高々スター次数(2,1)の拡張AL正規表現

Extended Automata-like Regular Expressions of Star Degree at Most (2, 1)

劉 信根　　橋口 攻三郎
Heekeun YOO and Kosaburo HASHIGUCHI

豊橋技術科学大学
Toyohashi University of Technology

あらまし　本研究では、次数(2.1)のスター演算の概念を提案し、和集合、連接、次数(2.1)のスター演算に関する有限言語族の閉包、すなわち、アルファベットΣ上の高々スター次数(2.1)の拡張AL正規言語のクラス(EARL(2.1.Σ))のいくつかの性質を明らかにする。さらに、EARL(2.1.Σ)は超線形言語のクラスを真に含むことを示し、EARL(2.1.Σ)は文脈自由言語族の真の部分族であることを示す。

Abstract　This paper introduces the notion of the star operator of degree (2.1) and studies properties of the closure of the family of finite languages under the operations, union, concatenation, and the star operator of degree (2.1). This closure includes properly the family of ultralinear languages, and is a proper subfamily of the family of context-free languages.

1. まえがき

本研究は[8]のつづきである。本研究の目的は非終端記号を持たない表現によって文脈自由言語を表現する方法を開発することである。[8]において、われわれは次数2のスター演算の概念を提案し、和集合、連接、Kleene-閉包、次数2のスター演算に関するΣ上の有限言語族の閉包、すなわち、アルファベットΣ上の拡張正規言語のクラス(ERL(2.Σ))のいくつかの性質を明らかにした。本研究では、次数(2.1)のスター演算の概念を提案し、和集合、連接、Kleene-閉包、次数2のスター演算、次数(2.1)のスター演算に関するΣ上の有限言語族の閉包、すなわち、アルファベットΣ上の高々スター次数(2.1)の拡張AL正規言語のクラス(EARL(2.1.Σ))のいくつかの性質を明らかにする。さらに、Σ上の線形いれ子文脈自由言語のクラス(LNCFL(Σ))を導入し、これら2つの言語のクラスが等しいことを示す。また、その他の結果、(1) ERL(2.Σ)と超線形言語のクラスはEARL(2.1.Σ)に真に含まれる、(2) EARL(2.1.Σ)と決定性文脈自由言語の族とあいまいでない文脈自由言語の族との間には包含関係は成り立たない等を示す。

本論文の2節では、準備として基本的な定義を述べる。3節では、EARL(2.1.Σ)とLNCFL(Σ)が等しいことを証明する。4節では、EARL(2.1.Σ)の基本性質について述べる。そして、EARL(2.1.Σ)と文脈自由言語族の他の2つの部分族との間の包含問題について述べる。

2. 準備

Σは空でない有限アルファベットの集合であ

る．λは空系列である．φは空集合である．任意の$w \in \Sigma^*$に対して$l(w)$はwの長さで，w^Rはwの逆系列である．$L \subset \Sigma^*$に対して$L^R=\{w^R \mid w \in L\}$である．任意のアルファベットV，V'と$W \in V^*$に対して$V'(W)$はWに現われるV'の記号の集合である．任意の$A \in V$に対して$\#_A(W)$はWに現われるAの個数である．集合Bに対して#BはBの濃度である．

アルファベットΣ上の高々スター次数２の拡張正規表現のクラス(ERE(2,Σ))と高々スター次数２の拡張正規言語のクラス(ERL(2,Σ))は[8]に定義されている．本論文では，次数(2,1)のスター演算**(1)の概念を導入し，拡張ＡＬ正規表現と拡張ＡＬ正規言語のクラスの概念を導入する．

［定義２．１］

任意の$n \geq 1$に対して$T(\Sigma,n)$と$F(\Sigma,n)$は次のように定義される．

(1) $T(\Sigma,n)=\{(i,j,k) \mid 1 \leq i,j \leq n,\ i \neq j$かつ$1 \leq k \leq (\#\Sigma+1)^2\}$；

(2) $F(\Sigma,n)=\{f \mid f:T(\Sigma,n) \rightarrow \Sigma \cup \{\lambda, \phi\}\}$.

［定義２．２］

任意の$n \geq 1$，$f \in F(\Sigma,n)$に対して，$D(f)=\{(i,j,k) \in T(\Sigma,n) \mid f(i,j,k) \neq \phi\}$.

［定義２．３］

EARE(2,1,Σ)はΣ上の拡張ＡＬ正規表現のクラスであり，次のように帰納的に定義される．

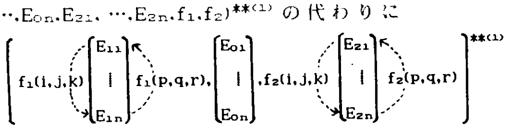
(1) $\lambda, \phi, a \in EARE(2,1,\Sigma)$（但し$a \in \Sigma$）；

(2) もし$E_1, E_2 \in EARE(2,1,\Sigma)$であれば，$E_1 \cup E_2$，$E_1E_2$，$(E_1)^* \in EARE(2,1,\Sigma)$である；

(3) もし$n \geq 1$で，$E_{11},\cdots,E_{1n},E_{01},\cdots,E_{0n},E_{21},\cdots,E_{2n} \in EARE(2,1,\Sigma)$，$f_1, f_2 \in F(\Sigma,n)$，$D(f_1)=D(f_2)$であれば，$(E_{11},\cdots,E_{1n},E_{01},\cdots,E_{0n},E_{21},\cdots,E_{2n},f_1,f_2)^{**(1)} \in EARE(2,1,\Sigma)$である．

