

## 平面三角格子上におけるバンド数の少ないグラフ描画

樫村賢治<sup>†</sup> 加納幹雄<sup>††</sup>

<sup>†</sup> 茨城大学工学部  
〒316-8511 茨城県日立市中成沢町 4-12-1

E-mail: <sup>†</sup>cooking-pink@yahoo.co.jp, <sup>††</sup>kano@mx.ibaraki.ac.jp

**あらまし** 平面格子上に最大次数4以下の平面連結グラフを、バンド数 (Bend Number = 曲がり数) が最小となるように描画する問題は多くの研究がなされ、解決されている。なお、格子上への描画はグラフの直交描画とよばれている。しかし、対象となるグラフは最大次数が4以下のものに限定される。ここでは平面上の三角格子を利用して、この上に最大次数6以下の平面グラフをバンド数が少ない、できれば最小となる描画を試みた。グラフ直交描画の手法を踏襲し、バンド数が最小ではないが上限と下限の評価できるアルゴリズムを提案する。またアルゴリズムを実装し、小さいグラフについては実際に描画を行った。直交描画では生じない三角格子上での固有の難しい問題があり、最終的な解決には至っていない、今後の研究が望まれる。

**キーワード** 平面グラフ, グラフ描画, 平面三角格子, 格子上での描画, バンド数

## Graph Drawing on the Triangle Lattice With Small Number of Bends

Kenji KASHIMURA<sup>†</sup> and Mikio KANO<sup>††</sup>

<sup>†</sup> Faculty of Engineering, Ibaraki University  
Nakanarusawa 4-12-1, Hitachi, 316-8511 Japan

E-mail: <sup>†</sup>cooking-pink@yahoo.co.jp, <sup>††</sup>kano@mx.ibaraki.ac.jp

**Abstract** The problem of orthogonal drawing of planar graph with maximum degree 4 are well studied, and such a drawing with smallest bends was solved by many papers. In this paper, we consider a similar drawing of planar connected graph with maximum degree 6 on the triangle lattice of the plane. We give an upper and lower bound of the number of bends of such a drawing, and propose an algorithm of such drawing that works for some planar graphs, and sometimes gives us a good drawing for a small number of vertices. There are some big difference between orthogonal drawings and drawings on the triangle lattice, and this problem is not solved yet.

**Key words** planar graph, graph drawing, triangle lattice in the plane, graph drawing on the lattice.

## 1. はじめに

平面グラフを直角格子上に描画する問題は多くの応用があり、多くの研究がなされている。例えば ([3]) にはその方面の最新の結果がまとめてある。本稿で扱うベンド数 (曲がり数) が最小となる描画を求める問題も多く研究がなされ、解決されている ([1], [2], [4], [5])。しかし、直角格子上で描画では、最大次数が 4 以下の平面グラフを対象が限定されるという問題がある。ここでは三角格子を考えることにより、最大次数が 6 以下の平面グラフを三角格子上にベンド数が少ない、できれば最小となる描画を試みた。基本的には直角格子上で描画の手法が使えるが、固有の問題もありベンド数の下限と上限、および小さいグラフでの実装結果を提示する。ベンド数が最小となる描画問題ではいくつかの部分が未解決であり、今後の研究が待たれる。

## 2. 平面グラフの三角格子描画

連結な平面グラフ  $G$  が与えられたとき、 $G$  の平面表現とは、 $G$  の各内領域においてその周囲を時計回りになぞり、外領域に対してはその周囲を反時計回りになぞった時に出現する辺を順番に書いた巡回リストの集合である。例えば図 1 のような平面グラフ  $G$  の平面表現  $P$  は次のようになる。

$$P(F_1) = (e_1, e_6, e_{11}); P(F_2) = (e_2, e_7, e_6); P(F_3) = (e_3, e_9, e_8, e_7);$$

$$P(F_4) = (e_8, e_9, e_4, e_{10}); P(F_5) = (e_{10}, e_5, e_{11}); P(F_6) = (e_1, e_5, e_4, e_3, e_2)$$

