータである。この表から以下の二つの特徴を確認することができる。

1. (x, a) が白化値であれば、 S はどちらの値であっても $GW^*(S) = GW_*(S)$ となる近似結果が得られる。
2. (x, a) が灰数で S が白化値のとき、下近似は常に空集合となる。これは S が白化値のとき、式 (17) を満足する (x, a) は白化値のときだけだからである。

灰色ラフ集合はこの性質を用いて可能性・必然性によるデータマイニングを行うことができる。

6. おわりに

本論文では新しいラフ集合へのアプローチとして、灰色格子演算に基づくラフ集合である灰色ラフ集合を提案した。本論文の内容を以下にまとめる。

1. 灰色格子演算の同値関係に基づく制約付き灰色ラフ集合を提案し、灰色理論とラフ集合の接点を示した。
2. 灰色格子演算の区間積と含意関係をラフ集合の近似条件とする一般化灰色ラフ集合を提案した。
3. 四つの例題を示し、提案した二種類の灰色ラフ集合は、区間を持つデータにも適用できるように従来の手法を拡張した。
4. IXSQL など区間データに対応するデータベースシステムへの数理背景を提供し、今後実際の拡張が可能である。

謝辞 本研究に対して貴重な助言を賜った神奈川大学工学部教授北岡正敏博士に深く感謝いたします。

表 6 既存の方法と提案方法の相違

Type	Approximation
Pawlak [1] Classical rough set	$R^*(X) = \{x \in U \mid [x]_R \cap X \neq \emptyset\}$ $R_*(X) = \{x \in U \mid [x]_R \subseteq X\}$ U : universal set $[x]_R$: equivalence class of relation R X : subset of U
Dubois and Prade [33] Rough fuzzy set	$\mu_{R^*}(F)(X_i) = \sup\{\mu_F(x) \mid \omega(X_i) = [x]_R\}$ $\mu_{R_*}(F)(X_i) = \inf\{\mu_F(x) \mid \omega(X_i) = [x]_R\}$ $\mu_{R^*}(F)(X_i)$: degree of membership of X_i $\mu_{R_*}(F)(X_i)$: degree of membership of X_i F : fuzzy set in X $[x]_R$: equivalence class of relation R $\mu_F(x)$: membership function
Zhang and Cheng [35] Rough grey set	$W^-(E_k) = \sup\{W_G(x) \mid \phi(E_k) = [x]_Q\}$ $W_-(E_k) = \inf\{W_G(x) \mid \phi(E_k) = [x]_Q\}$ $k = 1, 2, \dots, n$ E_k : name of the k th equivalence class $W_G(x)$: whitening function $[x]_Q$: equivalence class containing x $\phi(E_k) = \{x \mid E_k\}$
Wu et al. [36] Grey rough set	$R^-(\{A, B\}) = R^-B$ $R_-(\{A, B\}) = R_-A$ $\{A, B\}$: grey set based on the range set A : normal set as lower boundary B : normal set as upper boundary ($A \subseteq B$) R^-B : classical upper approximation of B R_-A : classical lower approximation of A
Zhang and Wu [37] Grey-rough set	$\overline{apr}^\alpha X = \{X \in U \mid [x]_R^\alpha \subseteq X\}$ $\underline{apr}^\alpha X = \{X \in U \mid [x]_R^\alpha \cap X \neq \emptyset\}$ $[x]_R^\alpha = \{y \in U \mid (x, y) \in GSIM_\alpha(C)\}$ $GSIM_\alpha(C) = \{(x, y) \in U \times U \mid \forall c \in C, SD_C(x, y) \geq \alpha\}$ $SD_C(x, y) = \frac{m(\otimes x \cap \otimes y)}{m(\otimes x \cup \otimes y)}$ α : grey similarity coefficient
Yao [38] Rough Interval-set	$Apr^*(X) = [R_*(X), R^*(X)]$ $Apr = (U/R)_i$: approximation space
Proposal Special grey-rough set	$GR^*(S) = \{x \in U \mid [x]_{GR} \cap S \neq \emptyset\}$ $GR_*(S) = \{x \in U \mid [x]_{GR} \subseteq S\}$ U : universal set S : subset of U $[x]_{GR}$: equivalence class of grey number
Proposal General grey-rough set	$GW^*(S) = [\bigcap_{i=1}^n GL^*(\otimes s_i), \bigcup_{i=1}^n GL^*(\otimes s_i)]$ $GW_*(S) = [\bigcap_{i=1}^n GL_*(\otimes s_i), \bigcup_{i=1}^n GL_*(\otimes s_i)]$ $GL^*(\otimes s_i) = \{x \in O \mid \otimes(x, a_i) \wedge \otimes s_i \neq \emptyset\}$ $GL_*(\otimes s_i) = \{x \in O \mid \otimes(x, a_i) \rightarrow \otimes s_i\}$ x : object of O a_i : i th attribute of n $\otimes(x, a_i)$: given value of x on a_i $\otimes s_i$: i th value of n for approximation S : set of $\otimes s_i$ with n values

