

正六角盤面上のあるペンタヘックスに対するアチーブメントゲームの 先手必勝法

野原 勇基[†] 松浦 昭洋^{††}

[†]東京電機大学理工学部情報システム工学科 〒350-0394 埼玉県比企郡鳩山町石坂

E-mail: [†]nohara@matsulab.k.dendai.ac.jp, ^{††}matsu@k.dendai.ac.jp

あらまし ポリオミノアチーブメントゲームは、二人のプレーヤーが盤面上で交互に手を打ち、定められたポリオミノ（生物ともいう）をより早く完成させるゲームである。正六角盤面上のポリオミノアチーブメントゲームでは、これまでセル数5以下のポリオミノに関して、2つのポリオミノL, Iを除き、先手必勝か否か特定されている[1],[7]。本稿では、未解決であった上記2つのうち、ポリオミノLが先手必勝であることを示す。

キーワード ポリオミノ, アチーブメントゲーム, 一般化三並べ, L, 正六角盤面, 必勝法, 勝ち型, 負け型

A Winning Strategy for the Achievement Game of a Certain Pentahex on Hexagonal Boards

Yuuki NOHARA[†] and Akihiro MATSUURA^{††}

[†]Dept. of Computers and Systems Engineering, School of Science and Engineering, Tokyo Denki University

Ishizaka, Hatoyama-cho, Hiki, Saitama, 350-0394 Japan

E-mail: [†]nohara@matsulab.k.dendai.ac.jp, ^{††}matsu@k.dendai.ac.jp

Abstract In polyomino achievement games, two players alternately mark cells of a tessellation and try to achieve a given polyomino (or a creature). On Hexagonal Boards, polyominoes with at most five cells except for polyominoes L and I are shown whether they are achieved by the first player [1], [7]. In this paper, we show a winning strategy for the polyomino L.

Key words polyomino, achievement game, generalized ticktacktoe, L, hexagonal board, winning strategy, winner, loser

1. はじめに

三並べはよく知られる二人ゲームであり、英米ではそれぞれ noughts and crosses, ticktacktoe と呼ばれる。通常の 3×3 の正方盤面上の三並べは、F. Harary によりポリオミノアチーブメントゲームとして一般化され、必勝法が考察された[?]。ポリオミノ（または生物）とは、ボード上の連結したセルの集合であり、ポリオミノアチーブメントゲームにおいては、二人のプレーヤーは交互にセルを取り、与えられたポリオミノを完成させる。各々の手はポリオミノの完成に必ずプラスに働くため、先手が最前手を打つ限り、後手が先手より早くポリオミノを完成させることはできない。そこで、与えられたポリオミノ P について、後手のどのように応手しても先手に P を作る必勝法があるとき、P を勝ち型と呼び、そうでないとき P を負け型と呼ぶ[2]。

正三角盤面上では、3つのポリオミノが勝ち型で、残りは全て負け型であることが知られている[4]。正方盤面上では、“スネーキー (Snaky)” と呼ばれるポリオミノが未解決である他

は、11個のポリオミノが勝ち型で、それ以外は負け型であることが知られている[3],[5],[6],[8]。正六角盤面上では、Bode により、4つ以下のセルから成る全てのポリオミノについて勝ち型か否か特定され、22種類あるセル数5のポリオミノ（5生物）について、15種類が勝ち型で、2種類が負け型であることが示されている[1]。残った5種類のうち、Y, Z, C と呼ばれる3種類のポリオミノが勝ち型であることが最近示された[7]。

本稿では、これまで未解決であった2種類のセル数5のポリオミノL, Iのうち、Lが勝ち型であることを、先手必勝法を構築することにより示す。

2. 準備

あらためて用語を確認する。ポリオミノとは、二次元の盤面上の連結したセルの集合を指す。ポリオミノアチーブメントゲームとは、二人のプレーヤーが盤面に交互に一つのセルをマークし、定められたポリオミノ P をより早く完成させる二人ゲームである。後手のどんな応手に対しても先手が P を完成させることができるとき、P を勝ち型と呼び、そうでないとき、P

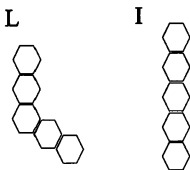


図1 5つのセルから成る未解決ポリオミノ.

を負け型と呼ぶ.