［注意２．１］

表現を明瞭にするため$(E_{11},\cdots,E_{1n},E_{01},\cdots,E_{0n},E_{21},\cdots,E_{2n},f_1,f_2)^{**(1)}$の代わりに



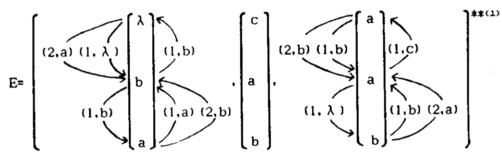
の表現がしばしば導入される．

［例２．１］

$E=(\lambda,b,a,c,a,b,a,a,b,f_1,f_2)^{**(1)}$，$n=3$，$\Sigma=\{a,b,c\}$，

	(1,2,1)	(1,2,2)	(2,1,1)	(2,3,1)	(3,2,1)	[illegible]
f_1	λ	a	b	b	[illegible]	[illegible]
f_2	b	b	c	λ	b	a

その他の任意の$(i,j,k) \in T(\Sigma,3)$に対して$f_1(i,j,k)=f_2(i,j,k)=\phi$である．Ｅは次のように表現される．



［定義２．４］

任意の$f \in F(\Sigma,n)(n \geq 1)$，$k \geq 1$に対して$S(f,k)$は次のように定義される．

$S(f,k)=\{(i_1,\cdots,i_k) \mid$ 各々の$j(1 \leq j \leq k)$に対して$(i_{j-1},i_j,r_j) \in D(f)$，但し$i_0=1\}$.

［定義２．５］

任意の$f_1, f_2 \in F(\Sigma,n)(D(f_1)=D(f_2))$，$k \geq 1$に対して$P(f_1,f_2)$は任意の$(i_1,\cdots,i_k) \in S(f_1,k)$に対して$P(f_1,f_2)(i_1,\cdots,i_k)=\{((a_1,b_1),\cdots,(a_k,b_k)) \mid$ 各々の$j(1 \leq j \leq k)$に対して$a_j \in f_1(i_{j-1},i_j,r_j)$かつ$b_j \in f_2(i_{j-1},i_j,r_j)(1 \leq r_j \leq (\#\Sigma+1)^2)$，但し$i_0=1\}$であるような$S(f_1,k)(=S(f_2,k))$から$((\Sigma \cup \{\lambda\}) \times (\Sigma \cup \{\lambda\}))^k$への関数である．

［定義２．６］

$E \in EARE(2,1,\Sigma)$によって表現される言語$|E|$は次のように帰納的に定義される．

(1) $|\lambda|=\{\lambda\}$，$|\phi|=\phi$，$|a|=\{a\}$（但し$a \in \Sigma$）；

(2) $|E_1 \cup E_2|=|E_1| \cup |E_2|$;

$|E_1E_2|=|E_1||E_2|=\{vw \mid v \in |E_1|, w \in |E_2|\}$;

$$|(E)^*|=|E|^*=\bigcup_{i=0}^{\infty} |E|^i;$$

(3) もし$n \geq 1$，$E_{11},\cdots,E_{1n},E_{01},\cdots,E_{0n},E_{21},\cdots,E_{2n} \in EARE(2,1,\Sigma)$，$f_1,f_2 \in F(\Sigma,n)$，$D(f_1)=D(f_2)$であれば，$|(E_{11},\cdots,E_{1n},E_{01},\cdots,E_{0n},E_{21},\cdots,E_{2n},f_1,f_2)^{**(1)}|$

$$=|E_{01}| \cup \left(\bigcup_{i \geq 1} |E_{11}|^i|E_{01}||E_{21}|^i\right) \cup \left(\bigcup_{k \leq 1} \left(\bigcup_{(i_1,\cdots,i_k) \in S(f_1,k)} \left(\bigcup_{\substack{j_0,j_1,\cdots,j_k \geq 0 \\ ((a_1,b_1),\cdots,(a_k,b_k)) \in P(f_1,f_2)(i_1,\cdots,i_k)}} L_1|E_{0i_k}|L_2\right)\right)\right),$$

但し，

$L_1=|E_{11}|^{j_0}a_1|E_{1i_1}|^{j_1}a_2\cdots|E_{1i_{k-1}}|^{j_{k-1}}a_k|E_{1i_k}|^{j_k}$;

$L_2=|E_{2i_k}|^{j_k}b_k|E_{2i_{k-1}}|^{j_{k-1}}b_{k-1}\cdots|E_{2i_1}|^{j_1}b_1|E_{21}|^{j_0}$.

$E \in EARE(2,1,\Sigma)$ に対して $|E|$ は Σ 上の拡張λ1正規言語（ear 言語）と呼ばれる.

[例2．2]

E を例2．1の表現とする．$|E|$ に含まれる語のいくつかの例は、任意の $i, j, k, h \geq 0$ に対して c, $ababccbb$, baa^iba^j, $ab^2bca^ica^jb$, $ab^2ba^iabca^hcbb^ja^iba^k$ 等である.

[定義2．7]

$EARL(2,1,\Sigma)$ は Σ 上の ear 言語のクラスである.

文脈自由文法(CFG) G は (V,Σ,P,S) の1つの組で示される．V は変数の有限集合，Σ は終端記号，P は生成規則の有限集合，そして S は開始記号である．文法 G における生成規則は一般に $A \rightarrow W$（但し $A \in V$, $W \in (V \cup \Sigma)^*$）の形をしている．$L(G)$ は文法 G によって生成される文脈自由言語(CFL)である.