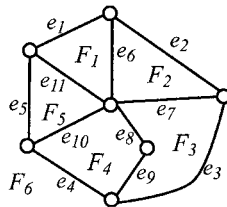


図 1 最大次数 5 の平面連結グラフ  $G$

最大次数が 6 以下の連結な平面グラフ  $G$  が与えられたとき、 $G$  を図 2 のように平面三角格子上に描画する。この時、各内領域の境界を時計回りに巡回し、各辺においてその辺のベンド情報 (曲がり方の情報)、そして次の辺となす角を記したものを辺のベンド記述という。なお、外領域では反時計回りに巡回してベンド記述を行う。各領域において辺のベンド記述を辺が表れる順に巡回リスト化し、グラフのすべての領域における巡回リストの集合をグラフ描画の三角格子表現とよぶ。

領域のベンド記述は正確には次のようになる。領域  $F$  の辺のベンド情報は  $(e_r, s_r, a_r)$  のように 3 つの要素からなり、 $e_r$  は辺のラベルを表わし、 $s_r$  はベンドがないとき  $\epsilon$  であり、ベンドがあるときには以下に述べるように 2, 1, -1, -2 の 4 つの数字からなる文字列となる。1 は進行方向に対して右に  $60^\circ$  曲がっていることを表わし、2 は進行方向に対して右に  $120^\circ$  曲がっていることを表わす。一方、-1 は進行方向に対し左に  $60^\circ$ 、-2 は同じく左に  $120^\circ$  曲がっていることを表わしている。特に数はベンド数だけ並ぶことになる (図 2(b))。  $a_r$  は領域  $F$  において辺  $e_r$  の次に現れる辺と  $e_r$  のなす角度を表わしており、60, 120, 180, 240, 300, 360 のいずれかの値である。そしてこの辺

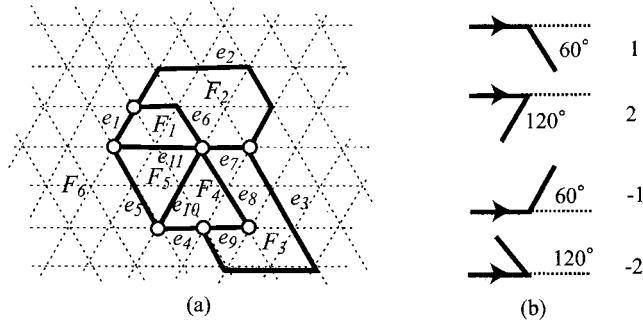


図 2 (a): 図 1 のグラフの三角格子上への描画の例; (b): ベンド数

のベンド情報を並べると領域のベンド記述が得られる.

図 2 の平面三角格子描画の三角格子表現  $T$  は,

$$T(F_1) = \{(e_1, \epsilon, 120), (e_6, 1, 60), (e_{11}, \epsilon, 60)\}$$

$$T(F_2) = \{(e_2, 111, 120), (e_7, \epsilon, 120), (e_6, -1, 60)\}$$

$$T(F_3) = \{(e_3, 21, 60), (e_9, \epsilon, 300), (e_8, \epsilon, 60), (e_7, \epsilon, 120)\}$$

$$T(F_4) = \{(e_8, \epsilon, 60), (e_9, \epsilon, 180), (e_4, \epsilon, 60), (e_{10}, \epsilon, 60)\}$$

$$T(F_5) = \{(e_{10}, \epsilon, 60), (e_5, \epsilon, 60), (e_{11}, \epsilon, 60)\}$$

$$T(F_6) = \{(e_1, \epsilon, 240), (e_5, \epsilon, 240), (e_4, \epsilon, 120), (e_3, -1 - 2, 120), (e_2, -1 - 1 - 1, 180)\}$$

となる.

### 3. ベンド数の少ない平面グラフの三角格子描画

本節では平面グラフ  $G$  の平面表現  $P$  が与えられた時に, ベンド数の少ない三角格子表現  $T$  を求める方法について説明する.

#### 3.1 ネットワーク化

与えられたグラフ  $G$  から次のようにしてネットワーク  $N$  をつくる.

