人　工　知　能 80－4
記　号　処　理 63－4
（1 9 9 2. 1. 1 6）

確率論理の意味論と演繹推論

友納 正裕

日本電気（株）　C&C 情報研究所

従来の確率論理の定式化の方法として、確率分布を領域（個体の集合）に張る方法と可能世界に張る方法の２つがある。前者は「鳥が飛ぶ確率は 0.9」のように不特定の個体の確率を表わすのに適し、後者は「Tweety が飛ぶ確率は 0.7」のように特定の個体に関する確率を表わすのに適している。しかし、両者の関係は明確でなく、また、前者では確率的推論の健全性が成り立たないという問題がある。本稿では、一階言語の意味論的構造の複雑さのために個体定数の意味づけが不明確になることがこの問題の原因と考え、言語の内部と外部を分離することにより意味論的構造および個体定数の意味づけを明確にする。これにより、上記２つの意味論の関係を明らかにし、健全性を満たす確率的推論の枠組みを提案する。この枠組みは非単調推論を自然に表現できるという特長がある。

A Semantics and Deductive System for Probabilistic Logic

Masahiro TOMONO

C&C Information Technology Research Laboratories

NEC Corporation

1-1,Miyazaki 4-chome,Miyamae-ku,Kawasaki,Kanagawa 216 Japan

Two approaches have been proposed for giving semantics to probabilisitc logics in the literature. One places a probability distribution on the domain, and the other places a distribution on a set of possible worlds. The first is appropriate for expressing probabilities that a general statement holds for unspecified individuals, for example "A randomly chosen bird flies with probability 0.9". The second is appropriate for expressing probabilities that a statement holds for specific individuals, for example "Tweety (a specific bird) flies with probability 0.7". However, the relation between the two approaches has not been made clear and probabilistic reasoning based on the first approach is not sound. This paper clarifies the relation by separating the inside and the outside of the language. It also develops a new semantics which admits a sound probabilistic reasoning with non-monotonic properties.

1 はじめに

不確実な情報に基づく推論を行なったり、信念の強さなどを表わすための知識表現の枠組みの1つとして確率論理がある。確率論理は、論理式の真理値を真 (1) と偽 (0) の2値から [0,1] の実数値に拡張して、真偽をはっきり決められない命題も表現できるようにした論理体系である。これにより、たとえば「命題 q は確率 0.7 で成り立つ」のような不確実な知識が表現できるようになる。

このような確率的な真理値は、形式論理の意味論的構造に確率分布を導入することにより得られる。その方法として、これまで、大きく分けて2つの方法が提案されている[1]。

1つは、個体の集合（領域）に確率分布を張り、論理式の真理値を個体の確率で平均する方法である [1, 4, 5, 6]。本稿では、これを PD と呼ぶ。PD は何 % の個体が論理式を満たすかという、不特定の個体についての確率を表現するのに適している。しかし、特定の個体に対する確率は表現できない。

もう1つは、起こり得る可能な状態（可能世界）に確率分布を張り、論理式の真理値を可能世界の確率で平均する方法である [2, 4, 8, 9]。本稿では、これを PW と呼ぶ。PW は、特定の個体がどの状態で論理式を満たすかという確率を表わすのに適している。しかし、不特定の個体についての確率は表現できない。

このように両者とも一長一短があるため、両者を統合する試みが部分的になされているが [4]、両者の関係は不明確な部分が残っている。また、PD では、代入や確率的推論の健全性が成り立たないという問題もある。

本稿の目的は、両者の関係を明かにし、健全性を満たす新しい意味論を構築することである。上記の問題は、一階言語の可能世界の複雑さや個体定数の意味づけの不明確さが原因になっている。これは個体を言語の外部に設定する従来の外延的意味論に起因する。そこで、言語（システム）の内部と外部を分離して意味論を考え直す。そして、システムにとっての個体定数は、外部の個体を直接指示するのではなく、述語によって同定された主観的な個体を指示する記号であるという意味づけをすることにより、代入や確率的推論の健全性を保証する。この枠組みでは、推論の非単調性が自然な形で実現される。

以下、第2章で PD と PW を詳しく紹介し、第3章でシステムと外界を分離して論理式の観測を定式化する。そして、第4章で PD と PW を統合する新しい意味論を提案し、第5章で推論体系とその健全性について述べる。