[注意2．2]

$1 \leq i \leq m$ に対して $P=P_1 \cup \cdots \cup P_m$ かつ $P_i=\{A_i \rightarrow W_{ij} \mid 1 \leq j \leq k_i\}$ の時しばしば次のように書く；

$$
\begin{aligned}
P: A_1 &\rightarrow W_{11} | W_{12} | \cdots | W_{1k_1} \\
&\vdots \\
A_m &\rightarrow W_{m1} | W_{m2} | \cdots | W_{mk_m}.
\end{aligned}
$$

[定義2．8]

cfg $G=(V,\Sigma,P,S)$ において，次の(1)-(2)を満たすような $V(V=V_1 \cup \cdots \cup V_k, k \geq 1)$ の分解が存在すれば，G は線形いれ子文脈自由文法(lncfg)と呼ばれる；

(1) $\{V_1, \cdots, V_k\}$ は線形順序を持つ，すなわち，$V_1 > V_2 > \cdots > V_k$ ；

(2) 任意の $A \rightarrow W \in P(A \in V_i, 1 \leq i \leq k)$ に対して次の1つが成立する.

(2.1) $V(W) \subset \{A\} \cup V_{i+1} \cup V_{i+2} \cup \cdots \cup V_k$ かつ $\#_A W \leq 1$;

(2.2) $W \in (\Sigma \cup \{\lambda\})(V_i - \{A\})(\Sigma \cup \{\lambda\})$.

任意の lncfg G に対して $L(G)$ は線形いれ子文脈自由言語(lncfl)と呼ばれる.

[定義2．9]

$LNCFL(\Sigma)$ は Σ 上の lncfl のクラスである.

3．EARL(2,1,Σ)=LNCFL(Σ) の証明

次の定理は本研究の主な結果の一つである.

[定理3．1]

$EARL(2,1,\Sigma)=LNCFL(\Sigma)$.

定理3．1は次の二つの補題による.

[補題3．1]

任意の $E \in EARE(2,1,\Sigma)$ に対して，$|E| \in LNCFL(\Sigma)$ である.

（証明）証明は E に現われる演算子の個数に関する帰納法による.

基底段階：$|\lambda|$, $|\phi|$, $|a| \in LNCFL(\Sigma)$（但し $a \in \Sigma$）.

帰納段階：$E \in EARE(2,1,\Sigma)$ は次の4つのいずれかの形をしている.

(1) $E=E_1 \cup E_2$, (2) $E=E_1E_2$, (3) $E=(E_1)^*$,

(4) $E=(E_{11}, \cdots, E_{1n}, E_{01}, \cdots, E_{0n}, E_{21}, \cdots, E_{2n}, f_1, f_2)^{**(1)}$.

(1)-(3) の場合，帰納法の仮定により $|E_1|$ と $|E_2|$ を生成する lncfg $G_1=(V_1,\Sigma,P_1,S_1)$ と $G_2=(V_2,\Sigma,P_2,S_2)$ が存在する．そのとき $V_1 \cap V_2=\phi$ としてよい.

(1) $E=E_1 \cup E_2$ の場合

次の $G=(V,\Sigma,P,S)$ は E に対する条件を満たす；

(1.1) $V=V_1 \cup V_2 \cup \{S\}$；

(1.2) $P=P_1 \cup P_2 \cup S \rightarrow S_1 | S_2$.

(2) $E=E_1E_2$ の場合

次の $G=(V,\Sigma,P,S)$ は E に対する条件を満たす；

(2.1) $V=V_1 \cup V_2 \cup \{S\}$；

(2.2) $P=P_1 \cup P_2 \cup S \rightarrow S_1S_2$.

(3) $E=(E_1)^*$ の場合

次の $G=(V,\Sigma,P,S)$ は E に対する条件を満たす；

(3.1) $V=V_1 \cup \{S\}$；

(3.2) $P=P_1 \cup S \rightarrow \lambda | S_1S$.

(4) $E=(E_{11}, \cdots, E_{1n}, E_{01}, \cdots, E_{0n}, E_{21}, \cdots, E_{2n}, f_1, f_2)^{**(1)}$ の場合

$1 \leq i \leq n$ に対して $G_{1i}=(V_{1i},\Sigma,P_{1i},S_{1i})$, $G_{0i}=(V_{0i},\Sigma,P_{0i},S_{0i})$, $G_{2i}=(V_{2i},\Sigma,P_{2i},S_{2i})$ を $|E_{1i}|$, $|E_{0i}|$, $|E_{2i}|$ を各々生成する lncfg とする．ここで集合 $\{V_{1i}, V_{0i}, V_{2i} \mid 1 \leq i \leq n\}$ は互いに素である．次の $G=(V,\Sigma,P,A_1)$ は E に対する条件を満たす；

(4.1) $V=(\bigcup_{i=1}^{n} (V_{1i} \cup V_{0i} \cup V_{2i} \cup \{A_i\}))$；

(4.2) $P = P' \cup (\bigcup_{i=1}^{n} (P_{1i} \cup P_{0i} \cup P_{2i}))$. ここで P' は：

$A_1 \rightarrow S_{01} | S_{11}A_1S_{21} \cup P_1$

$A_2 \rightarrow S_{02} | S_{12}A_2S_{22} \cup P_2$

$\vdots$

$A_{n-1} \rightarrow S_{0(n-1)} | S_{1(n-1)}A_{n-1}S_{2(n-1)} \cup P_{n-1}$

$A_n \rightarrow S_{0n} | S_{1n}A_nS_{2n} \cup P_n$.

