完全K分木型組織構造の多階層関係追加モデル

澤田 清†, 天野 一幸‡

† 流通科学大学 情報学部 経営情報学科
‡ 群馬大学 工学部 情報工学科

概要 本研究では，高さ H の完全 K 分木型組織構造に関係を追加するモデルを提案する．ここでは，$L\,(L=1,2,\cdots,H)$ 個の階層それぞれのすべての頂点対に辺を追加する場合に，完全 K 分木の全頂点対の最短経路の短縮長さを合計した総頂点間短縮経路長を最大にする最適深さの組 $\{N_1,N_2,\cdots,N_L\}$ $(N_1>N_2>\cdots>N_L)$ を求める．その結果，$\{N_1,N_2,\cdots,N_L\}^*=\{H,H-1,\cdots,H-L+1\}$ が示される．

A Model of Adding Relations in Multi-levels to an Organization Structure of a Complete K-ary Tree

Kiyoshi Sawada† and Kazuyuki Amano‡

† Department of Information and Management Science, University of Marketing and Distribution Sciences
‡ Department of Computer Science, Gunma University

Abstract This paper proposes a model of adding relations to an organization structure which is a complete K-ary tree of height H. When edges between every pair of nodes with the same depth in $L\,(L=1,2,\cdots,H)$ levels, an optimal set of depth $\{N_1,N_2,\cdots,N_L\}$ $(N_1>N_2>\cdots>N_L)$ is obtained by maximizing the total shortening path length which is the sum of shortening lengths of shortest paths between every pair of all nodes in the complete K-ary tree. It is shown that $\{N_1,N_2,\cdots,N_L\}^*=\{H,H-1,\cdots,H-L+1\}$.

1. はじめに

企業などの組織の構造には様々な種類があるが [1, 2]，それらの基本となるものは上下間の一元的な命令系統に基づく階層構造（ピラミッド組織と呼ばれている [3, 4]）である．ピラミッド組織構造には，上司と直属の部下との間にのみ，情報のやりとりを行える関係が存在する．しかし，直接の上下関係を飛び越えた指示命令や他部門との協力が必要な場合には，事前に直接の上下間以外の関係形成を行うことが有効であると考えられる．

ピラミッド組織構造は，構成メンバーを頂点に，上下のメンバー間関係を辺に対応させると，根付き木であると考えることができる．このとき，各頂点間の経路は組織内のメンバー間の関係をたどる情報伝達経路に対応している．また，根付き木に辺を追加することは，直接の上下関係以外の追加的関係の形成に相当する．著者らは，ピラミッド組織構造を対象として，組織全体の情報伝達が最も効率的になるような，メンバー間の関係追加位置を求めるモデルをいくつか提案し

た．文献 [5] では，完全２分木型組織構造に対して直系の関係を持つ異なる階層の２人のメンバー間に関係を追加するモデルを提案した．文献 [6] では，完全 K 分木型組織構造を対象として，１つの同一階層内で関係を追加する３つのモデル，(i) ２人のメンバー間の関係追加，(ii) 同じ上司を持つメンバー間の関係追加，(iii) 全メンバー間の関係追加，を提案した．そこでは，完全 K 分木型組織構造の全メンバー間の最短経路長の総和（以後，総頂点間経路長と呼ぶ）が最小となるような関係追加の階層を解析的に求めた．さらに文献 [7] で，２つの階層それぞれで全メンバー間の関係追加を行うモデルについても，総頂点間経路長を最小にする２つの階層を求めた．

本論文では，各階層内の全メンバー間の関係追加モデルをさらに一般化し，$L\,(L=1,2,\cdots,H)$ 個の階層で関係を追加するモデルを提案する．すなわち，高さ $H\,(H=1,2,\cdots)$ の完全 K 分木 $(K=2,3,\cdots)$ 型組織構造に対して，深さ $\{N_1,N_2,\cdots,N_L\}$ $(N_1>N_2>\cdots>N_L)$ の L 個の階層それぞれの全頂点対に辺を追加する場合に，総頂点間経路長を最小にする最適深さの組 $\{N_1,N_2,\cdots,N_L\}^*$ を求める．ここで，完全 K 分木は，すべての葉の深さが同じで，かつすべての内部頂点の子の数が K である K 分木を指す [8]．また，深さは根からその頂点までの経路の長さを表す．

