最大クリークを抽出する $O(2^{0.19171n})$-時間の多項式領域アルゴリズム

中西裕陽, 富田悦次

電気通信大学大学院 電気通信学研究科 情報通信工学専攻
〒 182-8585 東京都調布市調布ヶ丘 1-5-1
E-mail: {hironaka, tomita}@ice.uec.ac.jp

あらまし. 節点数 n のグラフの最大クリーク抽出問題に対する多項式領域アルゴリズムの時間計算量は, Tarjan-Trojanowsky(1977) の $O(2^{0.333n})$ から Fomin ら (2006) の $O(2^{0.288n})$ に至るまで, この間約 30 年かけての着実な改良が進められてきた. 本稿では, 既に発表している Shindo-Tomita(1990) のアルゴリズムを基にして. これを更に顕著に改良した $O(2^{0.19171n})$-時間計算量の解析結果を与える. これは, 極大クリーク全列挙のための Tomita ら (2006) の最適時間計算量 $O(3^{n/3}) = (2^{0.528n})$ に対する明らかな改良となっている.

An $O(2^{0.19171n})$-time and Polynomial-space Algorithm for Finding a Maximum Clique

Hiroaki Nakanishi, Etsuji Tomita
Department of Information and Communication Engineering,
Graduate School of Electro-Communications, The University of Electro-Communications
Chofugaoka 1-5-1, Chofu, Tokyo 182-8585, Japan
E-mail: {hironaka, tomita}@ice.uec.ac.jp

Abstract. Steady improvements have been made for the time complexity for finding a maximum clique in an n-vertex graph in polynomial-space from $O(2^{0.333n})$ by Tarjan-Trojanowsky(1977) to $O(2^{0.288n})$ by Fomin *et al.*(2006) in the last almost 30 years. We remarkably improve this complexity to have $O(2^{0.19171n})$-time based on an algorithm by Shindo-Tomita(1990). This is an obvious improvement of the optimal time complexity of $O(3^{n/3}) = (2^{0.528n})$ for generating all maximal cliques of Tomita *et al.*(2006).

1 はじめに

無向グラフ中の最大クリークを抽出する問題は理論, 応用の両面で重要な問題であり, 理論と実験の双方から様々な研究がなされている [1]-[15]. 計算量理論の視点から見れば, この問題は自明な計算量が $O(P(n)2^n)$ (n はグラフの節点数, $P(n)$ は n の適当な多項式) という解決困難な問題である. この時間計算量はまず Tarjan ら [1] によって改善され, これに Robson[3] が続き, 筆者ら以外による現在の多項式領域での最良結果は $O(2^{0.288n})$[8] となっている (詳細は表 1.1 および 1.2 を参照).

一方, Tomita らは極大クリークを全列挙する $O(3^{n/3}) = (2^{0.528n})$-時間アルゴリズムを発表しているが [9], これを最大クリーク 1 個だけと出力を限定することにより, 当然この計算量は大きく軽減できる.

表 1.1 時間計算量改良の主要結果 (多項式計算領域)

Author(s)	時間計算量
Tarjan-Trojanowski(1977)[1]	$O(2^{0.333n})$
Jian(1986)[2]	$O(2^{0.304n})$
Robson(1986)[3]	$O(2^{0.298n})$
Beigel(1999)[5]	$O(2^{0.2904n})$
Fomin *et al.*(2006)[8]	$O(2^{0.288n})$
中西, 富田 (2007)[13]	$O(2^{0.19669n})$

表 1.2 時間計算量改良の主要結果 (指数計算領域)

Author	時間計算量
Robson(1986)[3]	$O(2^{0.276n})$
Robson(2001)[6]	$O(2^{0.24951n})$

これに従い, 筆者らは Shindo-Tomita のアルゴリズム MAXCLIQUE[4] を基として, $O(2^{0.24945n})$-時間の多項式領域アルゴリズムと新しい解析手法を確立して先に発表した [12]. また [13] において筆者らはこの

結果を更に改善し，同アルゴリズムが $O(2^{0.19669n})$-時間計算量となる事を示した．
本稿では，[12] の手法による計算量解析の直接的改善の限界点として，これが $O(2^{0.19171n})$-時間計算量となることを示す．