そして $1 \leq i \leq n$ に対して，(1) $B_i = \{(j,k) \mid f_1(i,j,k) \neq \phi\}$, (2) $B_i = \phi$ であれば $P_i = \phi$，その他 $P_i = \{A_i \rightarrow f_1(i,j,k)A_jf_2(i,j,k) \mid f_1(i,j,k) \neq \phi\}$. □

［補題３．２］

任意の $L \subset LNCFL(\Sigma)$ に対して $|E| = L$ である $E \in EARE(2,1,\Sigma)$ が存在する．

（証明） $L \in LNCFL(\Sigma)$, $G = (V,\Sigma,P,S)$ は L を生成する lncfg とする．証明は #V に関する帰納法による．

基底段階：#V=1．P の形は：$S \rightarrow u_1|u_2|\cdots|u_m|x_1Sy_1|x_2Sy_2|\cdots|x_nSy_n$，ここで $m, n \geq 0$ であり，$1 \leq i \leq m$，$1 \leq j \leq n$ に対して $u_i, x_j, y_j \in \Sigma^*$ である．

次の E は条件を満たす；

$$E = \left[\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \lambda ,\ \begin{bmatrix} u_1 \cup \cdots \cup u_m \\ \vdots \\ u_1 \cup \cdots \cup u_m \end{bmatrix},\ \lambda \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \lambda \right]^{**(1)}$$

実際に：$E = (x_1, \cdots, x_n, E_{01}, \cdots, E_{0n}, y_1, \cdots, y_n, f_1, f_2)^{**(1)}$ である．ここで，すべての $1 \leq i \leq n$ に対して $E_{0i} = u_1 \cup \cdots \cup u_m$ であり，任意の $(i,j,1) \in T(\Sigma,n)$ に対して $f_1(i,j,1) = f_2(i,j,1) = \lambda$ である．その他の任意の $(i,j,k) \in T(\Sigma,n)$ に対して $f_1(i,j,k) = f_2(i,j,k) = \phi$ である．

帰納段階：$V = V_1 \cup \cdots \cup V_k$，$V_1 > V_2 > \cdots > V_k$，$V_1 = \{A_1, \cdots, A_n\}$ とする．$S = A_1$ と仮定する．

P の形は； $A_1 \rightarrow W_{11} | \cdots | W_{1a}$

$|X_{11}A_1Y_{11}| \cdots |X_{1p}A_1Y_{1p} \cup P_1$

$A_2 \rightarrow W_{21} | \cdots | W_{2b}$

$|X_{21}A_2Y_{21}| \cdots |X_{2q}A_2Y_{2q} \cup P_2$

$\vdots$

$A_{n-1} \rightarrow W_{(n-1)1} | \cdots | W_{(n-1)r}$

$|X_{(n-1)1}A_{n-1}Y_{(n-1)1}| \cdots$

$|X_{(n-1)y}A_{n-1}Y_{(n-1)y} \cup P_{n-1}$

$A_n \rightarrow W_{n1} | \cdots | W_{ns}$

$|X_{n1}A_nY_{n1}| \cdots |X_{nz}A_nY_{nz} \cup P_n$

$\cup\ P'$.

ここで (1) $W_{1m}, X_{1j}, X_{2j} \in (V_2 \cup \cdots \cup V_k \cup \Sigma)^*$.

(2) $1 \leq i \leq n$ に対して $P_i \subset \{A_i \rightarrow aA_jb \mid 1 \leq j \leq n$, $j \neq i$ かつ $a, b \in \Sigma \cup \{\lambda\}\}$.

(3) 任意の $T \rightarrow W \in P'$ に対して $T \in V_2 \cup \cdots \cup V_k$.

帰納法の仮定によって，任意の $W \in (V_2 \cup \cdots \cup V_k \cup \Sigma)^*$ に対して次のように $E(W) \in EARE(2,1,\Sigma)$ を定義することができる．

(4.1) $W \in \Sigma^*$ なら，$E(W) = W$ である；

(4.2) $x_i \in \Sigma^* (1 \leq i \leq u+1)$，$T_j \in V_2 \cup \cdots \cup V_k (1 \leq j \leq u)$ に対して $W = x_1T_1x_2T_2 \cdots x_uT_ux_{u+1}$ なら，$E(W) = x_1E(T_1)x_2E(T_2) \cdots x_uE(T_u)x_{u+1}$ である．ここで $E(T_j) \in EARE(2,1,\Sigma)$ であり，$|E(T_j)| = L(V,\Sigma,P,T_j)$ である．各々の $i, j (1 \leq i,j \leq n, i \neq j)$ に対して $B(i,j) = \{A_i \rightarrow aA_jb \mid a, b \in \Sigma \cup \{\lambda\}\}$ とおく．明らかに $\#B(i,j) \leq (\#\Sigma+1)^2$ である．各々の $1 \leq i \leq n$ に対して，m_i を $A_i \rightarrow X_{ij}A_iY_{ij} \in P$ の形の生成規則の数とする．$m = m_1 + \cdots + m_n$ とおく．図３．１は条件を満たす；

実際に：$E = (E(X_{11}), \cdots, E(X_{1p}), E(X_{21}), \cdots, E(X_{2q}), \cdots, E(X_{n1}), \cdots, E(X_{nz}), E_{01}, \cdots, E_{0m}, E(Y_{11}), \cdots, E(Y_{1p}), E(Y_{21}), \cdots, E(Y_{2q}), \cdots, E(Y_{n1}), \cdots, E(Y_{nz}), f_1, f_2)^{**(1)}$，ここで各々の $1 \leq i \leq n$，$1 \leq j \leq m_i$ に対して $E_0(m_1 + \cdots + m_{i-1} + j) = E(W_{i1}) \cup \cdots \cup E(W_{ir_i})$ で，r_i は $A_i \rightarrow W_{ij} \in P$（$W_{ij} \in (V_2 \cup \cdots \cup V_k \cup \Sigma)^*$）の形の生成規則の数である．$f_1 : T(\Sigma,m) \rightarrow \Sigma \cup \{\lambda, \phi\}$，$f_2 : T(\Sigma,m) \rightarrow \Sigma \cup \{\lambda, \phi\}$ は次のように定義される．