完全 K 分木の２頂点 v_i と $v_j\,(i,j=1,2,\cdots,(K^{H+1}-1)/(K-1))$ の間の最短経路の長さを $l_{i,j}$ とすると（ただし $l_{i,j}=l_{j,i}$，$l_{i,i}=0$），$\sum_{i<j} l_{i,j}$ は総頂点間経路長を表す．また，上述したような辺の追加を行った後の２頂点 v_i，v_j 間の最短経路の長さを $l'_{i,j}$ とすると，$l_{i,j}-l'_{i,j}$ は辺追加により２頂点間の最短経路の長さがどれだけ短縮されたかを表す．ここでは，これを２頂点間の短縮経路長と呼ぶ．さらに，全頂点間の短縮経路長の総和 $\sum_{i<j}(l_{i,j}-l'_{i,j})$ を，総頂点間短縮経路長と定義する．ここで，総頂点間短縮経路長を最大にすることは，総頂点間経路長を最小にすることを意味する．

2. で１階層関係追加モデル（$L=1$）における総頂点間短縮経路長を最大にする階層を示し，3. で L 階層関係追加モデルへの一般化を展開する．

2.　１階層関係追加モデル

１階層関係追加モデル [6] は，高さ $H\,(H=1,2,\cdots)$ の完全 K 分木 $(K=2,3,\cdots)$ に対して，深さ $N\,(N=1,2,\cdots,H)$ の１階層の全頂点対に辺を追加するモデルである．

このモデルの深さ N 以上の頂点間の短縮経路長の総和は，

$$\alpha_H(N)=\Big\{W(H-N)\Big\}^2\frac{K^N(K-1)}{2}\sum_{i=1}^{N}(2i-1)K^{i-1} \tag{1}$$

で与えられる．ただし，$W(h)(h=0,1,2,\cdots)$ は，高さ h の完全 K 分木の頂点数を表す．また，深さ N 以上の頂点と深さ N 未満の頂点との間の短縮経路長の総和は，

$$\beta_H(N)=W(H-N)K^N(K-1)\sum_{i=1}^{N-1}(2i-1)(N-i)K^{i-1}\,, \tag{2}$$

深さ N 未満の頂点間の短縮経路長の総和は，

$$\gamma(N)=\frac{K^N(K-1)}{2}\sum_{i=1}^{N-2}\sum_{j=1}^{i}(2j-1)(i-j+1)K^{j-1} \tag{3}$$

となる．ただし，$\sum_{i=1}^{0}\cdot=0$，$\sum_{i=1}^{-1}\cdot=0$ と定義する．

以上より，深さ N の1階層の全頂点対に辺を追加したときの総頂点間短縮経路長 $S_1(N)$ は，

$$\begin{aligned} S_1(N) &= \alpha_H(N)+\beta_H(N)+\gamma(N) \\ &= \left\{W(H-N)\right\}^2\frac{K^N(K-1)}{2}\sum_{i=1}^{N}(2i-1)K^{i-1} \\ &\quad + W(H-N)K^N(K-1)\sum_{i=1}^{N-1}(2i-1)(N-i)K^{i-1} \\ &\quad + \frac{K^N(K-1)}{2}\sum_{i=1}^{N-2}\sum_{j=1}^{i}(2j-1)(i-j+1)K^{j-1} \end{aligned} \tag{4}$$

と定式化される．

式(4)の $S_1(N)$ の N に関する差分 $S_1(N+1)-S_1(N)$ が，$N=1,2,\cdots,H-1$ に対して常に正になることから，次の定理1が得られる[6]．

定理 1 $S_1(N)$ を最大にする N は，$N^*=H$ である．

3. L階層関係追加モデル

$L\,(L=1,2,\cdots,H)$ 階層関係追加モデルでは，高さ $H\,(H=1,2,\cdots)$ の完全 K 分木 $(K=2,3,\cdots)$ に対して，深さ $\{N_1,N_2,\cdots,N_L\}$ $(N_1>N_2>\cdots>N_L)$ の L 個の階層それぞれの全頂点対に辺を追加する．このときの総頂点間短縮経路長を $S_2(N_1,N_2,\cdots,N_L)$ と書く．