- ・ネットワーク  $N$  は, グラフ  $G$  の頂点  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  に対応したノード  $(node(v_1), node(v_2), \dots, node(v_n))$  および  $G$  の領域  $(F_1, F_2, \dots, F_m)$  に対応したノード  $(node(F_1), node(F_2), \dots, node(F_m))$ , とソース  $s$  とシンク  $t$  から成る.
- ・ネットワーク  $N$  の各弧はパラメータ  $(\lambda, \mu, c)$  を持ち, それぞれ弧を流れる流量の下限, 流量の上限, コストを意味している.
- ・ソース  $s$  から各頂点ノード  $(node(v_1), node(v_2), \dots, node(v_n))$  へ向かう弧が一本ずつあり, 各弧のパラメータはいずれも  $(\lambda = 0, \mu = 6, c = 0)$  である.
- ・各領域ノード  $(node(F_1), node(F_2), \dots, node(F_m))$  からシンク  $t$  へ向かう弧が一本ずつあり各弧の流量の上限  $\mu$  は, 領域  $F$  が内領域の時  $3p(F) - 6$ , 外領域の時  $3p(F) + 6$  である.  $p(F)$  は領域  $F$  内で辺と辺が成している角の数である. 流量の下限とコストはいずれも  $(\lambda = c = 0)$  である.
- ・各頂点ノードから, その頂点が属する領域ノードへ向かう弧があり, その弧の  $\lambda =$  頂点とその領域で成す角の数  $\mu = +\infty, c = 0$  である.

・各領域ノードから、その領域と辺を共有するノードへ向かう弧があり、その弧の  $\lambda = 0, \mu = 6, c = 1$  である。

図1のグラフ  $G$  が与えられたとすると、図3のようなネットワークが出来る。図3の (a) がソース  $s$  から各頂点ノードへの弧、(b) が各頂点ノードから属する領域ノードへの弧 ( $\lambda$  の値は全て1)、(c) が各領域ノードから辺を共有する領域ノードへの弧、(d) が各領域ノードからシンク  $t$  への弧とその  $\lambda$  の値、をそれぞれ示している。

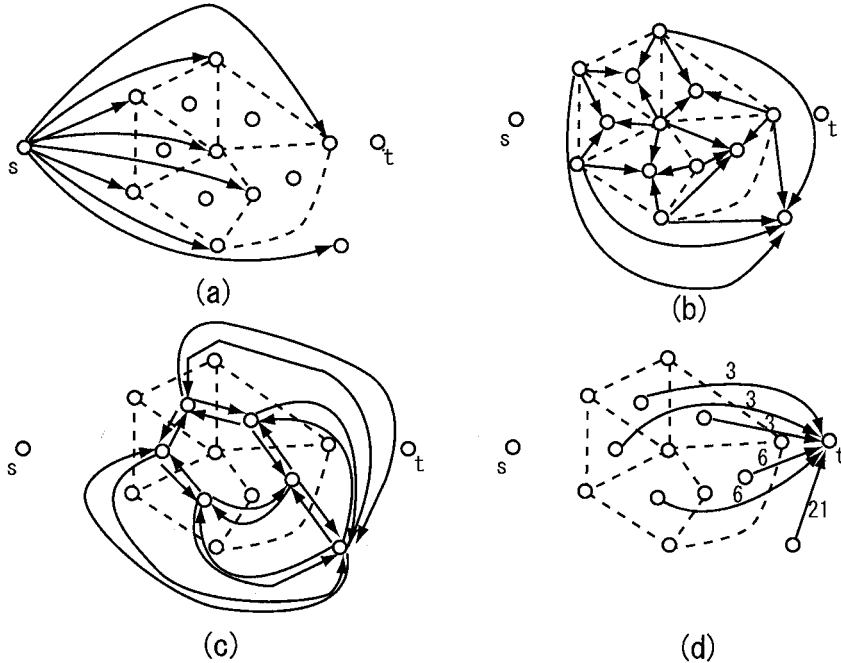


図3 図1のグラフ  $G$  のネットワーク化

このようにして求めたネットワークの最大流のうち、その総コストが最小となるような流れを求める。本稿では最小コスト最大流の詳細な計算法については省略する。図3のネットワークの最小コスト最大流の一つを図4に示す。尚、図4では  $s$  から頂点ノードへの弧、領域ノードから  $t$  への弧、及び流量が0の弧については省略している。