(5) 各々の $1 \leq i \leq n$，$1 \leq j, l \leq m_i$（$j \neq l$）に対して，$f_1(m_1 + \cdots + m_{i-1} + j, m_1 + \cdots + m_{i-1} + l, 1) = f_2(m_1 + \cdots + m_{i-1} + j, m_1 + \cdots + m_{i-1} + l, 1) = \lambda$ かつすべての $2 \leq r \leq (\#\Sigma+1)^2$ に対して $f_1(m_1 + \cdots + m_{i-1} + j, m_1 + \cdots + m_{i-1} + l, r) = f_2(m_1 + \cdots + m_{i-1} + j, m_1 + \cdots + m_{i-1} + l, r) = \phi$ である；

(6) 任意の $1 \leq i, j \leq n$（$i \neq j$），$1 \leq p \leq m_i$，$1 \leq q \leq m_j$ に対して，

(6.1) $1 \leq r \leq \#B(i,j)$ かつ $A_i \rightarrow aA_jb$ が $B(i,j)$ の r 番目の要素であれば，

$(f_1(m_1 + \cdots + m_{i-1} + p, m_1 + \cdots + m_{j-1} + q, r),$

$f_2(m_1 + \cdots + m_{i-1} + p, m_1 + \cdots + m_{j-1} + q, r))$

$= (a, b)$ である；

(6.2) $\#B(i,j) + 1 \leq r \leq (\#\Sigma+1)^2$ であれば，

$f_1(m_1 + \cdots + m_{i-1} + p, m_1 + \cdots + m_{j-1} + q, r)$

$= f_2(m_1 + \cdots + m_{i-1} + p, m_1 + \cdots + m_{j-1} + q, r)$

$= \phi$ である．

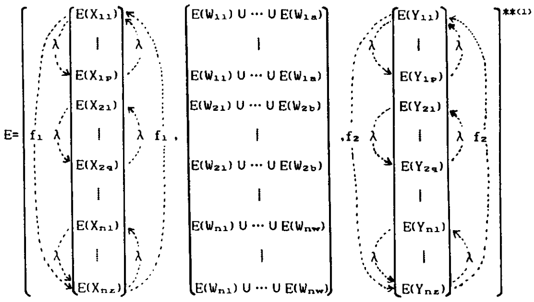


図３．１

４．EARL(2,1,Σ) のその他の性質

［命題４．１］

(1) EARL(2.1.Σ) は逆系列の演算について閉じている．

(2) EARL(2.1.Σ) は EARL(2.1.Σ) 一代入について閉じている．

(3) EARL(2.1.Σ) は $\#\Sigma \geq 2$ のとき共通集合の演算について閉じていない．

(4) EARL(2.1.Σ) は $\#\Sigma \geq 2$ のとき補集合の演算について閉じていない．

（証明） (1) と (2) は明らかである．ここで EARL(2.1.Σ) 一代入は各々の $a \in \Sigma$ に対して $f(a) \in$ EARL(2.1. Δ) であるような代入 $f: \Sigma^* \to \Delta^*$ である．(3) $\Sigma=\{a,b\}$、$E_1=(a.\ \lambda.b)^{**}a^*$、$E_2=a^*(b.\ \lambda.a)^{**}$ とする．そのとき $|E_1| \cap |E_2|=\{a^nb^na^n \mid n \geq 0\}$ で、文脈自由でない．(4) EARL(2.1.Σ) が補集合の演算について閉じていると仮定する．一般に、任意の $L_1, L_2 \subset \Sigma^*$ に対して $L_1 \cap L_2=\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ になる関係が成り立つ．ここで $L_1, L_2 \in$ EARL(2.1.Σ) とすると，上式の左辺は EARL(2.1.Σ) となる．これは (3) に矛盾する． □

［注意４．１］

EARL(2.1.Σ) に対する共通集合問題は任意の与えられた $L_1, L_2 \in$ EARL(2.1.Σ) に対して $L_1 \cap L_2=\phi$ であるか否かを決定する問題である．EARL(2.1.Σ) ⊃ ERL(2.Σ) であり，ERL(2.Σ) に対する共通集合問題が決定不能であるから EARL(2.1.Σ) に対する共通集合問題は決定不能である（[8] の定理4.1を参照）．

本論文の残り部分は、EARL(2.1.Σ) と文脈自由言語族の他の部分族との包含問題を考える．

LCFL(Σ) をΣ上の線形言語の族、ULCFL(Σ) をΣ上の超線形言語の族，DCFL(Σ) をΣ上の決定性文脈自由言語の族，UACFL(Σ)Σ上のあいまいでない文脈自由言語の族とする． ここで、LCFL(Σ) ⊂ ULCFL(Σ) であることに注意する．

Lを次の cfg $G=(V,\Sigma,P,S)$ によって生成される言語とする：$V=\{S\}$、$\Sigma=\{a,b\}$、$P: S \to aSSb \mid ab$.