ここで，深さ $\{N_1,N_2,\cdots,N_{l-1},N_l\}$ $(N_1>N_2>\cdots>N_{l-1}>N_l)$ の l 個の階層で辺が追加されている場合と，深さ $\{N_1,N_2,\cdots,N_{l-1}\}$ $(N_1>N_2>\cdots>N_{l-1})$ の $l-1$ 個の階層で辺が追加されている場合の総頂点間短縮経路長の差を考える（$l\geq 2$）．このとき，両者の間で，深さ N_{l-1} 以上の頂点間の短縮経路長，および深さ N_{l-1} 以上の頂点と深さ N_{l-1} 未満の頂点との間の短縮経路長は変わらない．すなわち，深さ N_{l-1} 未満の頂点間の短縮経路長の差だけを考えればよい．また，深さ N_{l-1} 未満の頂点間の短縮経路長は深さ $N_1,N_2,\cdots,N_{l-2}$ に依存しないので，$S_2(N_1,N_2,\cdots,N_{l-1},N_l)$ と $S_2(N_1,N_2,\cdots,N_{l-1})$ の差を $T(N_{l-1},N_l)$ と書くことにする．すなわち，

$$T(N_{l-1},N_l)=S_2(N_1,N_2,\cdots,N_{l-1},N_l)-S_2(N_1,N_2,\cdots,N_{l-1}) \tag{5}$$

とする．このとき，

$$S_2(N_1,N_2,\cdots,N_L)=S_1(N_1)+\sum_{l=2}^{L}T(N_{l-1},N_l) \tag{6}$$

と表すことができる．ただし，$S_1(N)$ は式(4)の1階層関係追加モデルの総頂点間短縮経路長である．また，$\sum_{i=2}^{1}\cdot=0$ と定義する．

以下で，$T(N_{l-1},N_l)$ を定式化する．上述したように，$S_2(N_1,N_2,\cdots,N_{l-1},N_l)$ と $S_2(N_1,N_2,\cdots,N_{l-1})$ の差は深さ N_{l-1} 未満の頂点間だけを考えればよい．$S_2(N_1,N_2,\cdots,N_{l-1},N_l)$ のうち深さ

N_{l-1} 未満の頂点間の短縮経路長を $S_2'(N_1, N_2, \cdots, N_{l-1}, N_l)$，また $S_2(N_1, N_2, \cdots, N_{l-1})$ のうち深さ N_{l-1} 未満の頂点間の短縮経路長を $S_2'(N_1, N_2, \cdots, N_{l-1})$ とそれぞれ書くことにする．

このとき，$S_2'(N_1, N_2, \cdots, N_{l-1})$ は，式 (3) を用いて，

$$S_2'(N_1, N_2, \cdots, N_{l-1}) = \gamma(N_{l-1}) \tag{7}$$

と定式化できる．

次に，$S_2'(N_1, N_2, \cdots, N_{l-1}, N_l)$ の定式化を示す．ここで，深さ N_l 未満の頂点の集合を V_1，深さ N_l 以上 N_{l-1} 未満の頂点の集合を V_2 と書くことにする．

このとき，V_1 内の頂点間の短縮経路長の総和は，式 (3) を用いて，

$$A(N_l) = \gamma(N_l) \tag{8}$$

と与えられる．また，V_1 と V_2 の頂点間の短縮経路長の総和は，式 (2) を用いて，

$$B(N_{l-1}, N_l) = \beta_{N_{l-1}-1}(N_l) \tag{9}$$

と定式化される．V_2 内の頂点間のうち，深さ N_l の頂点を根とする部分木内の頂点間の短縮経路長の総和は，式 (3) を用いて，

$$C(N_{l-1}, N_l) = \gamma(N_{l-1} - N_l)K^{N_l} \tag{10}$$

と与えられる．さらに，V_2 内の頂点間のうち，深さ N_l の頂点を根とする異なる部分木間の頂点間の短縮経路長は，次のように定式化される．すなわち，深さ $\{N_1, N_2, \cdots, N_{l-1}\}$ の辺追加がなく深さ N_l の辺追加のみによる短縮経路長の総和は，式 (1) を用いて，

$$D(N_{l-1}, N_l) = \alpha_{N_{l-1}-1}(N_l)\,, \tag{11}$$

深さ N_l の辺追加による経路長短縮後に，さらに深さ N_{l-1} の辺追加により短縮される経路長の総和は，

$$E(N_{l-1}, N_l) = (K^{N_l} - 1) \sum_{i=1}^{N_{l-1}-N_l-2} K^{N_{l-1}-i} \sum_{j=1}^{N_{l-1}-N_l-i-1} K^{N_{l-1}-N_l-j}(N_{l-1} - N_l - i - j) \tag{12}$$