### 3.2 三角格子表現化

求めたネットワークの最小コスト最大流から、以下のようにして三角格子表現  $T$  を求める。

- ・  $T(F)$  における要素  $e_r$  は入力として与えられた  $P(F)$  の  $e_r$  をそのまま用いる。
- ・  $s_r$  は、領域  $F$  と  $e_r$  を共有する領域  $F'$  について、 $node(F)$  から  $node(F')$  への流量  $\phi(node(F), node(F'))$  と  $node(F')$  から  $node(F)$  への流量  $\phi(node(F'), node(F))$  から以下のように決定する。

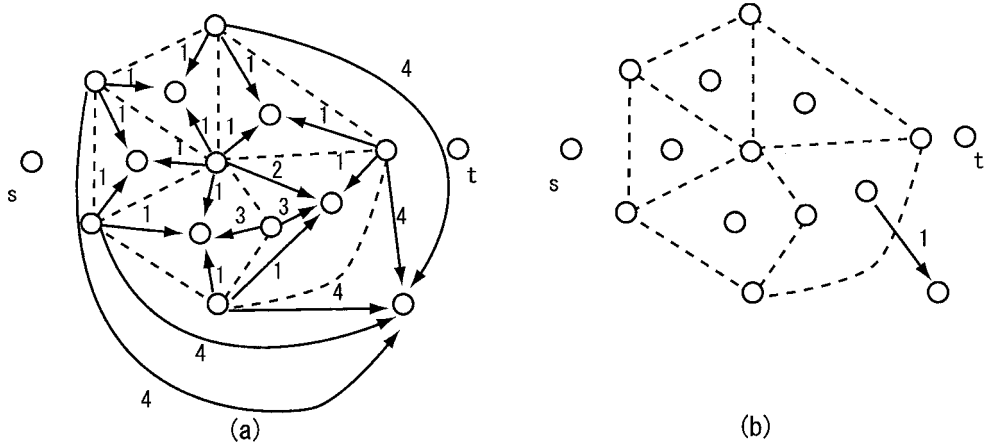


図4 最小コスト最大流 (a) 頂点ノードから領域ノードへの流量 (b) 領域ノードから領域ノードへの流量

領域  $F$  と領域  $F'$  が  $(e_1, e_2, \dots, e_i)$  の  $i$  本の辺を共有する時、 $T(F)$  において  $e_r = e_1$  となる  $r$  の  $s_r$  は、 $1^x$  を  $1$  が  $x$  個並ぶ数列、 $2^x, -1^x, -2^x$  がそれぞれ  $2, -1, -2$  が  $x$  個並ぶ数列を意味するとすると、

$$s_r = 2^{\phi(\text{node}(F), \text{node}(F'))/2} \cdot 1^{\phi(\text{node}(F), \text{node}(F')) \bmod 2} \cdot (-1)^{\phi(\text{node}(F'), \text{node}(F)) \bmod 2} \cdot 2^{\phi(\text{node}(F'), \text{node}(F))/2}$$

同様に  $T(F')$  において  $e_{r'} = e_1$  となる要素の  $s_{r'}$  は、

$$s_{r'} = 2^{\phi(\text{node}(F'), \text{node}(F))/2} \cdot 1^{\phi(\text{node}(F'), \text{node}(F)) \bmod 2} \cdot (-1)^{\phi(\text{node}(F), \text{node}(F')) \bmod 2} \cdot 2^{\phi(\text{node}(F), \text{node}(F'))/2}$$