2 従来の確率論理の意味論

2.1 領域に分布を張る方法 PD

PD の構造 S_1 は $\langle D, \pi, \mu\rangle$ で定義される [4]。D は領域である。π は解釈関数で、個体定数を D の個体に、n 項述語記号を D 上の n 項関係に割り当てる。μ は D 上の確率分布である。また、変数割当て関数を v とし、v が個体変数の n 項組 $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ を個体の n 項組 $\vec{d}=(d_1,\cdots,d_n)$ に割り当てることを $v(\vec{x}/\vec{d})$ と書く[2]。

構造 S_1 と変数割当て v が与えられると、論理式 α の2値の真理値が決まる。その真理値を $\tau_{S_1,v}(\alpha)$ と書く。$\tau_{S_1,v}(\alpha)$ は、通常の述語論理と同様に集合論的に決められる。たとえば、定数 a 、1項述語 q について、$\pi(a) \in \pi(q)$ のとき $\tau_{S_1,v}(q(a))=1$ となる。

論理式 α の確率的な真理値は、領域 D の分布 μ にしたがって変数に個体を割り当てた時の α の2値の真理値を平均することにより得られる。[3]と

[1] この他に、論理式の集合に確率分布を張る方法がある [3, 11] が、本稿では割愛する。

[2] 以下では、単に、個体定数を定数、個体変数を変数、述語記号を述語と呼ぶ。

[3] 本稿の確率言明の表現は [1, 4] とは異なる。[1, 4] では確率言明をさらに2値論理式で表現するため、論理式の真理値は2値となる。たとえば、「A が成り立つ確率は 0.9」という命題の真偽を2値論理式で表現する。それに対して、本稿の方法では確率を直接の真理値とする。すなわち、命題 A の真理値を 0.9 とする。しかし、両者の確率構造そのものは本質的に同じである。PW についても同様である。

の操作を不定限量と呼び、不定限量された変数を ^{D} によって標記する。簡単のため α の変数をすべて不定限量するとして、その確率的な真理値を $\tau_{S_1}(^D\vec{x}\,\alpha)$ と書き、次のように定義する。

$$\tau_{S_1}(^D\vec{x}\,\alpha) = \sum_{\vec{d}\in D^n} \tau_{S_1,v(\vec{x}/\vec{d})}(\alpha)\mu(\vec{d})$$

ただし、$\mu(\vec{d})$ は D^n 上の同時分布である。

例 1 $D = \{d_1, d_2, d_3\}$ とし、述語として $bird, fly$ を考え、その解釈を $\pi(bird) = \{d_1, d_2\}$, $\pi(fly) = \{d_1, d_3\}$ とする。確率分布 μ を $\mu(d_1) = 0.2$, $\mu(d_2) = 0.5$, $\mu(d_3) = 0.3$ とすると、各式の真理値は次のようになる。

$$\tau_{S_1}(^D x\, bird(x)) = 0.7$$
$$\tau_{S_1}(^D x\, fly(x)) = 0.5$$

□

このように、PD は不特定の個体に関する確率を表現するのに適しているが、解釈関数 π が固定されているため、具象式（引数がすべて定数の論理式）の真理値は 2 値になり、確率的な真理値が表現できない。たとえば、例1で、定数を a とし、$\pi(a) = d_1$ とすると、$\tau_{S_1}(fly(a)) = 1$ となる。

2.2 可能世界に分布を張る方法 PW

PW の構造 S_2 は、$\langle D, W, \Pi, \mu\rangle$ で定義される [4]。D は領域、W は可能世界の集合である。Π は解釈関数の集合で、その要素 π_w は可能世界 $w \in W$ において、定数を D の個体に、n 項述語を D の n 項関係に割り当てる。μ は W 上の確率分布である。

構造 S_2、可能世界 w、変数割当て v が与えられると、論理式 α の 2 値の真理値が決まる。その真理値を $\tau_{S_2,w,v}(\alpha)$ と書く。