表 7 一般化灰色ラフ集合の近似の性質

S	(x, a)	$GW^*(S)$	$GW_*(S)$	備考
\otimes	\otimes	\circ	\circ	$GW^*(S) = GW_*(S)$
\otimes	\otimes	\circ	\times	$GW^*(S) = GW_*(S)$
\otimes	\otimes	\circ	\times	$GW_*(S) = \emptyset$
\otimes	\otimes	\circ	\circ	$GW_*(S) \subseteq GW^*(S)$

参考文献

- [1] Z. Pawlak, Rough Sets, *Int. J. of Computer and Information Sciences*, vol.11, no.5, pp.341-356, 1982.
- [2] Z. Pawlak, Rough Classification, *Int. J. Man-Machine Studies*, vol.20, pp.469-483, 1984.
- [3] Z. Pawlak, J. G. Busse, R. Slowinski and W. Ziarko, Rough Sets, *Communications of the ACM*, vol.38, no.11, pp.89-95, Nov. 1995.
- [4] L. Polkowski and A. Skowron (Eds.), *Rough Sets in Knowledge Discovery*, vols.1-2, Physica-Verlag, 1998.
- [5] 中村 昭, ラフ集合その基本概念と知識情報, 数理科学, no.373, pp.78-83, July 1994.
- [6] 中村 昭, ラフ集合と論理・推論, 数理科学, no.374, pp.86-91, Aug. 1994.
- [7] 横森 貴, 小林 聡, ラフ集合と意思決定, 数理科学, no.375, pp.76-83, Sept. 1994.
- [8] 谷田則幸, 米村 崇, 横森 貴, ラフ集合とデータ解析, 数理科学, no.376, pp.78-85, Oct. 1994.

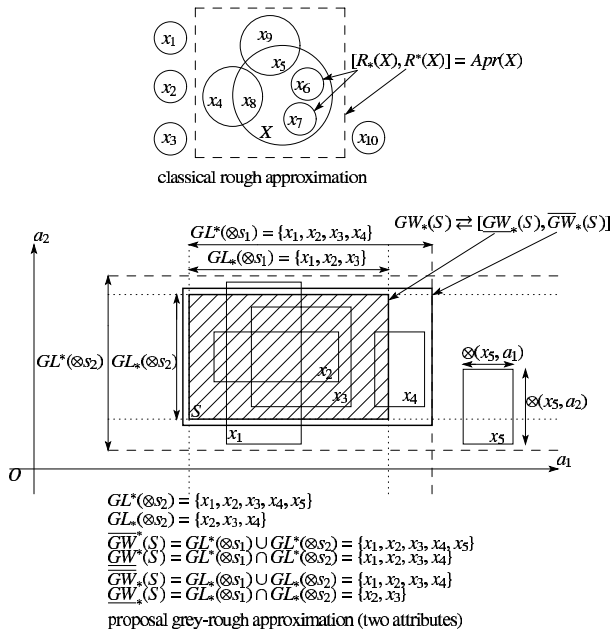


図 5 Pawlak の方法と提案方法の近似方法の相違

[9] 津本周作, 田中 博, ラフ集合と学習, 数理科学, no.377, pp.78-83, Nov. 1994.