Bodeら[1]は、正六角形のセルからなる盤面上のポリオミノアチーブメントゲームを考察し、5つのセルから成る22種類のポリオミノのうち、17種類について勝ち型か否か特定した。残った5種類のポリオミノのうち、Y, Z, Cは[7]において勝ち型であることが示され、図2の2種類のポリオミノL, Iが未解決問題として残されていた。

次章において、ポリオミノLに対する先手必勝法を構築する。

3. ポリオミノLに対する先手必勝法

3.1 先手の基本的な戦略と必勝手順

本稿では、盤面としてサイズ $m \times m \times m$ の正六角盤面を使用し、先手の手は黒地のセルに白色の数字で、後手の手は白地に黒色の数字と英文字で表すこととする。

ポリオミノLを作るための基本戦略は、図2のようにセルの3連(黒色)を作り、その両端の4方向のセルを取ってリーチをかけていくことである。

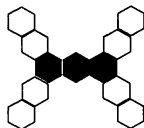


図2 基本戦略.

本戦略を利用した、後に多用する先手の代表的な必勝手順を2つ図3に示す。後手の1, 2手目による場合分けにおける多くのケースで、図3の必勝手順(1), (2)によって先手の勝利を実現する。

3.2 後手の手による場合分け

先手は1手目において、盤面中央のセルを取る。後手の1手目は、盤面の対称性から図4の1*の11通りが考えられる。以下、後手1手目が先手1手目の中央のセルに隣接するか否かによって場合分けを行う。

3.2.1 隣接ケース

後手1手目が中央セルに隣接する場合、先手は2手目で1手目の右上を取る。盤面の対称性より、後手2手目を図5のa~eの5通りに分類し、各々に対し先手必勝手順を構築する。

a~eいずれの場合も、先手3手目は図6の各盤面のように3連ができるセルに打ち、後手3手目はa~e各々3~5通り(3i, 3j, 3k, 3l, 3m等)に場合分けする。ここで2*は、後手の2手目がそのいずれかであることを意味する。2*のセルのうち、実際に後手が打つセル以外のセルが後手3手目に用いられるとき

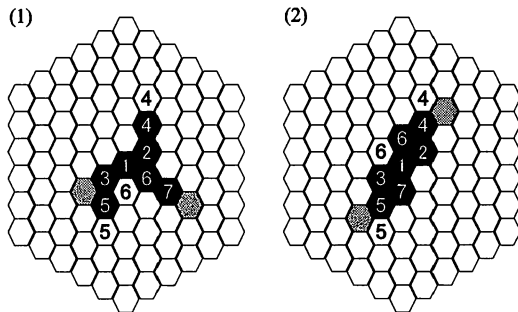


図3 先手の基本的な必勝手順.

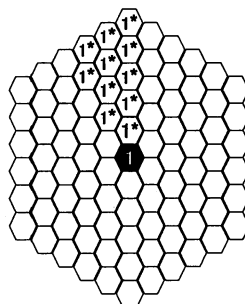


図4 後手1手目(11通り).

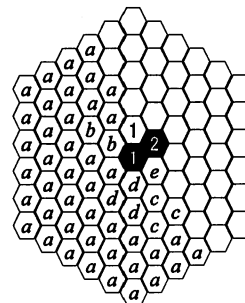


図5 隣接ケースの後手2手目の場合分け(a~e).

は、a~eの全ての場合に、3iが適用される。

a~eについて、後手3手目から先手のL完成までの手順を示したのが図7, 図8である。図7, 8のいずれの盤面においても、二つある灰色のセルのいずれに後手が打つても、残ったもう一つの灰色セルに先手が打つことにより、先手の勝利が確定する。aからdの殆どの3iと3jの場合、図3の必勝戦略が用いられている。一方でeでは、いずれの盤面でも例外的な必勝戦略が用いられている。また、ケースa-3k, a-3l, b-3k, b-3l, c-3k, c-3l, d-3j, d-3k, e-3j, e-3k, e-3l, e-3mにおいては、後手の5, 6手目に5*, 6*等の任意性があるが、後手がそれら以外のセルに打つと、先手がそのうちのある1つのセルに打つことでより早く勝利することができる。