論理式 α の確率的な真理値は、可能世界に張られた確率分布によって真理値 $\tau_{S_2,w,v}(\alpha)$ を平均することにより得られる。簡単のため、α は自由変数を含まないとして、この確率的な真理値を $\tau_{S_2}(\alpha)$ と書き、次のように定義する。

$$\tau_{S_2}(\alpha) = \sum_{w\in W} \tau_{S_2,w,v}(\alpha)\mu(w)$$

例 2 構造 S_2 を $(\{a,b\}, W, \Pi, \mu)$ とする。述語を fly とし、定数を a, b とし、定数は S_2 の個体を直接指示する。各可能世界 w_i に対して、解釈関数 $\pi_{w_i} \in \Pi$ を

$$\pi_{w_1}(fly) = \{a, b\}, \quad \pi_{w_2}(fly) = \{a\}$$
$$\pi_{w_3}(fly) = \{b\}, \quad \pi_{w_4}(fly) = \{\}$$

とし、可能世界上の確率分布 μ を、$\mu(w_1) = 0.2$, $\mu(w_2) = 0.4$, $\mu(w_3) = 0.1$, $\mu(w_4) = 0.3$ とすると、真理値は次のようになる

$$\tau_{S_2}(fly(a)) = 0.6$$
$$\tau_{S_2}(fly(b)) = 0.3$$

□

このように、PW は具象式の確率を表現するのに適するが[4]、領域 D に確率分布が設定されていないため、不特定の個体に関する確率は表現できない。

2.3 問題点

以上見てきたように、PD は不特定の個体に関する確率、PW は具象式の確率を表現するのに適し、両者には一長一短がある。このため、両者を統合する方法が検討されている [4]。この方法では、確率分布を領域 D と可能世界集合 W の両方に設定する。そして、不特定の個体 x について $fly(x)$ が成り立つ確率が τ_1 となる可能世界が τ_2 の確率で存在するという形で 2 種類の確率を併用する。これは、一見両者を統合したようであるが、依然として次のような問題が残っている。

1つは、PD での真理値と PW での真理値の関係である。Halpern は、

$$\tau_{S_1}(^D x\; q(x)) = \tau_{S_2}(q(a)) \tag{1}$$

を仮説として提出しているが、その妥当性は明かでない [4]。

次に、PD では不定限量された変数に定数を代入すると健全性が成り立たないという問題がある。たとえば、$\tau_1(^D x fly(x)) = 0.8$ で、x に定

[4] 存在限量式や全称限量式の確率も表現できる。

数 a を代入すると、$\tau_1(fly(a)) = 0.8$ となる。しかし、2.1 節で述べたように具象式に対する真理値は2値になるはずであり、この結果は正しくない。代入は確率的推論で用いられるため、確率的推論の健全性も成り立たなくなる。

これらの問題には、個体の識別という問題が深く関係している。本稿では、論理式の観測という概念を導入して、これらの問題の解決を図る。

3 観測の形式化

3.1 システムと外界

これまでの意味論では、論理式を解釈し推論する主体(以後、システムと呼ぶ)と外界が区別されていない。しかし、システムが入力する論理式は、一般に、外界で生じた事象や状態を表現しているはずである。そこで、本稿では、システムと外界を分離することにより意味論を考え直す。

システムは外界の事象を観測して、それを一階言語Lで表現する。システムはLの意味論的構造を構成して、論理式の解釈を行なう。標準的な外延的意味論では、Lの外部に存在する個体の集合を、指示対象を構成するための領域 D とする。そして、Lの定数を D の要素に、Lの述語を D 上の関係に写像する解釈関数を定義する。ここで、D の要素はLの外部の存在であるから、解釈関数において D の要素をLの記号で定義することはできない。なぜなら、D の要素はLの記号の指示対象そのものであり、それを再びLの記号で定義するのは循環定義になってしまうからである。したがって、D の要素はLよりも一段高いメタ言語で記述されることになる。ただし、エルブラン空間やヘンキンの定理では個体を定数そのものとしており、Lの外部の個体ではない。これは、4.2 節で述べる引数で個体を指示する方法に相当する。

システムと外界の関係を図1に示す。同図でAは言語Lの定数の集合、Qは述語の集合であり、システムはこれらの記号を解釈関数 π_w によって外界の領域 D と対応づける。ただし、w は解釈関数を選択するパラメータで可能世界と呼ぶ。