Lは次の式を満たす：

$L=aLLb \cup \{ab\}$.......(4.1)

言語Lは定理4.1を証明するのに必要である．

［定義４．１］

Σ^+ の部分集合 X は $X\Sigma^+ \cap X=\phi$ のとき prefix であり，$\Sigma^+X \cap X=\phi$ のとき suffix である．X は，prefix かつ suffix のとき，biprefix である．

［表記］

任意の $w \in \Sigma^*$ に対して $\|w\|$ は $\#_a(w)-\#_b(w)$ を示す．

［補題４．１］

(1) L は biprefix である：より明確に、もし $w \in L$ であれば，$\#_a(w)=\#_b(w)$ であり，w の任意の空でない真の左（右）因子 w' は $\|w'\|>0$ ($\|w'\|<0$) を満たす．

(2) もし $x \in L$ かつ $xv \in LL$ であれば，$v \in L$ である．

(3) もし $v \in L$ かつ $xv \in LL$ であれば，$x \in L$ である．

(4) $xy^+z \subset L$ であるような $x, z \in \Sigma^*$，$y \in \Sigma^+$ は存在しない．

(5) 任意の $u,v,w,x,y \in \Sigma^*$ に対して，$|u(x,v,y)^{**}w| \subset L$ なら，$\|x\| \geq 0$，$\|y\| \leq 0$ である．

（証明） (1) 証明は $|(w)$ に関する帰納法による．

$w=ab$ のとき明らかである．$|(w)>2$ とする．上の式(4.1)によって $w=auvb$ ($u, v \in L$)．帰納法の議論を u と v に適用させることができる．従って $\|w\|=1+\|u\|+\|v\|-1=0$ である．f を w の真の左因子とする．もし f が au の左因子なら，明らかに $\|f\| \geq 1$ である．もし $f=auv'$ かつ v' が v の左因子なら，$\|f\|= 1+\|v'\| \geq 1$ である．対称的に w の任意

の真の右因子 g に対して $\|g\| \leq -1$ である．

(2) と (3) は (1) より明らかである．

(4) $xy^+z \subset L$ であるような $x, z \in \Sigma^*$ と $y \in \Sigma^+$ が存在すると仮定する．さらに $l(xyz)$ が極小であるような x, y, z を仮定する．もし $x=\lambda$ なら，$yz, y^2z \in L$ であり，(1) に矛盾する．同様に $z \neq \lambda$ である．その時 $xyz=ax'yz'b$ と書くことができる．上の式 (4. 1) によって $x'yz' \in LL$ である．次の 3 つの場合を考える．

(4.1) $x'=x_0x_1$ かつ $x_0, x_1yz' \in L$ の場合

任意の $i \geq 1$ に対して，$ax'y^iz'b \in L$ であるから，$x'y^iz' \in LL$ に注意する．$x_0 \in L$ であるから，$x_1y^+z' \subset L$ を意味する．これは矛盾である．

(4.2) $z'=z_0z_1$ かつ $x'yz_0, z_1 \in L$ の場合

議論は (4.1) と対称的である．

(4.3) $y=y_0y_1$ かつ $x'y_0, y_1z' \in L$ の場合

$ax'y^2z'b \in L$ かつ $x'y^3z'=x'y_0(y_1y_0)^2y_1z' \in LL$ に注意する．$x'y_0 \in L$ であるから，$(y_1y_0)^2y_1z' \in L$ である．これは (1) かつ $y_1z' \in L$ に矛盾する．

(5) $|u(x,v,y)^{**}w| \subset L$ と仮定する．$m=l(uxvyw)$ とおく．$\|x\| < 0$ と仮定する．そのとき $ux^mvy^mw \in L$ かつ $\|ux^m\| < 0$ である．これは (1) に矛盾する．対称的に $\|y\| \leq 0$ も言える．　□

［表記］

任意 $E \in EARE(2,1,\Sigma)$ に対して E のサイズ $s(E)$ は E の中に現われる λ と各々の $c \in \Sigma$ の数の和である．例えば，例 2.1 の E に対して $s(E)=9$（$(i,j,k) \in T(n,\Sigma)$ に対して値域 $f_1(i,j,k) \cup f_2(i,j,k)$ に現われる文字の数は数えない）．

任意の $E \in EARE(2,1,\Sigma)$ に対して E の位置の集合 $P(E)$ は集合 $\{1, 2, \cdots, s(E)\}$ である．以下において，ある固定された方法により，各 $i \in P(E)$ は E の i 番目の位置に対応するものとする．

［定義４．２］

任意の $E \in EARE(2,1,\Sigma)$ に対して E の (2,1)- スターハイト $h_{(2,1)}(E)$ は次のように帰納的に定義される：

(1) $h_{(2,1)}(\lambda)=h_{(2,1)}(a)=h_{(2,1)}(\phi)=0$ (但し $a \in \Sigma$)；

(2) $h_{(2,1)}(E_1 \cup E_2) = h_{(2,1)}(E_1E_2) = \max\{h_{(2,1)}(E_1), h_{(2,1)}(E_2)\}$，$h_{(2,1)}((E)^*)=h_{(2,1)}(E)$ ；

(3) $h_{(2,1)}((E_{11}, \cdots, E_{1n}, E_{01}, \cdots, E_{0n}, E_{21}, \cdots, E_{2n}, f_1, f_2)^{**(1)}) = 1+\max\{h_{(2,1)}(E_{1i}), h_{(2,1)}(E_{0i}), h_{(2,1)}(E_{2i}) \mid 1 \leq i \leq n\}$.

［定義４．３］

もし E が次の形であれば，$E \in EARE(2,1,\Sigma)$ は (2,1)- スター表現である：

$E=(E_{11}, \cdots, E_{1n}, E_{01}, \cdots, E_{0n}, E_{21}, \cdots, E_{2n}, f_1, f_2)^{**(1)}$.