2 諸定義と記法

本稿は [11], [12], および [13] に直接基づくものであり，諸定義および記法については [11] を参照頂きたい．

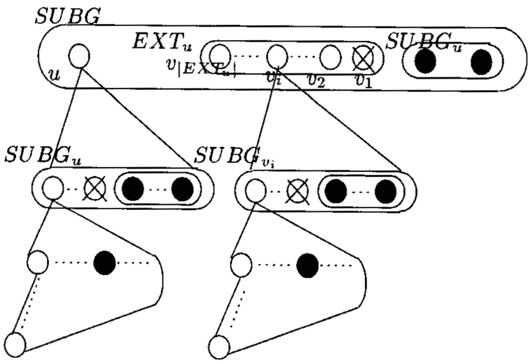
3 アルゴリズム

アルゴリズム MAXCLIQUE を以下に示す．このアルゴリズムは，基本となる処理である深さ優先探索 EXPAND に，部分森の同一化と次数による限定操作 [4] を追加した分枝限定アルゴリズムであり，その探索過程は図 1 に示すような深さ優先探索木の集合 (クリーク探索森とよぶ) として表現することができる．

追加された限定操作の部分を除けば，このアルゴリズムは極大クリーク全列挙アルゴリズム CLIQUES[9] と全く同一である．[9] において，CLIQUES が極大クリーク全列挙に要する時間計算量が $O(3^{n/3}) = O(2^{0.528n})$ であることが示されたが，これを MAXCLIQUE に変更するため，追加された処理はいずれも高々 $O(n^2)$ の処理であるので，CLIQUES の上界は MAXCLIQUE の上界ともなっている．即ち本稿の結果は，CLIQUES を最大クリーク抽出に特化して変更した場合，極大クリーク抽出に要する $O(2^{0.528n})$-時間計算量がどこまで改善できるかを示したものと言うことができる．

procedure MAXCLIQUE(G)
begin
  $Q := \emptyset$;
  $Qmax := \emptyset$;
  EXPAND(V)
end {of MAXCLIQUE}
  procedure EXPAND($SUBG$)
  begin
   if $SUBG = \emptyset$ **then**
   if $|Q| > |Qmax|$
    then $Qmax := Q$ **fi**
   else u :=a vertex in $SUBG$
      that maximizes $|SUBG \cap \Gamma(u)|$;
    $Q := Q \cup \{u\}$;
    $SUBG_u := \Gamma(u) \cap SUBG$;
    if $|Q| + |SUBG_u| > |Qmax|$ **then**
    EXPAND($SUBG_u$) **fi**
    $Q := Q - \{u\}$;
    $EXT_u := SUBG - \{u\} - SUBG_u$;
    sort vertices in EXT_u in a
    decreasing order w.r.t their degrees ;
    for $i := |EXT_u|$ **downto** 2 **do**
     $v_i := EXT_u[1]$;
     $\overline{U}_i := \Gamma(v_i) \cap EXT_u$;
     $SUBG_{v_i} := \overline{U}_i \cup (\Gamma(v_i) \cap SUBG_u)$;
     if $|Q| + |SUBG_{v_i}| + 1 > |Qmax|$ **then**
      $Q := Q \cup \{v_i\}$;
      EXPAND($SUBG_{v_i}$)
      $Q := Q - \{v_i\}$
      $EXT_u := EXT_u - \{v_i\}$ **fi**
      $EXT_u[1]$:=a vertex with maximum degree
        in EXT_u;
    else $i := 1$; **od**
  end {of EXPAND}

アルゴリズム MAXCLIQUE



⊗:EXT_u 中最後尾 (常に探索されない節点)

●: 部分森の同一化により探索を行わない節点

図 1 クリーク探索森

4 計算量評価

MAXCLIQUE の領域計算量が多項式オーダーとなることは明らかであるので，ここでの証明は略す．

ここでは，時間計算量が $O(2^{0.19171n})$ となることを証明する．まず計算量評価に用いる各記号については，[11] と同様に定義する．
ただし計算量評価上重要となる (T1) 式については，ここに改めて示しておく．

$$t(n) \le t_a(|SUBG_u|) + \sum_{i=2}^{|EXT_u|} t_b(|SUBG_{v_i}|) + Cn^2 \quad \cdots \text{(T1)}$$

$t_a(|SUBG_u|)$, $t_b(|SUBG_{v_i}|)$ $(2 \le i \le |EXT_u|)$ は各部分問題の計算量の上界を表す記号である.

あるグラフが与えられたとき, MAXCLIQUE は常にそのグラフに対して固有のクリーク探索森を形成する. すなわち MAXCLIQUE の計算量上界とはそのようなクリーク探索森を形成するために必要な計算量の上界であると言うことができる. 与えられたグラフによって計算量は異なるため, アルゴリズムの性能を評価するにあたってはグラフの難しさの評価基準を導入する必要がある. 本稿では [11], [12] および [13] に続き, この難しさの基準としてグラフの最大次数に着目している.