となる．ただし，ここでも，$\sum_{i=1}^{0} \cdot = 0$, $\sum_{i=1}^{-1} \cdot = 0$ と定義する．

以上より，$S_2'(N_1, N_2, \cdots, N_{l-1}, N_l)$ は次のようになる．

$$\begin{aligned} &S_2'(N_1, N_2, \cdots, N_{l-1}, N_l) \\ &= A(N_l) + B(N_{l-1}, N_l) + C(N_{l-1}, N_l) + D(N_{l-1}, N_l) + E(N_{l-1}, N_l) \\ &= \gamma(N_l) + \beta_{N_{l-1}-1}(N_l) + \gamma(N_{l-1} - N_l)K^{N_l} + \alpha_{N_{l-1}-1}(N_l) \\ &\quad + (K^{N_l} - 1) \sum_{i=1}^{N_{l-1}-N_l-2} K^{N_{l-1}-i} \sum_{j=1}^{N_{l-1}-N_l-i-1} K^{N_{l-1}-N_l-j}(N_{l-1} - N_l - i - j)\,. \end{aligned} \tag{13}$$

したがって，$T(N_{l-1},N_l)$ は，次のように定式化される．

$$
\begin{aligned}
&T(N_{l-1},N_l)\\
&= S_2(N_1,N_2,\cdots,N_{l-1},N_l)-S_2(N_1,N_2,\cdots,N_{l-1})\\
&= S_2'(N_1,N_2,\cdots,N_{l-1},N_l)-S_2'(N_1,N_2,\cdots,N_{l-1})\\
&= \gamma(N_l)+\beta_{N_{l-1}-1}(N_l)+\gamma(N_{l-1}-N_l)K^{N_l}+\alpha_{N_{l-1}-1}(N_l)-\gamma(N_{l-1})\\
&\quad +(K^{N_l}-1)\sum_{i=1}^{N_{l-1}-N_l-2}K^{N_{l-1}-i}\sum_{j=1}^{N_{l-1}-N_l-i-1}K^{N_{l-1}-N_l-j}(N_{l-1}-N_l-i-j)\\
&= \frac{K^{N_l}(K-1)}{2}\sum_{i=1}^{N_l-2}\sum_{j=1}^{i}(2j-1)(i-j+1)K^{j-1}\\
&\quad +W(N_{l-1}-N_l-1)K^{N_l}(K-1)\sum_{i=1}^{N_l-1}(2i-1)(N_l-i)K^{i-1}\\
&\quad +\frac{K^{N_{l-1}}(K-1)}{2}\sum_{i=1}^{N_{l-1}-N_l-2}\sum_{j=1}^{i}(2j-1)(i-j+1)K^{j-1}\\
&\quad +\Big\{W(N_{l-1}-N_l-1)\Big\}^2\frac{K^{N_l}(K-1)}{2}\sum_{i=1}^{N_l}(2i-1)K^{i-1}\\
&\quad -\frac{K^{N_{l-1}}(K-1)}{2}\sum_{i=1}^{N_{l-1}-2}\sum_{j=1}^{i}(2j-1)(i-j+1)K^{j-1}\\
&\quad +(K^{N_l}-1)\sum_{i=1}^{N_{l-1}-N_l-2}K^{N_{l-1}-i}\sum_{j=1}^{N_{l-1}-N_l-i-1}K^{N_{l-1}-N_l-j}(N_{l-1}-N_l-i-j)\,. \qquad (14)
\end{aligned}
$$

式 (14) に

$$W(h)=\frac{K^{h+1}-1}{K-1} \qquad (15)$$

を代入して整理すると，次式が得られる．

$$
\begin{aligned}
&T(N_{l-1},N_l)\\
&= \frac{1}{4(K-1)^2}\Big[4(N_{l-1}-N_l)K^{N_{l-1}+N_l+1}+N_l\Big\{(N_l-1)K+N_l+1\Big\}(K-1)K^{N_l}\\
&\quad +\Big\{(-2N_{l-1}N_l+{N_l}^2+N_l)K^2+(-4N_{l-1}+2N_l)K+2N_{l-1}N_l-{N_l}^2+N_l\Big\}K^{N_{l-1}}\Big]\,. \qquad (16)
\end{aligned}
$$