ここで、システムによる外界の観測を形式化するために、この図式を図2のように変換する。ここでは、外界自身も言語Lをもち、内部で解釈関数 π_w に基づいて論理式を構成して出力する。システムがこの論理式を入力することを観測と呼ぶ。ここで、外界の解釈関数 π_w は全関数とする。一般に、図1で π^*_w は部分関数(AやQの要素で値が定義されないものを許す関数)であるが、これはシステムが論理式を部分的にしか観測できない場合に相当するため、システムの視点からは図1と図2は等価と見なすことができる。

以上の議論より、今後、図2にしたがって確率論理の意味論を構築していく。

3.2 外界の構造

まず、外界における言語Lの構造 S を定義する。

定義 1 構造 S を $\langle D, W, \Pi, \mu\rangle$ とする。D は領域、W は可能世界の集合である。D は可算または非可算、W は非可算である。Π はすべての解釈関数の集合、μ は $D \times W$ 上の確率分布である。□

D や W は一般に連続濃度なので、確率測度は $\mu(db, dw)$, $b \in D$, $w \in W$ と書く。ただし、表記を簡単にするため、D や W の周辺分布や D^n 上の結合分布もすべて μ を使って、$\mu(db), \mu(dw), \mu(d\vec{b})$ のように表記する。なお、$\mu(d\vec{b}) = \mu(db_1)\cdots\mu(db_n)$ である。

ここで、2つの前提をおく。

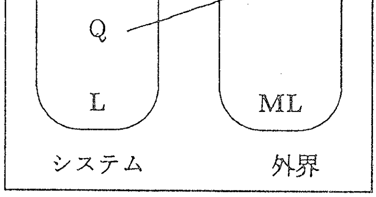

図1. システムと外界の関係

前提 1 解釈関数 π_w は全関数である。すなわち、任意の $w \in W$ において、すべての定数、述語の指示対象が π_w により確定する。

前提 2 可能世界は外界に存在する形而上学的な実体ではなく、解釈関数を指示する添え字と見なす。

前提1は、外界はどの可能世界においてもあらゆる論理式の真理値を真か偽に決定できることを意味する。しかし、システムが論理式の真理値を完全に決定できるとは限らない。前節で述べたように、観測が不完全の場合、システムの解釈関数は部分関数になる。ただし、本稿での意味論構築では、観測は完全であると仮定して議論を進める。

前提2の立場に基づくと、任意の可能世界の集合 W' から解釈関数の集合 Π と1対1対応する可能世界集合を構成できる。すなわち、Π のある要素 π に対応する要素が W' にない場合は、測度0の要素を W' に加えて、π と対応させる。また、π に対応する W' の要素が複数ある場合は、それらの測度の和を測度として持つ1つの要素にまとめて π と対応させる。

これにより、可能世界の構造を整理することができる。いま、解釈は定数割当てと述語割当てからなり、しかも Π はすべての解釈関数の集合であるから、定数割当て関数の集合を Π_A 、述語割当て関数の集合を Π_Q として、$\Pi = \Pi_A \times \Pi_Q$ とできる。ここで、Π_A, Π_Q とそれぞれ1対1対応する集合 W_A, W_Q を用意すると、$\Pi = \Pi_A \times \Pi_Q$ は、$W_A \times W_Q$ と1対1対応する。したがって、

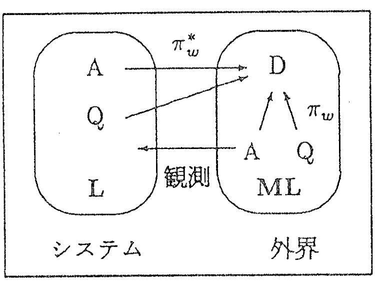

図2. システムによる外界の観測

$W_A \times W_Q$ の要素は解釈関数を指示する添え字と見なすことができる。これより、可能世界 $w \in W$ を $(w_a, w_q) \in W_A \times W_Q$ と表わすことができる。以上のことから、今後、可能世界と解釈関数を全く同一視することがある。

3.3 外界の生成する論理式

前提1より、構造 S の各可能世界ですべての論理式の真偽が完全に決定されるから、外界の生成する論理式は、1つの可能世界内では、リテラルの連言式として表現できる。

また、外界の生成する論理式はすべて具象式とすることができる。なぜなら、標準的な一階論理では、変数の値は変数割当て関数 v によって決められるが、v を解釈関数 π_a に融合すれば、変数は定数と見なすことができるからである。すなわち、単に個体を指示する機能においては、変数と定数を区別する必要はない[5]。