[11] に示されているように, グラフの最大次数をある定数とすれば, 部分問題の計算量 $t_a(|SUBG_u|)$ および $t_b(|SUBG_{v_i}|)$ $(2 \le i \le |EXT_u|)$ は (T1) 式の定数 C を用いてそれぞれ

$$t_a(|SUBG_u|) \le (\text{定数}) \cdot Cn^2$$

$$t_b(|SUBG_{v_i}|) \le (\text{定数}) \cdot Cn^2$$

という上界をもつ. 即ち (T1) 式を用いれば全体の計算量上界 $t(n)$ は

$$\begin{aligned} t(n) &\le t_a(|SUBG_u|) + \sum_{i=2}^{|EXT_u|} t_b(|SUBG_{v_i}|) + Cn^2 \\ &\le (n-1)t_a(|SUBG_u|) + Cn^2 \\ &\le n \cdot (\text{定数}) \cdot Cn^2 = (\text{定数}) \cdot Cn^3 \end{aligned}$$

である. 例えば

$$ta(|SUBG_u|) \le Cn \le 1 \cdot Cn^2 \text{ (最大次数 0)[11]}$$

$$ta(|SUBG_u|) \le 2Cn \le 2 \cdot Cn^2 \text{ (最大次数 1)[11]}$$

となる. ここで (定数) は最大次数を増加させるに従って増加していくから, 一般に最大次数 Δ をパラメーターとして, $t(n)$ に上界を与えるという事は, C_1 をある定数として

$$t(n) \le C_1 \cdot g(\Delta) n^3$$

を成立させるような Δ をパラメーターとする関数 $g(\Delta)$ を決定することである. これは即ち Δ を定数として考えれば $t(n)$ は $O(n^3)$ と見ることができるという事を示している [11].

本問題の NP 困難性から, $g(\Delta)$ は指数関数的である事が強く予想される. 実際 MAXCLIQUE においても, 適当な定数 C_0 を用いて

$$g(\Delta) \le C_0 2^{\Delta}$$

であることは, 上記 (T1) 式を利用して容易に示される. ((T1) 式の性質について, 詳細は解析中に述べるのでここでは省略するが, MAXCLIQUE の計算量を決定するにあたっては, 線形関数と指数関数との比が重要になる. $g(\Delta) \le C_0 2^{\Delta}$ においては $x \in R$ で $2^x > x$ であり, この値が十分小さくなることから, 上界の成立が示せる.)

ここで本稿に示されている結果のように, 一般に $0 < c < 1$ なる定数 c において, $x_0 < x$ に対し $2^{cx} > x$ となるような x_0 は必ず存在するので, 最終結果 $g(\Delta) = O(2^{0.1917\Delta})$ を示すにあたって, ここでは以降に示すように

1. 最大次数をある上限内の定数とし, 各場合について計算量上界を決定する.
2. 1. から一般の結果を仮定し, その成立を示す.

という方法をとる. 即ち最大次数に関する数学的帰納法によって $g(\Delta)$ を決定する. このとき帰納法の基底となる, 具体的解析を行う最大次数の上限値は, 定数 c によって決定される上記 x_0 の値によって定まる. 本稿と [12] および [13] との大きな違いは具体的解析の場合の増加にあり, これは本稿での解析手法は, 具体的解析の詳細さによって結果となる一般計算量が影響を受けるものである事を示している.

また本稿および [12] および [13] では, 解析上の必要に応じて大枠の計算量上界を与える式 (T3) を導入しており, 本稿の結果はこの上界が成立する範囲で c が最小となるものである. この意味で本結果は [12] の直接的な計算量改善の結果としては限界点となっている.

ここに述べたように, (T1) 式を用いれば, 部分問題の計算量の上界から全体の上界は容易に決定されるので, 以下では部分問題についてその計算量上界を示していく.

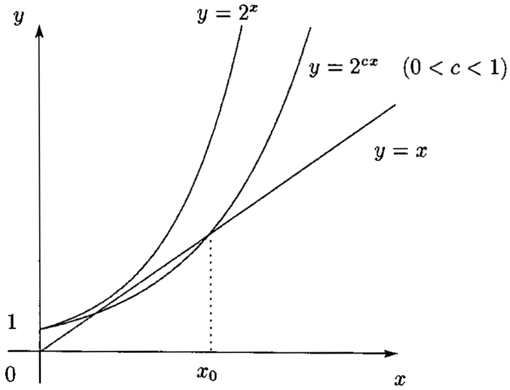


図 2　$y = x$, $y = 2^x$ と $y = 2^{cx}$

まず帰納法の基底として, $0 \le \Delta \le 24$ の各場合についての具体的解析の結果として, 次の命題を与え, その成立を示す.

[命題 1] グラフの最大次数を Δ とするとき, もし $0 \le \Delta \le 24$ であるならば

$$t_a(|SUBG_u|) \le 1366Cn^2 = C_1 n^2 \ (C_1 = 1366C)$$

が成り立つ.