[10] 田中 博, 津本周作, ラフ集合とエキスパートシステム, 数理科学, no.378, pp.76-83, Dec. 1994.

[11] 中村昭, ラフ集合—その理論と応用, 日本ファジ学会誌, vol.8, no.4, pp.594-603, 1996.

[12] 日本ファジ学会 (編), ファジィとソフトコンピューティングハンドブック, pp.535-565, 共立出版, 2000.

[13] 井上勝雄, ラフ集合, 多変量解析の使い方, pp.169-184, 筑波出版会, 2002.

[14] 森 典彦, 田中英夫, 井上勝雄 (編), ラフ集合と感性, 海文堂, 2004.

[15] 西野達夫, “ラフ集合と感性ルール獲得,” 商品開発と感性, pp.177-219, 海文堂, 2005.

[16] 尾上耕一, ラフ集合理論を感性情報のデータマイニングに応用しよう, C Magazine, pp.98-107, Feb. 2006.

[17] Z.M. Wojcik and B.E. Wojcik, Structural Modeling Using Rough Sets, *Proc. Fifth IEEE Int. Conf. Fuzzy Syst.*, vol.2, pp.761-766, 1996.

[18] T. Okuzaki, S. Hirano, S. Kobayashi, Y. Hata and Y. Takahashi, A Rough Set Based Clustering Method by Knowledge Combination, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, vol.E85-D, no.12, pp.1898-1908, 2002.

[19] 森 典彦, デザインにおける感性工学, 日本ファジ学会誌, vol.11, no.1, pp.52-63, 1999.

[20] 奥原浩之, 松原行宏, 杉原一臣, 石井博昭, 感性評価のための属性の順序性を考慮したラフ集合によるルール抽出, 信学論, vol.J87-A, no.7, pp.1045-1053, 2004.

[21] Y. Shinkawa and J. Matsumoto, Knowledge-Based Software Composition Using Rough Set Theory, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, vol.E83-D, no.4, pp.691-700, 2000.

[22] W.K. Choi, I.Y. Chung and S.J. Lee, Measuring the Degree of Reusability of the Components by Rough Set and Fuzzy Integral, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, vol.E85-D, no.1, pp.214-220, 2002.

[23] S.H. Sun, X.D. Mei and Z.L. Zhang, A Novel Rough Neural Network and Its Training Algorithm, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, vol.E85-D, no.2, pp.426-431, 2002.

[24] S.H. Liu and J.S. Lin, Encoding of Still Pictures by Wavelet Transform with Vector Quantization Using a Rough Fuzzy Neural Network, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, vol.E86-D, no.9, pp.1896-1902, 2003.

[25] 広兼道幸, 小西日出幸, 宮本文徳, 西村文宏, “ラフ集合と遺伝的アルゴリズムを併用した極小決定アルゴリズムの提案,” 電子情報通信学会論文誌, vol.J87-D-1, no.11, pp.1001-1011, 2004.

[26] J. L. Deng, *Grey Systems*, China Ocean Press, Beijing, China, 1988.

[27] X. Jun, *Grey System Theory to Hydrology*, Huanzhong University of Science and Technology Press, Wuhan, 2000 (in Chinese).

[28] 永井正武, 山口大輔, 灰色理論と工学応用方法, 共立出版, 2004.

[29] K. L. Wen, *Grey Systems: Modeling and Prediction*, Yang's Scientific Research Institute, 2004.

[30] S.F. Liu and Y. Lin, *Grey Information*, Springer, 2006.

[31] 戸川隼人, 計算機のための誤差解析の基礎, サイエンス社, 1974.

[32] J. R. Taylor (著), 林 茂雄, 馬場 涼, 計測における誤差解析入門, 東京化学同人, 1996.