$e_1$  以外の共有辺  $(e_2, \dots, e_i)$  に関しては、 $\varepsilon$  とする。

・  $a_r$  は、領域  $F$  内の頂点で  $e_r$  と  $e_{r'}$  が共に接続する頂点である  $v$  に対応したノード  $\text{node}(v)$  から、 $\text{node}(F)$  への流量に  $60$  をかけた値である。

図4から求める  $G$  の三角格子表現  $T$  は以下のようになり、それを描画すると図5のようになる。

$$T(F_1) = \{(e_1, \varepsilon, 60), (e_6, \varepsilon, 60), (e_{11}, \varepsilon, 60)\}$$

$$T(F_2) = \{(e_2, \varepsilon, 60), (e_7, \varepsilon, 60), (e_6, \varepsilon, 60)\}$$

$$T(F_3) = \{(e_3, 1, 60), (e_9, \varepsilon, 180), (e_8, \varepsilon, 120), (e_7, \varepsilon, 60)\}$$

$$T(F_4) = \{(e_8, \varepsilon, 180), (e_9, \varepsilon, 60), (e_4, \varepsilon, 60), (e_{10}, \varepsilon, 60)\}$$

$$T(F_5) = \{(e_{10}, \varepsilon, 60), (e_5, \varepsilon, 160), (e_{11}, \varepsilon, 60)\}$$

$$T(F_6) = \{(e_1, \varepsilon, 240), (e_5, \varepsilon, 240), (e_4, \varepsilon, 240), (e_3, -1, 240), (e_2, \varepsilon, 240)\}$$

## 4. 証明

本研究の土台となった論文 ([1]) では、同様にして求めた結果でベンド数最小な直交描画が可能であることの証明がされている。本研究でも同様の流れで証明をこころみたが、完全な証明には至らなかった。その結果についてここで述べる。

### 4.1 三角格子表現の正当性

前述の直交描画に関する論文において、以下の4つの条件が、直交表現  $R$  がグラフ  $G$  の直交表

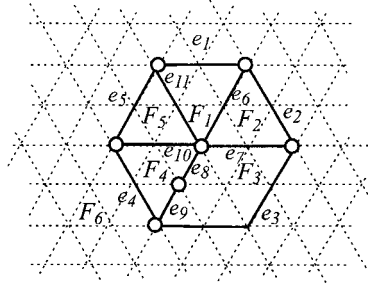


図5 図4のネットワークから求めた三角格子描画

現であることの必要十分条件であることが示されている。尚、直交表現  $R$  は三角格子表現  $T$  と同じように各領域のベンド記述について記した巡回リストの集合である。直交表現ではベンドは右に  $90^\circ$  か左に  $90^\circ$  の2つであり、 $s_r$  では右に  $90^\circ$  のベンドを0, 左に  $90^\circ$  のベンドを1で表している。

- p1. 平面グラフ  $G$  の平面表現と  $R$  の各要素の  $e_r$  が等しい。
- p2.  $R$  上の  $e_r = e_{r'}$  となるような  $r$  と  $r'$  において、文字列  $s_{r'}$  は  $s_r$  を反転し逆転したものと等しい。
- p3.  $R$  の各要素  $r$  において, rotation  $\rho(r)$  を以下のように定義する：

$$\rho(r) = |s_r|_0 - |s_r|_1 + (2 - a_r/90)$$

$|s_r|_0$  は  $s_r$  上の0の数,  $|s_r|_1$  は  $s_r$  上の1の数である。この時、各領域の  $R(F)$  において、各要素  $r$  の  $\rho(r)$  の合計値が内領域なら +4, 外領域なら -4 である。

- p4.  $G$  の各頂点  $v$  において,  $R$  の要素  $a_r$  から得られる  $v$  の周囲で成される角の合計が  $360$  である。