(証明) 以下の (0)～(24) による. ただし $0 \le \Delta \le 23$ の場合においては [11], [12] および [13] において既に解析を行っているので, その詳細についてここでは省略し, 以降の解析に用いる結果のみを示す.

(0)$ta(|SUBG_u|) \le Cn$
(1)$ta(|SUBG_u|) \le 2Cn$
(2)$ta(|SUBG_u|) \le Cn^2 + 2Cn = P_{2-1}(n)$
(3)$ta(|SUBG_u|) \le 2Cn^2 + 2Cn = P_{3-2-1}(n)$
(4)$ta(|SUBG_u|) \le 3Cn^2 + 2Cn = P_{4-3-2-1}(n)$
(5)$t_a(|SUBG_u|) \le 4Cn^2 + 2Cn = P_{5-4}(n)$
(6)$t_a(|SUBG_u|) \le 5Cn^2 + 2Cn = P_{6-5}(n)$
(7)$t_a(|SUBG_u|) \le 6Cn^2 + 2Cn = P_{7-6}(n)$
(8)$t_a(|SUBG_u|) \le 7Cn^2 + 4Cn = P_{8-4}(n)$
(9)$t_a(|SUBG_u|) \le 13Cn^2 + 6Cn = P_{9-5}(n)$
(10)$t_a(|SUBG_u|) \le 17Cn^2 + 8Cn = P_{10-5}(n)$
(11)$t_a(|SUBG_u|) \le 21Cn^2 + 10Cn = P_{11-5}(n)$
(12)$t_a(|SUBG_u|) \le 26Cn^2 + 12Cn = P_{12-9}(n)$
(13)$t_a(|SUBG_u|) \le 40Cn^2 + 18Cn = P_{13-9}(n)$
(14)$t_a(|SUBG_u|) \le 53Cn^2 + 24Cn = P_{14-9}(n)$
(15)$t_a(|SUBG_u|) \le 68Cn^2 + 30Cn = P_{15-10}(n)$
(16)$t_a(|SUBG_u|) \le 86Cn^2 + 40Cn = P_{16-10}(n)$
(17)$t_a(|SUBG_u|) \le 121Cn^2 + 54Cn = P_{17-13}(n)$
(18)$t_a(|SUBG_u|) \le P_{18-13}(n) = 161Cn^2 + 72Cn$
(19)$t_a(|SUBG_u|) \le P_{19-14}(n) = 213Cn^2 + 96Cn$
(20)$t_a(|SUBG_u|) \le P_{20-15}(n) = 273Cn^2 + 128Cn$
(21)$t_a(|SUBG_u|) \le P_{21-17}(n) = 364Cn^2 + 162Cn$
(22)$t_a(|SUBG_u|) \le P_{22-17}(n) = 485Cn^2 + 216Cn$
(23)$t_a(|SUBG_u|) \le P_{23-18}(n) = 645Cn^2 + 288Cn$

ここで最大次数を Δ とするとき, 場合 (Δ-Δ_1-Δ_2-$\cdots$) は, 次数 Δ の節点の子節点の最大次数が Δ_1, さらにその子節点の最大次数が Δ_2, $\cdots$ である場合を表すものとし, n の多項式 $P_{\Delta-\Delta_1-\Delta_2-\cdots}(n)$ はそのような場合の計算量の上界を表す式とする. (以下に (4-3-2-0) および (4-3-2-1) を図示する.)

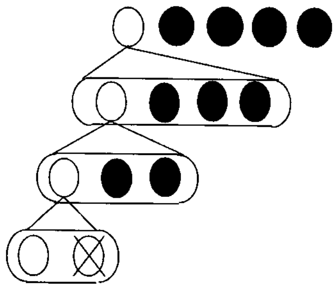


図 3 場合 (4-3-2-0)

これはグラフの最大次数を 4 としたとき, その子節点の最大次数が 3, その子節点の最大次数が 2, 更にその子節点の次数が 0 の場合における MAXCLIQUE のクリーク探索森を表した図である.

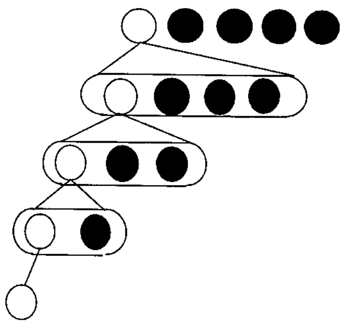


図 4 場合 (4-3-2-1)

場合 (4-3-2-1) は, グラフの最大次数が 4 の場合, 計算量が最大となる場合である. これらの例のように, 具体的解析の過程は最大次数を定めて, そこから得られる可能な探索森のうちで計算量が最大となるものを決定していく作業となっている.