以上より、後手2手目が先手1手目に隣接している場合は、高々12手で先手が勝利する(12手要するのはe-3lとe-3m)。

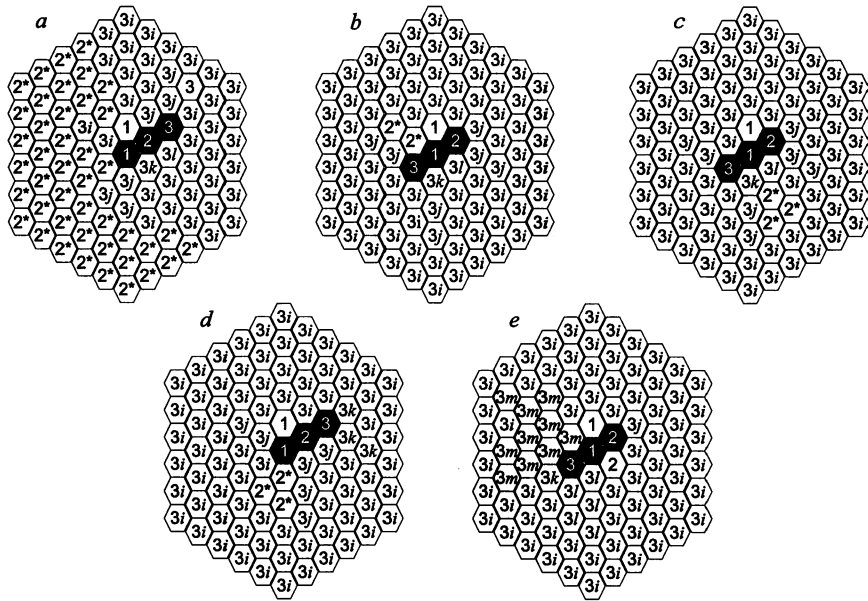


図6 後手2手目 a~e に対する後手3手目の場合分け。

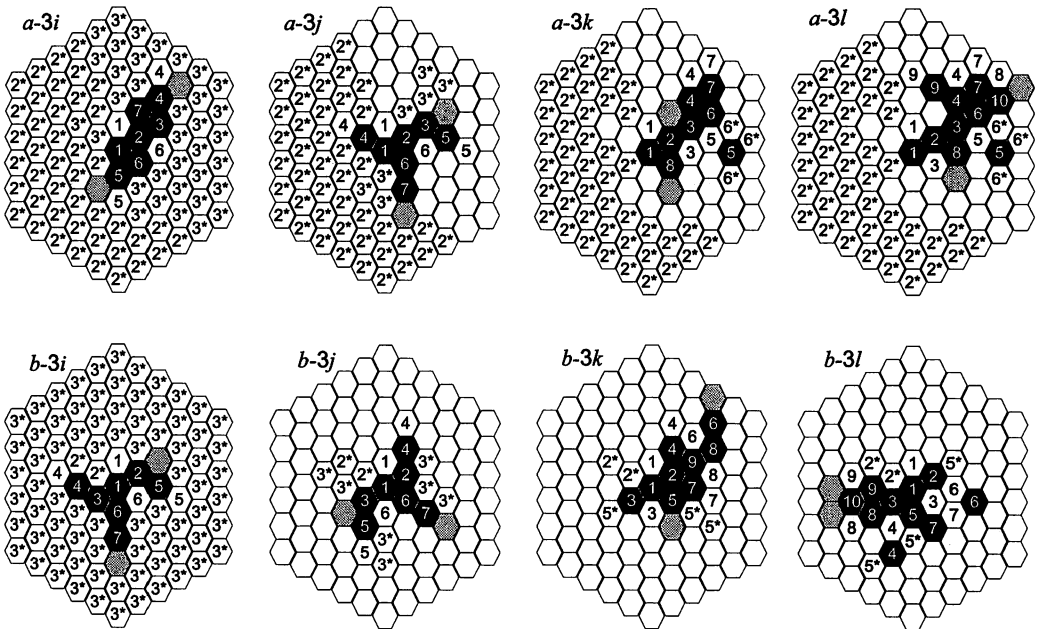