この条件を三角格子の場合にあてはめてみると, p1 と p4 はそのまま, p2 と p3 に関しては、以下のようになると考えられる。

- p2.  $R$  上の  $e_r = e_{r'}$  となるような  $r$  と  $r'$  において、文字列  $s_{r'}$  は  $s_r$  の符号を反転し逆転したものと等しい。
- p3.  $R$  の各要素  $r$  において, rotation  $\rho(r)$  を以下のように定義する：

$$\rho(r) = |s_r|_1 + |s_r|_2 - |s_r|_{-1} - |s_r|_{-2} + (3 - a_r/60)$$

この時、各領域の  $R(F)$  において、各要素  $r$  の  $\rho(r)$  の合計値が内領域なら +6, 外領域なら -6 である。

しかし、以下の三角格子表現  $T$  は前述の条件 p1~p4 を満たすが実際に描画すると図6に示すように辺  $e_{12}$  と頂点  $v$  が重なりあってしまい、平面描画として適切なものではないことがわかる。

$$T(F_1) = \{(e_1, \epsilon, 60), (e_2, \epsilon, 60), (e_3, \epsilon, 60)\}$$

$$\begin{aligned}
T(F_2) &= \{(e_3, \epsilon, 60), (e_4, \epsilon, 60), (e_5, \epsilon, 60)\} \\
T(F_3) &= \{(e_5, \epsilon, 60), (e_6, \epsilon, 60), (e_7, \epsilon, 60)\} \\
T(F_4) &= \{(e_7, \epsilon, 60), (e_8, \epsilon, 60), (e_9, \epsilon, 60)\} \\
T(F_5) &= \{(e_9, \epsilon, 60), (e_{10}, \epsilon, 60), (e_{11}, \epsilon, 60)\} \\
T(F_6) &= \{(e_1, \epsilon, 60), (e_{11}, \epsilon, 60), (e_{12}, 2, 60), (e_2, \epsilon, 300), \} \\
T(F_7) &= \{(e_{10}, \epsilon, 240), (e_8, \epsilon, 240), (e_6, \epsilon, 240), (e_4, \epsilon, 180), (e_{12}, -2, 240)\}
\end{aligned}$$

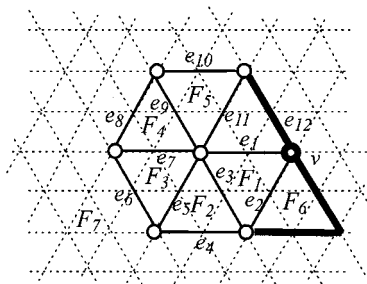


図 6 平面描画出来ない例

三角格子描画においては、以上の条件に加え更に何らかの条件が必要であると思われるが、現段階でその条件については判明していない。しかし、前述のように求めたネットワークには多くの場合、複数の最小コスト最大流が存在するので、他の最小コスト最大流の中に描画可能な表現が存在することが期待できる。

#### 4.2 少ないバンド数であることの証明

最小コスト最大流から得られた三角格子表現が平面描画可能であったとした時、そのバンド数がある程度小さいことを証明する。

総コストが  $COST(\phi)$  の流れから三角格子表現を求めたとき、そのバンド数  $b(T)$  は、バンドが全て左右  $120^\circ$  だった時に最大となり、その値は、

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_F \sum_{r \in R(F)} |s_r| \\
&= \sum_{F, F'} (\phi(\text{node}(F), \text{node}(F')) + \phi(\text{node}(F'), \text{node}(F))) \\
&= \sum_{e \in A} c(e) \phi(e) \\
&= COST(\phi)
\end{aligned}$$

である。反対に、バンドが全て左右  $60^\circ$  だった時に  $b(T)$  は最小となり、その値は  $\frac{1}{2}COST(\phi)$  である。従って、最小コスト最大流から求めた描画のバンド数はある程度小さくなり、そのバンド数が  $\frac{1}{2}COST(\phi)$  であれば、それはグラフ  $G$  の平面三角格子におけるバンド数最小なグラフ描画であるといえる。

### 5. 描画アルゴリズム

三角格子表現が入力として与えられた時に、実際に平面三角格子上に描画するアルゴリズムについて簡単に説明する。

まず各領域  $F$  をそれぞれ単独で三角格子上に描画する。この時、領域が平面描画として適切な形で描画されるような各辺の長さを求める必要がある。現時点では、各辺の適切な長さを導く効