本稿では (0)～(23) に加えて次の $\Delta = 24$ なる場合について解析を行うことで, [命題 1] が成立することを示す.

(24)

(24-0), (24-1) これらの場合は [12] 中の [補題 0.1] により, 計算量の上界とは成り得ないので, 記述は省略する.

(24-2)
$t_a(|SUBG_u|) \le 22Cn^2 + 22Cn$

(24-3)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 20P_{3-2-1}(n) + Cn^2$
$= 41Cn^2 + 40Cn$

(24-4)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 19P_{4-3-2-1}(n) + Cn^2$
$= 58Cn^2 + 38Cn$

(24-5)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 18P_{5-4}(n) + Cn^2$
$= 43Cn^2 + 36Cn$

(24-6)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 17P_{6-5}(n) + Cn^2$
$= 86Cn^2 + 34Cn$

(24-7)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 16P_{7-6}(n) + Cn^2$
$= 97Cn^2 + 32Cn$

(24-8)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 15P_{8-4}(n) + Cn^2$
$= 106Cn^2 + 60Cn$

(24-9)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 14P_{9-5}(n) + Cn^2$
$= 183Cn^2 + 84Cn$

(24-10)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 13P_{10-5}(n) + Cn^2$
$= 222Cn^2 + 104Cn$

(24-11)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 12P_{11-5}(n) + Cn^2$
$= 253Cn^2 + 120Cn$

(24-12)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 11P_{12-9}(n) + Cn^2$
$= 287Cn^2 + 132Cn$

(24-13)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 10P_{13-9}(n) + Cn^2$
$= 401Cn^2 + 180Cn$

(24-14)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 9P_{14-9}(n) + Cn^2$
$= 478Cn^2 + 216Cn$

(24-15)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 8P_{15-10}(n) + Cn^2$
$= 545Cn^2 + 254Cn$

(24-16)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 7P_{16-10}(n) + Cn^2$
$= 603Cn^2 + 280Cn$

(24-17)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 6P_{17-13}(n) + Cn^2$
$= 727Cn^2 + 324Cn$

(24-18)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 5P_{18-13}(n) + Cn^2$
$= 1006Cn^2 + 360Cn$
($P_{24-18}(n) = 1006Cn^2 + 360Cn$ とおく．)

(24-19)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 4P_{19-14}(n) + Cn^2$
$= 853Cn^2 + 384Cn$

(24-20)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 3P_{20-15}(n) + Cn^2$
$= 820Cn^2 + 384Cn$

(24-21)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 2P_{21-17}(n) + Cn^2$
$= 729Cn^2 + 324Cn$

(24-22), (24-23)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 486Cn^2 + 216Cn$ ((24-22) の場合)
$t_a(|SUBG_u|) \leq 646Cn^2 + 288Cn$ ((24-23) の場合)

以上から，グラフの最大次数が 24 であれば
$t_a(|SUBG_u|) \leq 1006Cn^2 + 360Cn \leq 1366Cn^2$

である．**(証明終)**

[命題 1] によって，$0 \leq \Delta \leq 24$ においての計算量の上界を示してきたが，これを一般化して次の補題を示し，MAXCLIQUE の部分問題について時間計算量の上界を与える．

[**補題 1.1**] グラフの最大次数を Δ とするとき, $\Delta < n$ をみたす任意の Δ に対して定数 $C_1 = 1366C$ としたとき

$t_a(|SUBG_u|) \leq C_1 2^{0.1917\Delta} n^2$
が成立する.

(証明) 証明は最大次数 Δ に関する帰納法による.
いま定数 C_1 を
$C_1 = 1366C$
によって定義すると, グラフの最大次数を Δ とするとき, もし $\Delta \leq 24$ であれば, [命題 1] によって $\Delta < n$ をみたす任意の n に対して

$t_a(|SUBG_u|) \leq C_1 n^2$
$\leq C_1 2^{0.1917\Delta} n^2$
が成立する.

一般に節点数 n であるグラフの最大次数が $\Delta \geq 24$ であるとき

$t_a(|SUBG_u|) \leq C_1 2^{0.1917\Delta} n^2$
が成立すると仮定する. この仮定のもとで, 節点数 n, 最大次数 $\Delta + 1$ であるグラフについて, 最大次数節点 u の隣接部分の計算に要する手数を考える.

この節点の子節点の最大次数は Δ 以下であるから, そのような最大次数子節点の次数を $\Delta - \Delta'(0 \leq \Delta' \leq \Delta)$ とおく.

(i)$\Delta - \Delta' < 24$ の場合:
(T1) 式, および [命題 1] により

$t_a(|SUBG_u|) \leq 23 \cdot C_1 n^2$
$\leq C_1 \cdot 24 n^2$
$\leq C_1 2^{0.1917 \cdot 24} n^2$
$\leq C_1 2^{0.1917(\Delta+1)} n^2$

であるから, 題意は成立する.