変数が意味を持つのは、限量化された場合である。ところが、存在限量式 $\exists x \alpha$ は α を満たす個体が1つ以上存在することを述べているが、これは外界の状態そのものの言明ではなく、状態に関する高階の言明になっている。しかし、外界は自分の状態を解釈関数により完全に記述できるから、このような言明をする必要はない。このような言明が必要なのは、外界の状態を認識するシステムの方である。全称限量についても同様である。

以上の考察に基づいて、外界が論理式を構成する手順を次のように定める。まず、分布 μ に従って、定数割当て $w_a \in W_A$ と述語割当て $w_q \in W_Q$ を選ぶ。このとき、π_a は全関数だから、各定数に対応する個体はすでに選択されたことになる。そして、すべての定数の組にすべての述語を適用して、解釈 π_{w_a, w_q} で成り立つすべての論理式の連言を出力する。こうしてできる連言式は、定数の列を $\vec{a}$ 、n 項述語の集合を Q_n 、$\vec{a}$ から任意の n

[5]ただし、自由変数を固定指示子[7]として使う場合は、特別の扱いが必要となるが、本稿では紙数の都合で考えない。

項組を抽出して出力する関数の集合を F_n として、

$$\bigwedge_{n\geq 1}\bigwedge_{q\in Q_n}\bigwedge_{f\in F_n}\tilde{q}(f(\vec{a})) \qquad (2)$$

と表わすことができる。ただし、$\tilde{q}(f(\vec{a}))$ は $q(f(\vec{a}))$ が真の時は $q(f(\vec{a}))$ 、偽の時は $\neg q(f(\vec{a}))$ を表わす。n を有限とすると $\tilde{q}(f(\vec{a}))$ はたかだか可算個となるから、この連言式は構成可能である。

3.4 引数の変化

外界の生成する論理式の引数はすべて定数であるが、システムが観測する時には存在限量変数になってしまう。これを、可能世界の同型性という概念により証明する。

定義 2 2つの可能世界 w_1, w_2 が次の関係を満たすとき、互いに同型であると言う。

$$\forall\alpha,\ \tau_{S,w_1,v}(\alpha)=\tau_{S,w_2,v}(\alpha) \qquad \square$$

可能世界の同型性は、解釈関数が定数割当てと述語割当てから成るため、真理値割当てに冗長性が生じることに起因する。

同型な可能世界での論理式の真理値は全く同一であるうえに、システムには可能世界の識別子 w は入力されないから、次の補題は明かであろう。

補題 1 システムからは、同型な可能世界は区別できない。□

これより、次の定理が成り立つ。ここで、定数は構造 S の領域 D の個体を可能世界 w の解釈関数 π_w にしたがって指示することに注意する。

定理 2 構造 S において、観測論理式の引数 a は、システムにとって存在限量変数となる。

(証明) 引数 a は外界にとっては定数である。ところが、補題1より、構造 S には、システムからは全く区別のつかない同型な可能世界が存在する。これらの同型な可能世界それぞれにおいて定数 a は異なる個体 d_i を指しうるため、システムは a の指示する個体を特定できず、単に a の指す個体が D に存在することしかわからない。よって、a はシステムにとっては存在限量変数となる。∎

定理2は、構造 S のもとでは、システムは記号の指示対象を全く同定できないことを意味する。したがって、S はシステムの用いる意味論の構造として適当でない。そこで、S とは別の構造を構成する必要がある。新しい構造の領域は、システムが言語Lできちんと指示できるような個体の集合にしなければならない。このような個体指示の方法として、次の2つが考えられる。

1. 個体を引数の字面で識別する
2. 個体を述語で特徴づける

前者は、いわゆる固定指示子による直接指示に相当し、同じ字面の引数で指示される個体は同じ個体と見なす。後者は、記述説に相当し、同じ述語で特徴づけられる個体は同じ個体と見なす [10]。次章では、この2つの方法に基づいて意味論を構築する。

4 観測にもとづく意味論

4.1 引数による直接指示

この方法では、同じ字面の引数は可能世界に関わらず常に同じ個体を指示し、異なる字面の引数は異なる個体を指示するから、領域は言語Lの定数集合 A そのものとなる。ここで、定義2の同型性による可能世界の同値類 Δ_i を考え、それによる可能世界集合 W の分割

$$\{\Delta_i \mid W=\bigcup_i \Delta_i,\ \Delta_i\cap\Delta_j=\phi\ (i\neq j)\}$$