以下では，式 (16) の $T(N_{l-1},N_l)$ を最大にする N_{l-1} と N_l について解析する．

まず，N_{l-1} を与えた場合に $T(N_{l-1},N_l)$ を最大にする N_l について，次の補題 2 を得る．

補題 2 各 N_{l-1} に対して $T(N_{l-1},N_l)$ を最大にする N_l は，${N_l}^*=N_{l-1}-1$ である．

証明

$T(N_{l-1},N_l)$ の N_l に関する差分をとると，

$$\Delta T(N_{l-1},N_l)$$

$$
\begin{aligned}
&\equiv T(N_{l-1}, N_l+1) - T(N_{l-1}, N_l) \\
&= \frac{1}{4(K-1)^2}\Bigg[2K^{N_{l-1}}\bigg[2K^2(K^{N_l-1}-1)(N_{l-1}-N_l-1)\Big(K-1-\frac{1}{N_{l-1}-N_l-1}\Big) \\
&\quad + (K-1)\Big\{(N_{l-1}-N_l-2)(2K^2-K-1)+K^2\Big(2-\frac{3}{K}-\frac{2}{K^2}\Big)\Big\}\bigg] \\
&\quad + (K-1)K^{N_l}\Big\{{N_l}^2(K^2-1)+N_l(K^2+4K-1)+2K\Big\}\Bigg] > 0 \qquad (17)
\end{aligned}
$$

となる．ただし，$N_l = 1, 2, \cdots, N_{l-1}-2$ である．以上より，次の結果が得られる．
(i) $N_{l-1} = 2$ の場合，$N_l = 1$ のみであるので，${N_l}^* = 1 = N_{l-1}-1$ である．
(ii) $N_{l-1} \geq 3$ の場合，式 (17) より $\Delta T(N_{l-1}, N_l) > 0$ であるので，${N_l}^* = N_{l-1}-1$ である．　□

式 (16) の $T(N_{l-1}, N_l)$ に $N_l = N_{l-1}-1$ を代入した式を $R(N_{l-1})$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
R(N_{l-1}) &\equiv T(N_{l-1}, N_{l-1}-1) \\
&= \frac{1}{4(K-1)^2}\Big[4K^{2N_{l-1}} + K^{N_{l-1}-1}\Big\{-N_{l-1}(N_{l-1}-1)K^3 + N_{l-1}(N_{l-1}-5)K^2 \\
&\quad + (N_{l-1}-1)(N_{l-1}+4)K - N_{l-1}(N_{l-1}-1)\Big\}\Big] \qquad (18)
\end{aligned}
$$

となる．ただし，$N_1 > N_2 > \cdots > N_{l-1} > N_l$ であることから，N_{l-1} の取りうる範囲は，$N_{l-1} = 2, 3, \cdots, H-l+2$ である．ここで，$R(N_{l-1})$ を最大にする N_{l-1} について，次の補題 3 を得る．

補題 3 $R(N_{l-1})$ を最大にする N_{l-1} は，${N_{l-1}}^* = H-l+2$ である．ただし，このとき $\{N_1, N_2, \cdots, N_{l-2}\} = \{H, H-1, \cdots, H-l+3\}$ である．

証明
$R(N_{l-1})$ の N_{l-1} に関する差分を計算すると，

$$
\begin{aligned}
\Delta R(N_{l-1}) &\equiv R(N_{l-1}+1) - R(N_{l-1}) \\
&= \frac{1}{4(K-1)}\Big[K^{N_{l-1}+2}\Big(2K^{N_{l-1}-1} + 2K^{N_{l-1}-2} - {N_{l-1}}^2 - N_{l-1}\Big) \\
&\quad + K^{N_{l-1}+1}\Big(2K^{N_{l-1}} + 2K^{N_{l-1}-1} + {N_{l-1}}^2 - 5N_{l-1} - 4\Big) \\
&\quad + K^{N_{l-1}-1}\Big\{({N_{l-1}}^2 + 5N_{l-1} - 4)K - {N_{l-1}}^2 + N_{l-1}\Big\}\Big] > 0 \qquad (19)
\end{aligned}
$$

となる．ただし，$N_{l-1} = 2, 3, \cdots, H-l+1$ である．以上より，次の結果が得られる．
(i) $l = H$ の場合，$N_{l-1} = 2$ のみであるので，${N_{l-1}}^* = 2 = H-l+2$ である．
(ii) $l \leq H-1$ の場合，式 (19) より $\Delta R(N_{l-1}) > 0$ であるので，${N_{l-1}}^* = H-l+2$ である．　□