(ii)$\Delta - \Delta' \geq 24$ の場合:
以下の 2 通りの場合に分ける.

(ii-i)$\Delta' \geq 24$ の場合;
(T1) 式により

$$t_a(|SUBG_u|) \leq ((\Delta+1) - (\Delta - \Delta') - 1) \cdot C_1 2^{0.1917(\Delta-\Delta')} n^2 + C n^2$$

$$= \Delta' C_1 2^{0.1917(\Delta-\Delta')} n^2 + C n^2$$

$$= C_1 2^{0.1917\Delta} \left(\frac{\Delta'}{2^{0.1917\Delta'}} + \frac{1}{1366 \cdot 2^{0.1917\Delta}}\right) n^2$$

$$\leq C_1 2^{0.1917\Delta} \left(\frac{\Delta'}{2^{0.1917\Delta'}} + 0.00005\right) n^2$$

$\Delta' \geq 24$ により, $\Delta' \leq 2^{0.1917\Delta'}$ が成立するから

$t_a(|SUBG_u|) \leq C_1 2^{0.1917\Delta}(1 + 0.00005) n^2$
$= C_1 2^{0.1917\Delta} \cdot 1.00005 n^2$
$\leq C_1 2^{0.1917\Delta} \cdot 2^{0.1917} n^2$
$= C_1 2^{0.1917(\Delta+1)} n^2$
となる.

証明上ここで重要となったのは, 評価式中に登場する比 $\frac{\Delta'}{2^{0.1917\Delta'}}$ の値の大小である. これは MAXCLIQUE の性質を表現した (T1) 式によって導かれる比であり具体的にはこの値が
$\frac{\Delta'}{2^{0.1917\Delta'}} \leq 1$
を満たしていればよいが, 具体的解析を 24 まで行ったことにより, $\Delta' \geq 24$ において条件を満たす (図 5).

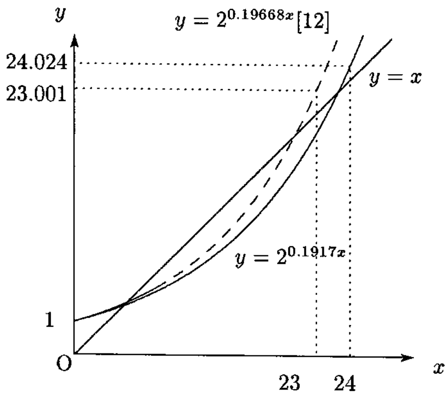


図 5 結果改善に伴う基底の増加

(ii-ii)$0 \leq \Delta' \leq 24$ の場合;
いま最大次数節点 u の子節点中最大次数の節点 u_0 の次数を $\Delta - k$ $(0 \leq k \leq 24)$ とおき,
$SUBG_{u_0} = SUBG_u \cap \Gamma(u_0)$
$EXT_{u_0} = SUBG_u - SUBG_{u_0}$
および
$EXT_{u_0}[i] = v_{0i}$
とそれぞれ定義する. いま帰納法の仮定により

$t_a(|SUBG_{u_0}|) \leq C_1 2^{0.1917(\Delta-k)}$ (T2)
である.

u_0 探索後に, EXT_{u_0} の各節点 ($k-1$ 個存在する) を根とする探索が行われるのであるが, このとき各探索においては u_0 隣接部分の最大クリークサイズが分枝限定条件として与えられる.

この条件のもとに探索が行われると, EXT_{u_0} の各節点の隣接部分中で, 分枝限定が効かずに探索されるのは, 各根節点中の (u_0 中のものより大きな) 最大クリークに属する節点だけである.

ここでその最大クリークは, $SUBG_{u_0}$ の部分集合に EXT_{u_0} の節点を加えた集合中に存在する. よって各 $t_b(|SUBG_{v_{0i}}|)$ は EXT_{u_0} の節点が構成する誘導部分グラフについての計算量によって決定されるが, いま $|EXT_{u_0}| \leq 24$ であるから, $|EXT_{u_0}| = 0, 1, \cdots, 24$ の各場合について $|EXT_{u_0}|$ の隣接関係を調べると, [命題 1] により

$$t_b(|SUBG_{v_i}|) \leq C_1 n^2 + \Delta C n^2 \quad \text{(T3)}$$

が成立する事がわかる. この式の一項目の $C_1 n^2$ は EXT_u 部分の探索に要する手数であり, 二項目は EXT_u に含まれない節点, つまり最大次数節点 u に隣接する各節点の探索に要する手数である.