を新たな可能世界集合とする。ここで、同値類 Δ_i をあらためて w_i で表わし、その内容を強調する時には $\Delta(w_i)$ で表わす。これをもとに、意味論の構造を次のように定義する。ただし、以下で、α は観測された論理式そのままである。

定義 3 構造 S_c を $\langle D_c, W_c, \Pi_c, \mu_c\rangle$ とする。D_c は定義域で $D_c=A$ である。W_c は W の同値類 w_i の集合である。Π_c は解釈関数の集合で、その要素 π_w は

$$\forall\alpha,\ \forall w_c\in W_C,\ \forall w\in\Delta(w_c),$$
$$\tau_{S_c,w_c}(\alpha)=\tau_{S,w,v}(\alpha)$$

を満たすように定める。μ_c は、W_c 上の確率分布で

$$\mu_c(dw_c) = \int_{w \in \Delta(w_c)} \mu(dw)$$

とする。[6] □

定義 4 構造 S_c での具象式 α の真理値を、

$$\tau_{S_c}(\alpha) = \int_{w_c \in W_c} \tau_{S_c, w_c}(\alpha) \mu_c(dw_c)$$

と定義する。ただし、α は連言式である。□

これは、システムの視点から見た場合の PW に相当する。

一方、構造 S での具象式の真理値は、

$$\tau_S(\alpha) = \int_{w \in W} \tau_{S,w,v}(\alpha) \mu(dw) \qquad (3)$$

であるが、この値は構造 S_c での真理値と一致することが示される。

定理 3 $\tau_S(\alpha) = \tau_{S_c}(\alpha)$

(証明) 定義 3に注意して次の結果を得る。

$$\begin{aligned}(3) &= \int_{w_c \in W_c} \tau_{S_c, w_c}(\alpha) \int_{w \in \Delta(w_c)} \mu(dw) \\ &= \int_{w_c \in W_c} \tau_{S_c, w_c}(\alpha) \mu_c(dw_c) \\ &= \tau_{S_c}(\alpha)\end{aligned}$$

■

この方法の欠点は、可能世界によって述語の解釈が変化するため、述語で個体を特徴づけられないことである。そのため、変数で個体を指示することが意味をなさなくなる。たとえば、可能世界 w_1 での $fly(x)$ と可能世界 w_2 の $fly(x)$ では fly の解釈が変化しているため、x がどういう性質を持つ個体を指示しているのかわからなくなる。このことから、システムにとっては、PW で変数を扱うのは意味論的に不合理であることがわかる。

[6] D_c 上の分布も、定数の観測頻度として原理的には考えられる。しかし、D_c は可算濃度であるから、無限個の論理式の観測が可能だとすると分布が一様になってすべての測度が 0 になるため都合が悪い。そのため、観測は有限にとどめる必要がある。この D_c 上の分布は定理 5で使われる。

4.2 述語による記述

この方法では、述語で記述される状態や属性だけに基づいて個体を同定するから、引数の字面は個体同定に無関係となる。たとえば、述語が q, r の 2 つしかないとして、論理式 $q(a) \wedge r(a)$ と $q(b) \wedge r(b)$ が観測された場合、引数 a と b は同じ個体を指示していると見なされる。したがって、この時は、定理 2で述べたように、引数は存在限量変数となる。そこで、以後、観測論理式 α の引数は変数 $\vec{x}$ で付け替えたと見なす。定数がなくなったので、可能世界は述語割当て w_q だけとなるが、表記の煩雑さを避けるため、w_q を単に w と書く。

引数が個体同定に寄与しないから、システムが同定する個体は、述語に基づく同値類となる。これを次のように定式化する。

定義 5 $\vec{b_1}, \vec{b_2} \in D^\omega$ が、可能世界 $w \in W_Q$ において、

$$\forall \alpha,\ \tau_{S,w,v(\vec{x}/\vec{b_1})}(\alpha) = \tau_{S,w,v(\vec{x}/\vec{b_2})}(\alpha)$$