［定義４．４］

任意の $E=(E_{11}, \cdots, E_{1n}, E_{01}, \cdots, E_{0n}, E_{21}, \cdots, E_{2n}, f_1, f_2)^{**(1)} \in EARE(2,1,\Sigma)$ に対して E の部分表現 $(E_{11}, \cdots, E_{1n})$ は E の第一部分と呼ばれる．そして $(E_{21}, \cdots, E_{2n})$ は E の第三部分と呼ばれる．

［定義４．５］

任意の $m, n \geq 1$ に対して，語 $w_{m,n} \in \Sigma^*$ は次のように帰納的に定義される．

(1) $w_{1,n}=a^{n+2}b(abb)^n(aab)^nab^{n+2}$;

(2) $m > 1$ に対して，$w_{m,n}=a^{n+1}w_{m-1,n}((aw_{m-1,n})^{n+1}a^{n+1}w_{m-1,n}(w_{m-1,n}b)^{n+1}b^{n+2})^{n+1}$.

［補題４．２］

任意の $m, n \geq 1$ に対して，$w_{m,n} \in L$ である．

（証明）次の導出に注目する．帰納法によって，(2) が成立する．

(1) $S \overset{*}{\Rightarrow} a^{n+1}S(Sb)^{n+1}=a^{n+1}S(Sb)^nSb$

$\overset{*}{\Rightarrow} a^{n+1}S(Sb)^n(aS)^nSb^{n+1}$

$\overset{*}{\Rightarrow} a^{n+2}b(abb)^n(aab)^nab^{n+2}$;

(2) $S \overset{*}{\Rightarrow} a^{n+1}S(Sb)^{n+1} \overset{*}{\Rightarrow} a^{n+1}S((aS)^{n+1}Sb^{n+2})^{n+1}$

$\overset{*}{\Rightarrow} a^{n+1}S((aS)^{n+1}a^{n+1}S(Sb)^{n+1}b^{n+2})^{n+1}$

$\overset{*}{\Rightarrow} a^{n+1}w_{m-1,n}((aw_{m-1,n})^{n+1}a^{n+1}w_{m-1,n}(w_{m-1,n}b)^{n+1}b^{n+2})^{n+1}$.　□

［補題４．３］

$E \in EARE(2,1,\Sigma)$，$m=h_{(2,1)}(E)$，$n=s(E)$ とする．もし $|E| \subset L$ なら，任意の $q \geq n$ に対して次の (1)，(2) が成立する．

(1) 任意の $1 \leq p \leq m$ に対して，$w_{p,q} \in |E|$ なら，任意の $r(1 \leq r \leq p)$ に対して，$w_{r,q}$ が綴られる E の任意の部分表現 E' に対して，$h_{(2,1)}(E') \geq r$ が成立する．

(2) 任意の $t \geq m+1$ に対して，$w_{t,q} \notin |E|$ である．

（証明）証明は m に関する帰納法による．$m=0$ のとき，(1) 自明である，(2) もまた明らかである．$m > 0$ とする．(1)．$1 \leq p \leq m$ とする．$w_{p,q} \in |E|$ と仮定する．任意の $r(1 \leq r \leq p)$ を考える．証明はさらに r に関する帰納法による．$r=1$ のとき $n, q, w_{r,q}$ の定義によって明らかである：ここで，また補題４．１の (4) を思い出す．$r > 1$ とする．そのとき $w_{r,q}=a^{q+1}w_{r-1,q}((aw_{r-1,q})^{q+1}a^{q+1}w_{r-1,q}(w_{r-1,q}b)^{q+1}b^{q+2})^{q+1}$ である．$w_{r,q}$ が綴

られるEの任意の部分表現E'を考える．帰納法の仮定から，$w_{r-1,q}$が綴られるE'の任意の部分表現E''に対して，$h_{(2,1)}(E'') \geq r-1$である．まず，正整数の系列$(i_1, i_2, \cdots, i_{q+1})$を考える．但し各々の$j (1 \leq j \leq q+1)$に対して，$i_j$は$E' (\in p(E))$の位置である（ここで$E' (\in p(E))$は$w_{r,q}$が$E'$の中で綴られるとき$w_{r,q}$のprefixである$a^{q+1} w_{r-1,q} (aw_{r-1,q})^j$に現われるだろう）．$s(E') \leq q$であるから，ある$j_0, j_1 (1 \leq j_0 < j_1 \leq q+1)$に対して$i_{j_0} = i_{j_1}$である．従って，$i_{j_0}$は$h_{(2,1)}(E_0) \geq r-1$であるEのある(2.1)-スター部分表現$E_{01}$に存在する．さらに$\|(aw_{r-1,q})^{j_1-j_0}\| > 0$であるから，$(aw_{r-1,q})^{j_1-j_0}$はLemma 4.1の(5)によって$E_{01}$の第1部分の中で綴られる．同様に$w_{r,q}$のprefix $a^{q+1} w_{r-1,q} (aw_{r-1,q})^{q+1} a^{q+1} w_{r-1,q} (w_{r-1,q} b)^{q+1}$のあるsuffix $(w_{r-1,q} b)^{k_1-k_0}$は$h_{(2,1)}(E_{11}) \geq r-1$であるEのある(2.1)-スター部分表現$E_{11}$の第3部分の中で綴られる．このように続けて，Eの(2.1)-スター部分表現の系列$E_{01}, E_{11}, \cdots, E_{0q+1}, E_{1q+1}$を得る．これは$h_{(2,1)}(E') \geq r$を意味する．

(2) $t \geq m+1$とする．$w_{t,q} \in |E|$を仮定すると，(1)と同様にして$h_{(2,1)}(E) \geq m+1$を導ける．これは矛盾である．よって，$w_{t,q} \notin |E|$．　□