図7 後手2手目 a, b に対する先手必勝手順。

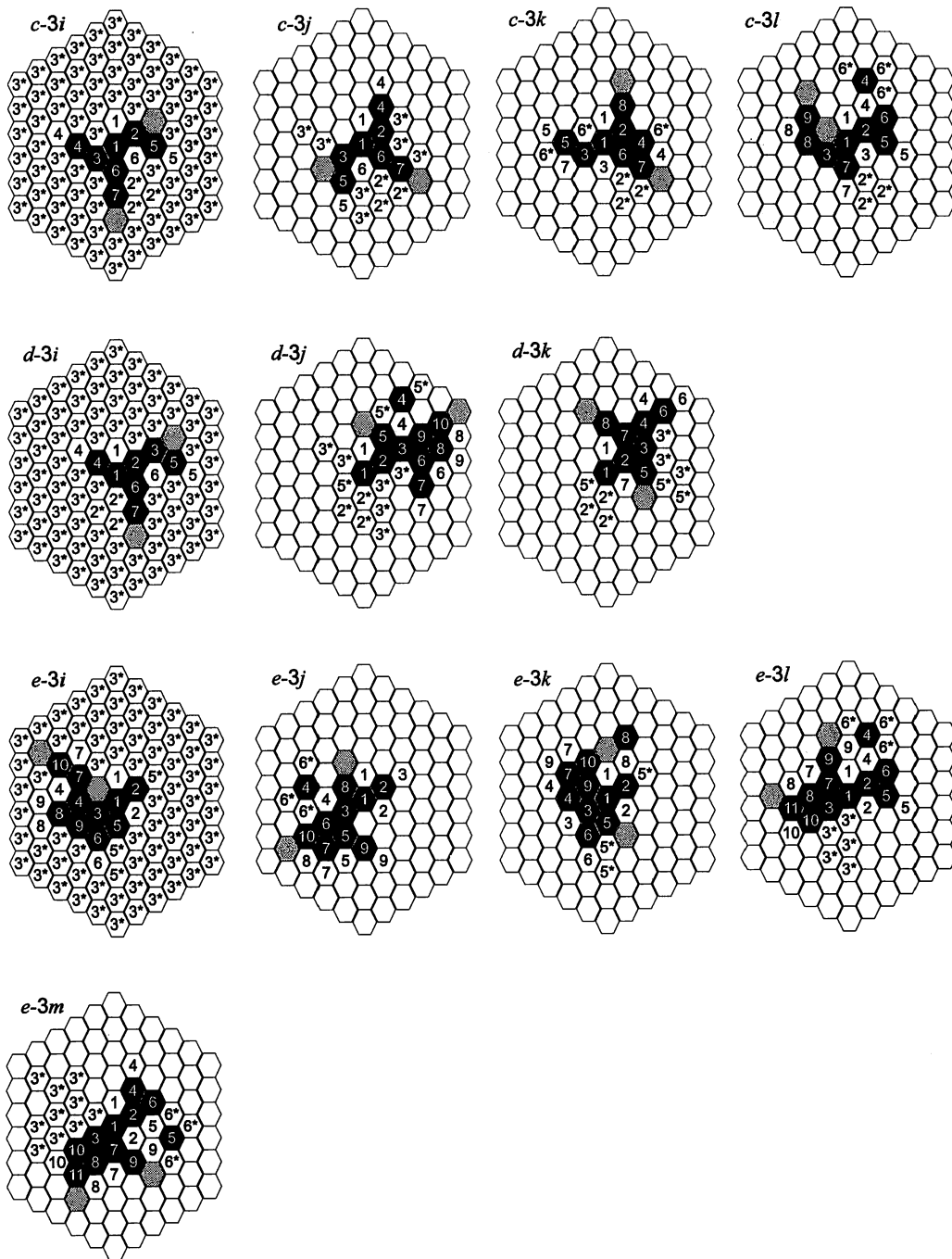


図8 後手2手目 c, d, e に対する先手必勝手順.

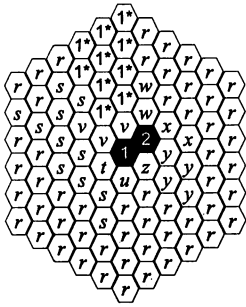


図9 非隣接ケースの後手2手目の場合分け ($r \sim z$).