を満たすとき、$\vec{b_1}, \vec{b_2}$ は可能世界 w において同値であると言う。ただし、ω は極限数である。□

ここで、定義 5の同値関係による同値類を $\Delta^\omega_{w,i}$ とし、可能世界 w における領域の直積 D^ω の分割

$$\{\Delta^\omega_{w,i} \mid D^\omega = \bigcup_i \Delta^\omega_{w,i},\ \Delta^\omega_{w,i} \cap \Delta^\omega_{w,j} = \phi\ (i \neq j)\}$$

を考える。同値類 $\Delta^\omega_{w,i}$ の構成要素となる $\vec{b} (\in D^\omega)$ は可能世界 w によって変化するが、システムは同値な $\vec{b}$ を区別できないから、$\Delta^\omega_{w,i}$ の構成要素の変化は知ることができない。システムからわかるのは、$\Delta^\omega_{w,i}$ の記述だけである。この記述は述語だけで決まり、可能世界には依存しない。たとえば、$\Delta^\omega_{w,i}$ を $q(\vec{x}) \wedge r(\vec{x})$ を満たす同値類の集合とすると、どの個体が $\Delta^\omega_{w,i}$ に属するかは可能世界に依存するが、記述 $q(\vec{x}) \wedge r(\vec{x})$ は可能世界に依存しない。そこで、同値類 $\Delta^\omega_{w,i}$ の記述を $\vec{e_i}$ とし、$\Delta^\omega_{w,i}$ をあらためて $\Delta_w(\vec{e_i})$ で表わす。そして、$\vec{e_i}$ を新たに個体の ω 項組と見なして新たな構造 S_o を定義する。

定義 6 構造 S_o を $\langle D_o, \pi_o, \mu_o \rangle$ とする。 D_o は領域で、D_o^ω が D^ω の同値類 $\vec{e}$ の集合となっている。π_o は n 項述語記号 q を D_o の n 項関係に割り当てる解釈関数であり、

$$\forall \alpha,\ \forall w \in W_Q,\ \forall \vec{e} \in D_o^\omega,\ \forall \vec{b} \in \Delta_w(\vec{e}),$$
$$\tau_{S_o, v(\vec{x}/\vec{e})}(\alpha) = \tau_{S, w, v(\vec{x}/\vec{b})}(\alpha)$$

を満たすように定める。μ_o は D_o^ω 上の確率分布で、

$$\mu_o(\vec{e}) = \int_{w \in W_Q} \int_{\vec{b} \in \Delta_w(\vec{e})} \mu(d\vec{b}, dw)$$

とする。□

同値類に属する個体に対する論理式の真理値は可能世界によらず一定となるから、この定義は自然であろう。構造 S_o では、構造 S の可能世界は 1 つに縮退してしまい、その分布は D_o^ω 上の分布に吸収されている。なお、$\mu_o(\vec{e}) \neq \mu_o(e_1)\mu_o(e_2)\cdots$ である。

定義 7 構造 S_o での不定限量式 ${}^D\alpha$ の真理値を、

$$\tau_{S_o}({}^D\alpha) = \int_{\vec{e} \in D_o^\omega} \tau_{S_o, v(\vec{x}/\vec{e})}(\alpha)\mu_o(d\vec{e})$$

と定義する。ただし、α は連言式、${}^D\alpha$ は ${}^D\vec{x}\alpha(\vec{x})$ の略記である。□

これは、システムの視点から見た場合の PD に相当する。

一方、構造 S での不定限量式の真理値は、

$$\tau_S({}^D\alpha) = \int_{w \in W_Q} \int_{\vec{b} \in D^\omega} \tau_{S, w, v(\vec{x}/\vec{b})}(\alpha)\mu(d\vec{b}, dw) \quad (4)$$

であるが、この値は構造 S_o での真理値と一致することが示される。

定理 4 $\tau_S({}^D\alpha) = \tau_{S_o}({}^D\alpha)$

(証明) 定義6より、$\vec{b} \in \Delta_w(\vec{e})$ に対して、

$$\tau_{S_3, w, v(\vec{x}/\vec{b})}(\alpha) = \tau_{S_o, v(\vec{x}/\vec{e})}(\alpha)$$