［命題４．２］

L $\notin$ EARL(2.1.Σ)である．

（証明）L $\in$ EARL(2.1.Σ)と仮定する．そのとき$|E| = L$であるようなE $\in$ EARL(2.1.Σ)が存在する．$n = s(E)$，$m = h_{(2,1)}(E)$とする．補題４．３によって，$w_{m+1,n} \notin |E|$で，これは矛盾である．　□

［命題４．３］

L $\in$ DCFL(Σ) ∩ UACFL(Σ)である．

（証明）明らかにL $\in$ UACFL(Σ)である．次の決定性プッシュダウンオートマトン A＝（Q，Σ，Γ，δ，q_0，Z_0，F）はLを受理する．ここで，Q＝{q_0，q_1，q_2}は状態の有限集合，Γ＝{Z_0，Z_1，Z_2}はスタックアルファベット，$q_0 \in$ Qは初期状態，$Z_0 \in$ Γは開始記号，F＝{q_2}は最終状態の集合，δは状態推移関数：δ＝Q×（Σ∪{λ}）×Γ→Q×Γ*∪{φ}である．δは次を満たす：

(1) δ（q_0，a，Z_0）＝（q_0，a）；

(2) δ（q_0，b，a）＝（q_1，λ）；

(3) δ（q_0，a，a）＝（q_0，Z_1 a）；

(4) δ（q_0，a，Z_2）＝（q_0，Z_1 a）；

(5) δ（q_1，λ，Z_1）＝（q_0，Z_2）；

(6) δ（q_1，λ，Z_2）＝（q_0，λ）；

(7) δ（q_1，λ，Z_0）＝（q_2，λ）；

(8) 任意の異なる（q，c，d）∈Q×（Σ∪{λ}）×Γに対してδ（q，c，d）＝φである．

次のようにAはLを受理する．任意の$w \in$ Lを考える．もし$w=ab$なら，明らかにAはwを受理する．そのほかある$u, v \in$ Lに対して$w=auvb$である．この場合Aがauを読んだ後Aのスタックは状態q_1を持つZ_0 a Z_1から成る．それからλ－推移によってAはスタックをZ_0 a Z_2，状態をq_0に変える．Aがauvを読んだ後Aのスタックは状態q_1を持つZ_0 a Z_2から成る．それからλ－推移によってAはスタックをZ_0 a，状態をq_0に変える．Aが$auvb=w$を読んだ後スタックは空になり，λ－推移によって最終状態q_2に入る．Aは任意の$w \notin$ Lを受理しない．□

［定理４．１］

(1) EARL(2.1,Σ)は#Σ≧3のときLCFL(Σ)，ULCFL(Σ)，ERL(2.Σ)を真に含む．

(2) 任意のC ∈ {DCFL(Σ),UACFL(Σ)}に対して，#Σ≧4のときEARL(2.1.Σ)-C ≠ φかつC-EARL(2,1,Σ) ≠ φである．

（証明）(1) ERL(2.Σ)とULCFL(Σ)間の包含問題は#Σ≧3のとき比較できないのが示された[8]．(1)は次の事実による：EARL(2.1.Σ) ⊃ ULCFL(Σ)，EARL(2.1.Σ) ⊃ ERL(2.Σ)，ULCFL(Σ) ⊃ LCFL(Σ)．(2) #Σ≧4のとき，ERL(2.Σ)-DCFL(Σ) ≠ φ，ERL(2.Σ)-UACFL(Σ) ≠ φが示された[8]．(2)は次の事実による：EARL(2.1.Σ) ⊃ ERL(2.Σ)，命題4.2，4.3.　□

［系４．１］

Lを補題４．１のような言語とする．そのときL $\notin$ ULCFL(Σ)である．

［注意４．２］

次はEARL(2.1.Σ)に関する未解決問題である．

(1) E_1，E_2 ∈ EARE(2.1.Σ)（或はE_1，E_2 ∈ ERE(2.Σ)）に対して$|E_1|=|E_2|$であるか否か決定可能であるか？

(2) E ∈ EARE(2.1.Σ)（或はE ∈ ERE(2.Σ)）に対して|E|は正規であるか否か決定可能であるか？

(3) (2.1)-スターハイト問題：例えば，(2.1)-スターハイトハイアラキは無限であると我々は予想する．

参考文献

[1] J.Berstel, Transductions and Context-free Languages, (B.G Teubner, Stuttgart, 1979).

[2] J.Berstel and D.Perrin, Theory of Codes, (Academic Press, 1985).

[3] S.Ginsburg, The Mathematical Theory of Context-free Languages, (McGraw-Hill, 1966).

[4] S.Ginsburg and H.G.Rice, Two families of languages related to ALGOL, JACM 9 (1962) 350-371.

[5] S.Ginsburg and E.H.Spanier, Bounded ALGOL-like languages, Trans.Am. Math. Soc. 113 (1964) 333-368.

[6] S.A.Greibach, The unsolvability of the recognition of linear context-free languages, JACM 13 (1966) 582-587.

[7] M.A.Harrison, Introduction to Formal Language Theory, (Addison-Wesley, 1978)

[8] K.Hashiguchi and H.Yoo, Extended regular expressions of star degree at most two, to appear in Theoretical Computer Science.

[9] J.E.Hopcroft and J.D.Ullman, Introduction to Automata Theory, Language, and Computation, (Addison-Wesley, 1979).

[10] E.Shamir, On sequential languages, Z.Phonetik.Sprach. & Kommunikationsforschung 18 (1965) 61-69.

[11] 山崎, 文脈自由言語のある部分言語の包含関係に関する一考察, 信学論(D),J70-D,1, pp.1-9(87/1).