3.2.2 非隣接ケース

後手1手目が中央セルに隣接しない場合(図4の10通り)も、先手2手目は1手目の右上を取る。このとき、後手2手目の手を図9のように $r \sim z$ の9通りに場合分けし、各々に対し先手必勝手順を構築する、なお、1*が後手2手目で用いられるときは r とする。

隣接ケースと同様、 $r \sim z$ いずれの場合も先手3手目は図10の各盤面のように3連のできるセルに打ち、後手3手目は $r \sim u$ では $3i, 3j, 3k$ の3通りに場合分けし、 $v \sim z$ では $3i, 3j, 3k, 3l$ の4通りに場合分けする。 $r \sim u, v \sim z$ に対し、先手のL完成までの手順を示したのがそれぞれ図11, 図12である。最終的に、灰色のセルのいずれかに手を打つことで先手は勝利する。なお、1*, 2*のセルが後手3手目として用いられるときは、 $r \sim z$ の全ての場合に、 $3i$ が適用される。

図11, 図12より、後手2手目が先手1手目に非隣接の場合も、高々12手で先手が勝利する(12手要するのは $v-3l$ と $y-3j$)。

4. まとめ

正六角盤面上のサイズ5のポリオミノLに対する先手必勝法を示した。本結果により、サイズ5の未解決のポリオミノはIのみとなった。サイズ6のポリオミノについては、82種類あるうち、負け型のポリオミノを含むもの以外の67種類が勝ち型か否か分かっていない[1]。それらの多くは探索空間が膨大であるため、コンピュータの援用が必要となることが予想される。

文献

- [1] J.-P. Bode and H. Harborth, Hexagonal Polyomino Achievement, *Discr. Math.* 212, 2000, pp. 5–18.
- [2] F. Harary, Achievement and Avoidance Games for Graphs, *Ann. Discr. Math.* 13, 1982, pp. 111–120.
- [3] F. Harary, Achieving the Skinny Animal, *Eureka* 42, 1982, pp. 8–14.
- [4] F. Harary and H. Harborth, Achievement and Avoidance Games with Triangular Animals, *J. Recreat. Math.* 18, 1985–1986, pp. 110–115.
- [5] H. Harborth and M. Seemann, Snaky is an Edge-to-edge Loser, *Geombin.* 5, 1996, pp. 132–136.
- [6] H. Harborth and M. Seemann, Snaky is a Paving Winner, *Bull. Inst. Combin. Appl.* 19, 1997, pp. 71–78.
- [7] K. Inagaki and A. Matsuura, Winning Strategies for Hexagonal Polyomino Achievement, *Proc. of WSEAS 12th Intern. Conf. on Appl. Math.*, 2007, pp. 252–259.
- [8] H. Ito, H. Miyagawa, Snaky is a Winner with One Handicap, *Proc. of 8th Hell. Europ. Conf. on Comp. Math. and Its Appl. (HERCMA 2007)*, 2007, pp. 25–26.