率的な手段を見出すことが出来ていないため、適切な組み合わせが見つかるまで全探索している。

次に各辺の領域間での長さの違いを修正する必要がある。  $F_x$  と  $F_y$  が辺  $e_a$  を共有しており、先ほど求めた各領域単独の描画において  $F_x$  では  $e_a$  の長さが2であるのに対し、 $F_y$  では  $e_a$  の長さは1で描かれていたとする。2つの領域を繋ぎ合わせて描画する為には、 $F_y$  での  $e_a$  の長さを2にする必要がある。このように領域内のある辺  $e$  を伸ばす場合、以下のように処理を行う。

領域  $F$  内には、「辺  $e$  に対し  $360^\circ$  方向、つまり反対に進む辺」かあるいは「辺  $e$  に対し  $60^\circ$  方向に進む辺と  $300^\circ$  方向に進む辺」の少なくともどちらか一方は必ず存在している。このような辺を辺  $e$  が伸びるのと同じだけ伸ばしてやれば、領域は適切な形を保つことができる。条件を満たす辺が複数存在しているときは、より外領域に近い辺を対象とする。

以上の処理を繰り返し、各辺での領域間での長さの違いが無くなれば、各領域を繋ぎ合わせ平面三角格子上に描画することができる。

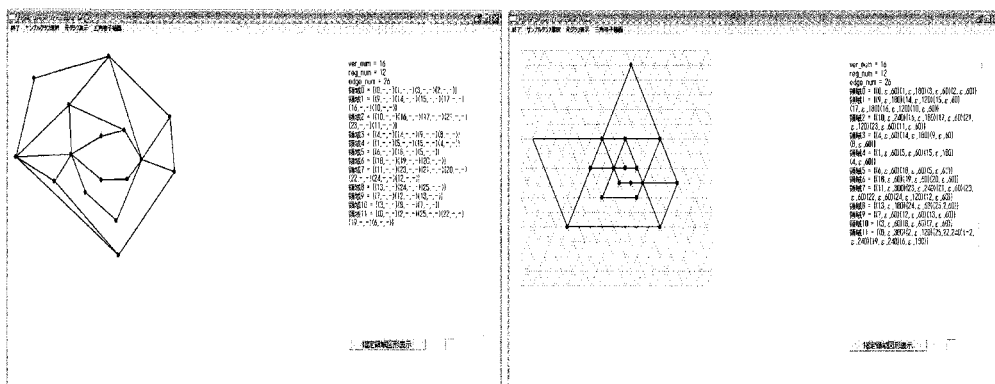


図7 最大次数6の平面連結グラフ  $G$  とその平面三角格子上的描画

## 6. まとめ

バンド数最小な直交描画を求める手法を基に、三角格子においてバンド数がある程度少ない描画を求める手法を提案した。しかし証明等いくつかの部分が未解決である為、これらの問題を解決することが当面の課題である。また本手法で求めた描画は、バンド数は少ないものの使用する格子数が大きくなる場合が多く見られる為、バンド数と格子数が共に少なくなるような手法についても研究を行いたい。

## 文 献

- [1] R.Tamassia,, On embedding a graph in the grid with the minimum number of bends, *SIAM J. Comput.*, 16(3) (1987), pp. 421–444.
- [2] A.Garg and R.Tamassia, A new minimum cost flow algorithm with applications to graph drawing, *Proc. of Graph Drawing '96, LNCS, Springer*, 1190, (1997) pp.201-216.
- [3] T. Nishizeki and M.S. Rahman, Planar Graph Drawing, World Scientific (2004)
- [4] M.S. Rahman and T. Nishizeki, Bend-minimum orthogonal drawings of plane 3-graphs, *Proc. International Workshop on on Graph Theoretic Concepts in Computer Science (WG'02), LNCS, Springer*, 2573 (2002) pp.367–378.
- [5] M.S. Rahman, T. Nishizeki and M. Niznin, Orthogonal drawings of plane graph without bends, *J. of Graph Alg. and Appl.* 7(4) (2002) pp.121-138.