以上 (T1)〜(T3) の 3 式を用いれば

$$t_a(|SUBG_u|) \leq t_a(|SUBG_{u_0}|) + \sum_{i=2}^{k-1} t_b(|SUBG_{v_{0i}}|) + Cn^2$$

$$\leq C_1 2^{0.1917(\Delta-k)} + (k-1)(C_1 n^2 + \Delta C n^2) + Cn^2$$

$$\leq C_1 2^{0.1917\Delta}\left(\tfrac{1}{2^{0.1917k}} + \tfrac{k-1}{2^{0.1917\Delta}} + \tfrac{k-1}{1366} + \tfrac{1}{1366 \cdot 2^{0.1917 \cdot 23}}\right) n^2$$

$$\leq C_1 2^{0.1917\Delta}\left(\tfrac{1}{2^{0.1917k}} + \tfrac{k-1}{2^{0.1917 \cdot 23}} + \tfrac{k-1}{1366} + 0.00005\right) n^2$$

となる. ここで $0 \leq k \leq 24$ なる範囲内のいずれの k に対しても

$$\tfrac{1}{2^{0.1917k}} + \tfrac{k-1}{2^{0.1917 \cdot 23}} + \tfrac{k-1}{1366} + 0.00005 \leq 1.142$$

が成立する. よって

$$t_a(|SUBG_u|) \leq 1.142 \cdot C_1 2^{0.1917\Delta} n^2$$
$$\leq 2^{0.1917} \cdot C_1 2^{0.1917\Delta} n^2$$
$$= C_1 2^{0.1917(\Delta+1)} n^2$$

であるから, この場合も補題は成立する.

ここでは近似式 (T3) によって題意の成立を確認しているが, これが本稿の結果が [12] の直接的改善の限界点である理由となっている. 即ち指数関数 $2^{c\Delta}$ において $c = 0.1916$ とすると, いま

$$2^{0.1916 \cdot 24} \leq 24.22$$

であるから, 帰納法の基底は $\Delta = 24$ までで十分であるが, ここで上記と同様に

$$\tfrac{1}{2^{0.1916k}} + \tfrac{k-1}{2^{0.1916 \cdot 23}} + \tfrac{k-1}{1366}$$

について $0 \leq k \leq 24$ をそれぞれ確認すると

$$\tfrac{1}{2^{0.1916 \cdot 24}} + \tfrac{23}{2^{0.1916 \cdot 23}} + \tfrac{23}{1366} + 0.00005 > 1.1421$$
$$> 2^{0.1916}$$

となり, 題意は成立しない.

但し上界 (T3) は大枠の上界であるので, この点の改善により本稿の結果も更に改善が可能である.

以上と数学的帰納法により, 一般にグラフ中の最大次数節点を u とするとき, u の次数が Δ であれば

$$t_a(|SUBG_u|) \leq C_1 2^{0.1917\Delta} n^2$$

が成り立つ. **(証明終)**

また, このとき $v_i = EXT[i]$ の次数は Δ 以下であるから, $t_b(|SUBG_{v_i}|)$ に関しても次が成立する.

[補題 1.2] グラフの最大次数を Δ とするとき, $\Delta < n$ をみたす任意の Δ に対して

$$t_b(|SUBG_{v_i}|) \leq C_1 2^{0.1917\Delta} n^2$$

をみたす定数 $C_1 = 1366C$ が存在する. □

証明は [補題 1.1] と全く同様である.

以上から, 全体の計算量の上界について次の補題が成り立つ.

[補題 2] 節点数 n, 最大次数 Δ のグラフ G に対して

$$t(n) \leq C_1 2^{0.1917\Delta} n^3$$

である.

(証明) (T1) 式によって

$$t(n) \leq t_a(|SUBG_u|) + \sum_{i=2}^{|EXT_u|} t_b(|SUBG_{v_i}|) + Cn^2$$

であるから

$$t(n) \leq (n - \Delta - 1) C_1 2^{0.1917\Delta} n^2 + Cn^2$$
$$\leq n \cdot C_1 2^{0.1917\Delta} n^2 = C_1 2^{0.1917\Delta} n^3$$

となる. **(証明終)**

以上を用いて, MAXCLIQUE の計算量が $O(2^{0.19171n})$ であることを示す.

[定理 1]

$t(n) = O(2^{0.19171n})$ である.