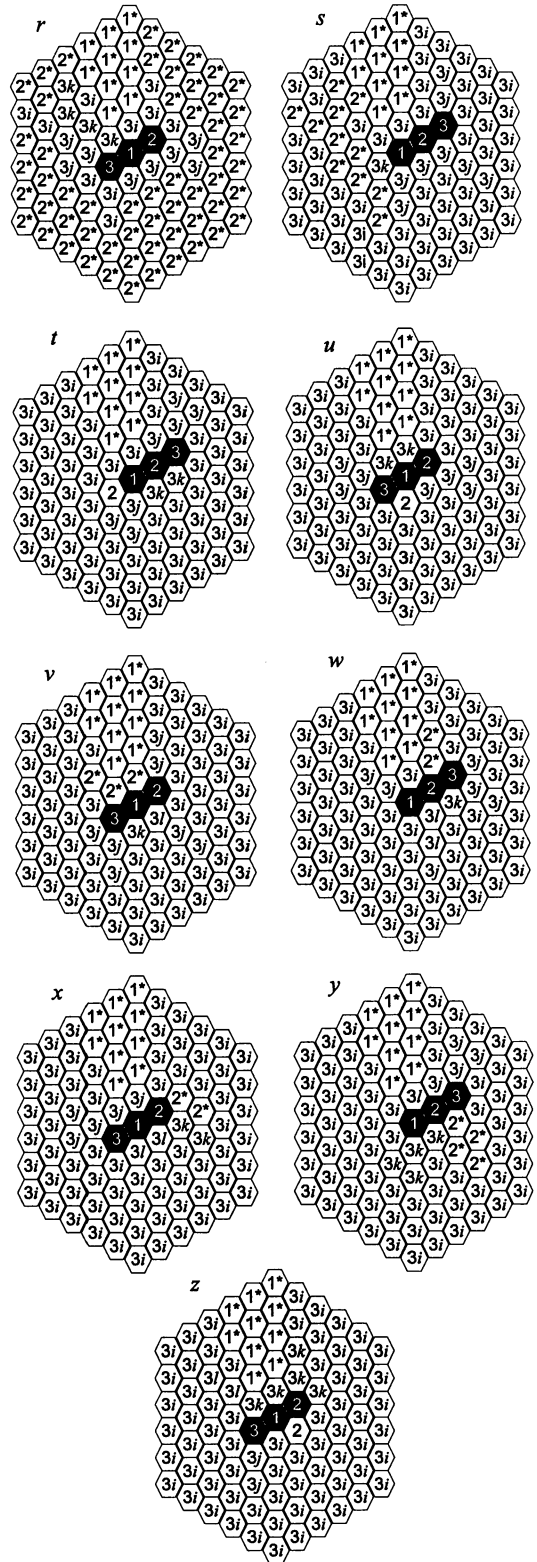


図10 後手2手目 $r \sim z$ に対する後手3手目の場合分け。

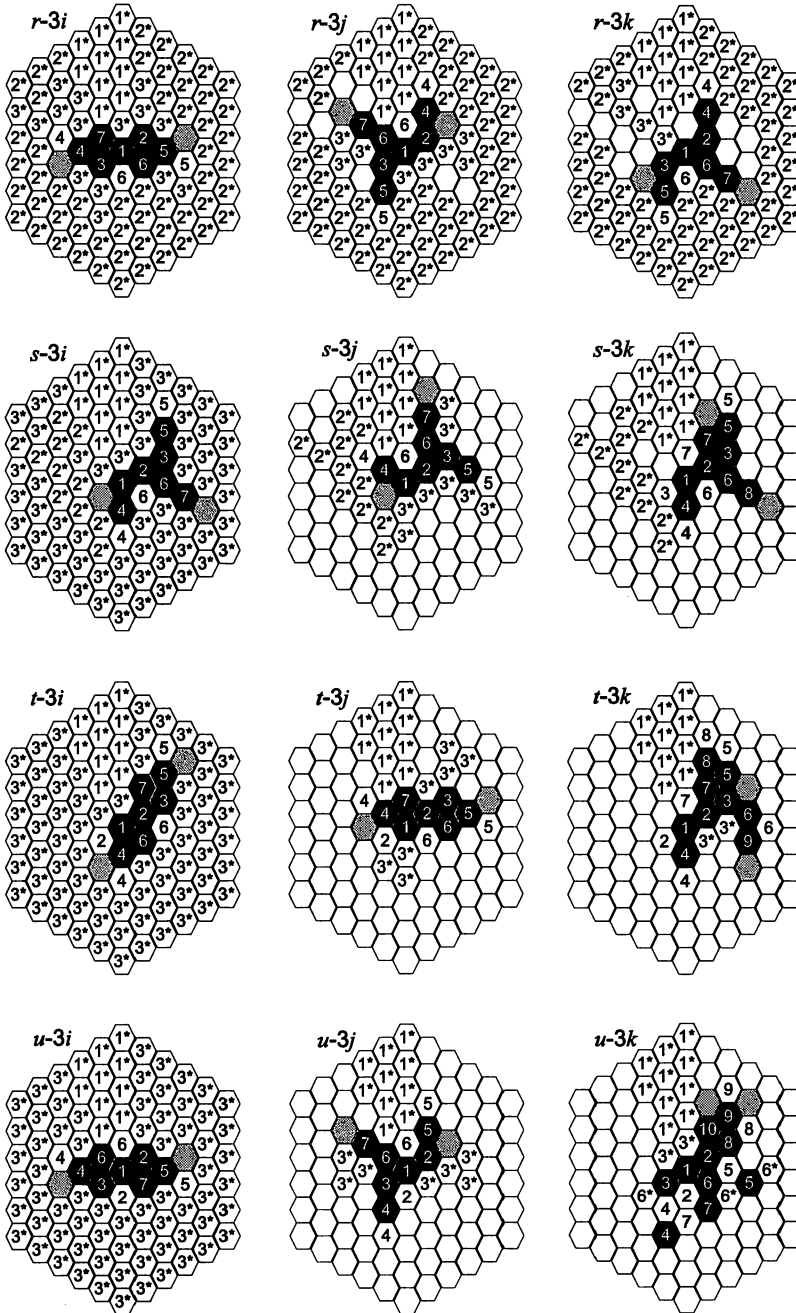


图 11 後手 2 手目 $r \sim u$ に対する先手の必勝手順.