補題 2，補題 3 より，次の定理 4 が得られる．

定理 4 $T(N_{l-1}, N_l)$ を最大にする $\{N_{l-1}, N_l\}$ は，$\{N_{l-1}, N_l\}^* = \{H-l+2, H-l+1\}$ である．

定理 1，定理 4 より，式 (6) の $S_2(N_1, N_2, \cdots, N_L)$ を最大にする $\{N_1, N_2, \cdots, N_L\}$ について，次の定理 5 が得られる．

定理 5 $S_2(N_1, N_2, \cdots, N_L)$ を最大にする $\{N_1, N_2, \cdots, N_L\}$ は，$\{N_1, N_2, \cdots, N_L\}^* = \{H, H-1, \cdots, H-L+1\}$ である．

証明

(i) $L=1$ のとき，式 (6) より $S_2(N_1) = S_1(N_1)$ であり，定理 1 より $S_1(N_1)$ を最大にする N_1 は $N_1{}^* = H$ であることから，$S_2(N_1)$ を最大にする $\{N_1\}$ は $\{H\}$ である．

(ii) $L=m$ のとき，$S_2(N_1, N_2, \cdots, N_m)$ を最大にする $\{N_1, N_2, \cdots, N_m\}$ が $\{H, H-1, \cdots, H-m+1\}$ であると仮定する．$L=m+1$ のとき，式 (6) より $S_2(N_1, N_2, \cdots, N_m, N_{m+1}) = S_2(N_1, N_2, \cdots, N_m) + T(N_m, N_{m+1})$ である．ここで，上記仮定より $S_2(N_1, N_2, \cdots, N_m)$ を最大にする $\{N_1, N_2, \cdots, N_m\}$ は $\{H, H-1, \cdots, H-m+1\}$ であり，また定理 4 より $T(N_m, N_{m+1})$ を最大にする $\{N_m, N_{m+1}\}$ は $\{H-m+1, H-m\}$ であることから，$S_2(N_1, N_2, \cdots, N_m, N_{m+1})$ を最大にする $\{N_1, N_2, \cdots, N_m, N_{m+1}\}$ は $\{H, H-1, \cdots, H-m+1, H-m\}$ となる．

(i)，(ii) より，すべての $L\,(L=1,2,\cdots,H)$ について，$\{N_1, N_2, \cdots, N_L\}^* = \{H, H-1, \cdots, H-L+1\}$ が成り立つ． □

4. おわりに

本研究では，高さ H の完全 K 分木型組織構造を対象として，組織全体の情報伝達が最も効率的になるような関係追加位置を求める目的で，深さ $\{N_1, N_2, \cdots, N_L\}$ $(N_1 > N_2 > \cdots > N_L)$ の L 個の階層それぞれの全メンバー間に関係を追加するモデルを提案した．総頂点間短縮経路長を定式化し，それを最大にする L 個の階層の深さを求めた結果，$\{N_1, N_2, \cdots, N_L\}^* = \{H, H-1, \cdots, H-L+1\}$ となった．これは，下位の層から順番に関係の追加を行うことで組織全体の情報伝達効率を最も改善できることを示している．

参考文献

[1] S. P. Robbins, Essentials of Organizational Behavior, 7th ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 2003.

[2] Y. Takahara, M. Mesarovic, Organization Structure: Cybernetic Systems Foundation, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2003.

[3] N. Takahashi, "Sequential analysis of organization design: a model and a case of Japanese firms", European Journal of Operational Research, vol.36, pp.297–310, 1988.

[4] 高橋伸夫, 組織の中の決定理論, 朝倉書店, 東京, 1993.

[5] 澤田 清, "総頂点間経路長を最小にする完全 2 分木の階層間隣接化," 日本応用数理学会論文誌, vol.13, no.3, pp.353–360, 2003.

[6] K. Sawada, R. Wilson, Models of adding relations to an organization structure of a complete K-ary tree, European Journal of Operational Research, vol.174, pp.1491–1500, 2006.

[7] 澤田 清, “完全K分木型組織構造の２階層関係追加モデル,” 情報処理学会研究報告, 2006-AL-106, pp.49–55, 2006.

[8] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein, Introduction to Algorithms, 2nd ed., MIT Press, Cambridge, Mass., 2001.