(証明) 定数 C_2 を, $C_2 = 1.25 \cdot 10^{17}$ と定義すると, 任意の整数 $n \geq 0$ に対して

$C_2 2^{0.00001n} \geq n^3$

が成立する. いま [補題 2] によって

$t(n) \leq C_1 2^{0.1917\Delta} n^3$

が成立しているから

$t(n) \leq C_1 2^{0.1917(n-1)} n^3$ ($\Delta \leq n-1$ による)

ここで C_2 の設定により

$$
\begin{aligned}
t(n) &\leq C_1 2^{0.1917(n-1)} \cdot C_2 2^{0.00001n} \\
&\leq C_1 C_2 2^{0.19171n} \\
&= C_3 2^{0.19171n} \quad (< C_3 2^{n/5})
\end{aligned}
$$

($C_3 = C_1 C_2$ とおく)

故に, $t(n) = O(2^{0.19171n})$ である. **(証明終)**

5 むすび

最大クリーク抽出問題に対する単純なアルゴリズム MAXCLIQUE を提唱し, その計算量が, 節点数 n のグラフに対して $O(2^{0.19171n})$ であることを示した. この結果は [11] と全く同様な手法を用いた, 直接的な改善としては限界点となっている. ただしこの限界点は証明中の場合分け (ii-ii) における上界 (T3) 式の設定に起因するものであり, この点の改善によって結果はさらに改善可能である. したがって今回の結果は解析手法による限界であり, アルゴリズム自体の限界ではない.

また MAXCLIQUE はこのような理論計算量評価上の優位性とともに, 他の理論計算量評価付きアルゴリズムに比べて実働化が非常に容易なため, 実働上でも優位なアルゴリズムとなっている. 実際に [1] を初めとするアルゴリズムと計算機上で実行速度比較を行った結果, より高速に動作することが知られており [4], また最新の実験結果として, [8] のアルゴリズムと比較しても広範囲において高速に動作することが確認できている. 更に, [10] における手法も導入することにより, 本稿の 理論計算量評価を保ったまま, 実働上の一層の高速化も実現している [15].

謝辞 有益なコメントを頂いた, 京都大学　岩間一雄 教授, 伊藤大雄 准教授および, 本稿アルゴリズム MAXCLIQUE の実験的確認評価に当たって頂いた当研究室卒研生 玉田和洋君に感謝いたします. なお, 本研究は科研費基盤研究 (B), (C) の補助を受けている.

参考文献

[1] R. E. Tarjan, A. E. Trojanowski, " Findig a maximum independent set, " SIAM J. on Computing 6, 537-546 (1977).

[2] T. Jian, An $O(2^{0.304n})$ algorithm for solving maximum independent set problem. IEEE Trans. on Computing 35, 847-851(1986).

[3] J. M. Robson, " Algorithms for maximum independent sets, " J. of Algorithms 7, 425-440 (1986).

[4] M. Shindo, E. Tomita, " A simple algorithm for finding a maximum clique and its worst-case time complexity, " Systems and Conputing in Japan 21, 1-13 (1990).

[5] R. Beigel, " Finding maximum independent sets in sparse and general graphs, " Proc. ACM-SIAM Symp. On Discrete Algorithms, 856-857 (1999).

[6] J. M. Robson, " Finding a maximum independent set in time $O(2^{n/4})$, " Tech. Rep. 1251-01, LaBRI, Universite Bordeaux (2001).

[7] J. Chen, I. A. Kanji, G. Xia, " Labeled search trees and amortized analysis: improved upper bounds for NP-hard problems, " Algorithmica 43, 245-273 (2005).

[8] F. V. Fomin, F. Grandoni, D. Kratsch, " Measure and conquer: A simple $O(2^{0.288n})$ independent set algorithm, " Proc. ACM-SIAM Symp. On Discrete Algorithms, 18-25 (2006).

[9] E. Tomita, A. Tanaka, H. Takahashi, " The worst-case time complexity for generating all maximal cliques and computational experiments, " Theoretical Computer Science 363, 28-42 (2006).

[10] E. Tomita, T. Kameda, "An efficient branch-and-bound algorithm for finding a maximum clique with computational experiments, " J. of Global Optimization 37, 95-111 (2007).

[11] 中西裕陽, 富田悦次, "最大クリークを抽出する単純なアルゴリズムの最大次数 4 のグラフにおける計算量," 信学技報, COMP2007-18, 1-7 (2007).

[12] 中西裕陽, 富田悦次, " 最大クリークを抽出する計算量 $O(2^{0.24945n})$ の多項式領域アルゴリズム" 信学技報, COMP2007-46, 33-40 (2007).

[13] 中西裕陽, 富田悦次, " 最大クリークを抽出する計算量 $O(2^{0.19669n})$ の多項式領域アルゴリズム" 情処研報, 2007-AL-115, 17-24 (2007).

[14] E. Tomita, " The maximum clique problem and its applications (Invited lecture), " IPSJ SIG Thch. Rep., 2007-MPS-67, 21-24 (2007).

[15] 玉田和洋, 富田悦次, 中西裕陽, " 理論評価付き最大クリーク抽出アルゴリズムの実験的評価 " 情処研報, 2007-MPS-67, 25-28 (2007).