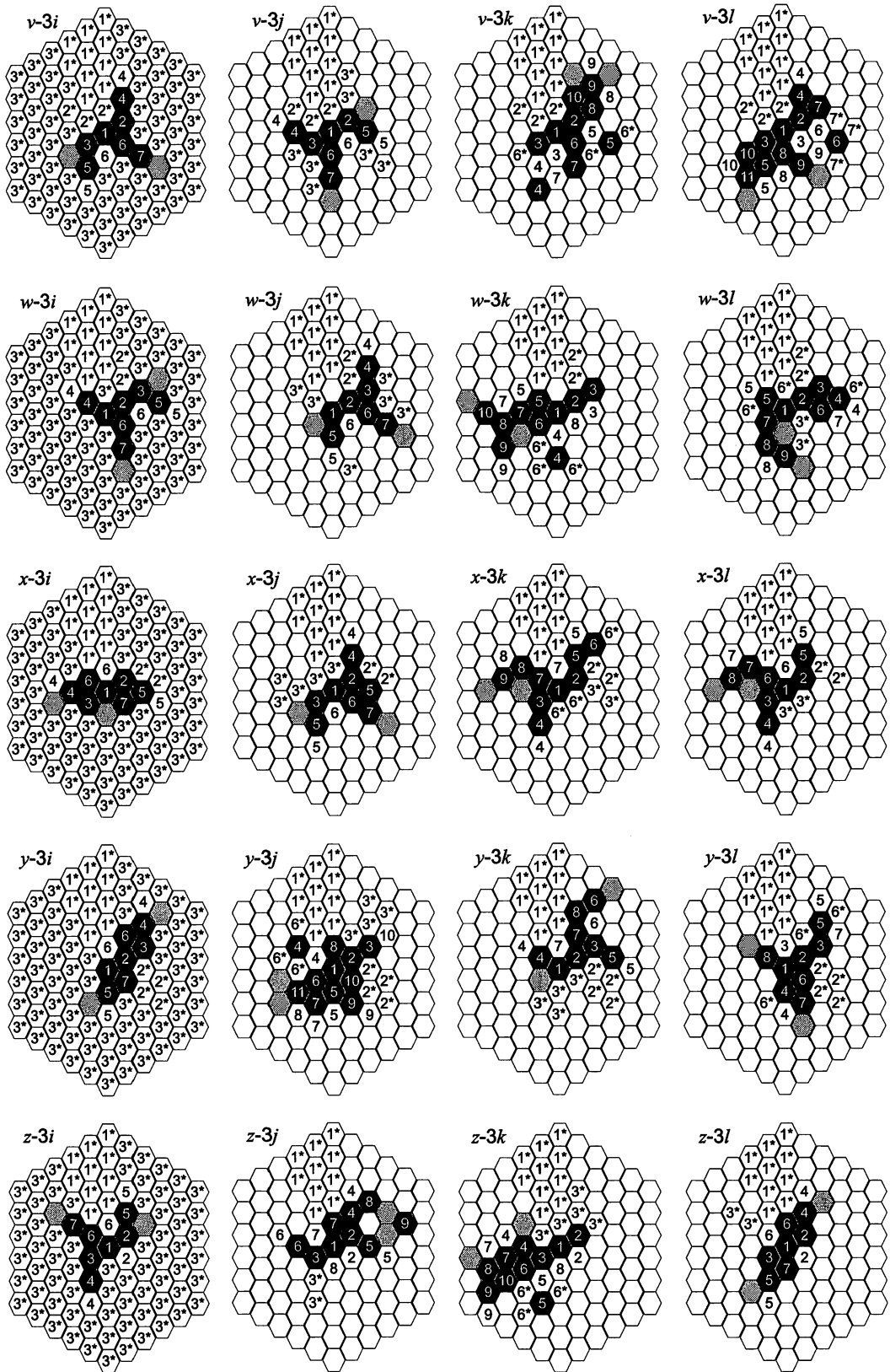


図 12 後手 2 手目 $v \sim z$ に対する先手の必勝手順.