[33] D. Dubois and H. Prade, Rough Fuzzy Sets and Fuzzy Rough Sets, *Int. J. General Systems*, vol.17, nos.2-3, pp.191-209, 1990.

[34] D.S. Yeung, D. Chen, C.C. Tsang, W.T. Lee and X.Z. Wang, On the Generalization of Fuzzy Rough Sets, *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol.13, no.3, pp.343-361, 2005.

[35] Q.S. Zhang and G.H. Chen, Rough Grey Sets, *Kybernetes*, vol.33, no.2, pp.446-452, 2004.

[36] S.X. Wu, S.F. Liu and M.Q. Li, Study of Integrate Models of Rough Sets and Grey Systems, *Lecture Notes in Computer Science*, vol.3613, pp.1313-1323, 2005.

[37] H. X. Zhang and S. X. Wu, Research on Grey-Rough set Model, *Proceedings of the 2005 Chinese Conference on Fuzzy Logic and Computer Intelligence (FLCI2005)*, pp.517-523, 2005.

[38] Y. Y. Yao, Interval-Set Algebra for Qualitative Knowledge Representation, *Proc. 5th International Conference on Computing and information*, pp.370-375, 1993.

[39] N. A. Lorentzos and Y. G. Mitsopoulos, SQL Extension for Interval Data, *IEEE Trans. Knowledge and Data Eng.*, vol.9, no.3, pp.480-499, 1997.

[40] 山口大輔, 李 国棟, 水谷晃三, 永井正武, 北岡正敏, “区間灰数演算によるルール抽出と縮約アルゴリズムの提案,” 情報処理学会研究報告, vol.2005, no.91, AL-102-4, pp.25-32, Sept. 2005.

[41] D. Yamaguchi, G.D. Li, K. Mizutani, T. Akabane, M. Nagai and M. Kitaoka, Decision Rule Extraction and Reduction Based on Grey Lattice Classification, *Proc. Fourth Int. Conf. on Machine Learning and Applications*, pp.31-36, 2005.

[42] R. C. Young, The Algebra of Many-valued Quantities, *Mathematische Annalen*, Bd.104, pp.260-290, 1931.

[43] F.N. Ris, Tools For the Analysis of Interval Arithmetic, *Lecture Notes in Computer Science*, vol.29, pp.75-98, 1975.

[44] F. Bierbaum and K. P. Schwartz, A Bibliography on Interval-Mathematics, *J. of Comput. and App. Math.*, vol.4, no.1, pp.59-86, 1978.

[45] J. Garloff and K. P. Schwartz, A Bibliography on Interval-Mathematics (Continuation), *J. of Comput. and App. Math.*, vol.6, no.1, pp.67-79, 1980.

[46] R. E. Moore, *Reliability in Coputing*, Academic Press, San Diego, CA, 1988.

[47] E. Hansen and G.W. Walster, *Global Optimization Using Interval Analysis Second Edition*, Marcel Dekker, 2004.

[48] W. Pedrycz (Ed.), *Granular Computing*, Physica-Verlag, 2001.

[49] 大石進一, 非線形解析入門, コロナ社, 1997.

[50] 大石進一, 精度保証付き数値計算, コロナ社, 2000.

[51] T. Sunaga, Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis, *RAAG Memoirs*, vol.2, pp.29-46, Gakujutsu Bunken Fukyu-kai, Tokyo, 1958.

[52] G. Birkhoff, *Lattice Theory Third Edition*, American Mathematical Society, 1967.

[53] 一松 信, 竹之内脩 (編), 改訂増補新数学事典, 大阪書籍, 1991.

[54] 日本数学会 (編), 岩波数学辞典第三版, 岩波書店, 1985.

[55] Z. Pawlak, Rough Set Elements, in *Rough Sets in Knowledge Discovery*, vol.1, pp.10-30, Physica-Verlag, 1998.

[56] C.J. Merz and P.M. Murphy, *UCI Repository of machine learning databases*: [http://www.ics.uci.edu/~mllearn/MLRepository.html].