であることに注意して、次の結果を得る。

$$\begin{aligned}
(4) &= \int_{w \in W_Q} \int_{\vec{e} \in D_o^\omega} \int_{\vec{b} \in \Delta_w(\vec{e})} \tau_{S, w, v(\vec{x}/\vec{b})}(\alpha)\mu(d\vec{b}, dw) \\
&= \int_{\vec{e} \in D_o^\omega} \tau_{S_o, v(\vec{x}/\vec{e})}(\alpha) \int_{w \in W_Q} \int_{\vec{b} \in \Delta_w(\vec{e})} \mu(d\vec{b}, dw) \\
&= \int_{\vec{e} \in D_o^\omega} \tau_{S_o, v(\vec{x}/\vec{e})}(\alpha)\mu_o(d\vec{e}) = \tau_{S_o}({}^D\alpha) \quad ∎
\end{aligned}$$

また、構造 S_c による真理値と構造 S_o による真理値の間には、次の関係が成り立つ。

定理 5 $\tau_{S_o}({}^D\alpha) = \sum_{\vec{a}} \tau_{S_c}(\alpha)\mu(\vec{a})$

(略証) 個体列 $\vec{b}$ は、定数割当て w_a と定数列 $\vec{a}$ によって決まるから、

$$\mu(d\vec{b}, dw_q) = \int_{\{(\vec{a}, w_a) | \pi_{w_a}(\vec{a}) = \vec{b}\}} \mu(\vec{a}, dw_a, dw_q)$$

となる。また、構造 S_o では α の引数が変数となり、引数名の付け替えに対して真理値が不変であることに注意して定理が証明される。∎

定理 5は、S_o での不定限量式の真理値が S_c の具象式の真理値を領域 D_c で平均した値と等しいことを意味する。これにより、2 章の式 (1) は成り立たないことがわかる。

構造 S_o では観測過程で定数がいったん消滅するが、次章で述べるように、システムが同定した主観的個体を指示する記号として定数を新たに導入することができる。一方、4.1 節で述べたように、構造 S_c では変数は原理的に使えない。したがって、S_c は命題レベルの確率論理しか扱えない。以上より、一階レベルの確率論理の意味論は S_o に基づくべきであることがわかる。

4.3 主観的個体と定数

領域 D_o の要素は完全な述語記述による同値類であるから、その状態や属性は変化しない。しかし、直観的には、同じ個体でもその状態や属性は変化する。したがって、システムにとっての主観的な個体は D_o の要素とは異なるものであることがわかる。そこで、主観的個体を部分的な述語記述で同定される D_o の要素とする。すると、その状態や属性は変化しうる。そして、定数を主観的個体（以後、単に個体と呼ぶ）を指示する記号として導入し、次のような個体同定リストを用意する。

定義 8 定数 a_i とその述語による記述 Q_i のペアの集合を個体同定リストと呼び、

$$I_D = \{a_1/Q_1, \cdots, a_N/Q_N\}$$

と表わす。□

一般には Q_i は任意の連言式であるが、ここでは簡単のため、有限個の 1 項述語からなる同一引数の連言式とする。たとえば、$a_i/q_1(z_i) \wedge \cdots \wedge q_n(z_i)$ は、定数 a_i が $q_1(z_i) \wedge \cdots \wedge q_n(z_i)$ を満たす D_o の要素のどれかであることを意味する。

述語記述は個体の属性や状態を表わしているが、新しい論理式が入力されることは個体の状態が変化したことを意味する。そこで、時点 t における各個体の状態を $Q_t(\vec{a})$ で表わす。これを時点 t での状況と呼び、単に Q_t で表わすこともある。$Q_t(\vec{a})$ は個体同定リストのすべての個体に関する論理式の連言である。$Q_t(\vec{a})$ は入力論理式によって次のように更新される。

定義 9 $Q_t(\vec{a})$ の初期値は個体同定リストより、$Q_{t_0}(\vec{a}) \equiv Q_1(a_1) \wedge \cdots \wedge Q_N(a_N)$ とする。入力論理式 $\alpha(\vec{z})$ のある引数 z_j に関して、a_i を z_j で置換することにより $Q_i(a_i) \subset \alpha(\vec{z})$ となる a_i を z_j に同定する。$\alpha(\vec{z})$ のすべての z_j についてこれを行なう。該当する a_i がない場合は I_D に存在しない適当な定数を割り当てる。$\vec{a}$ に新しい定数を加えた定数列を $\vec{a'}$ として、$\vec{a'}$ に対応するよう $\vec{z}$ を並べかえて $\vec{z'}$ とする。そして、$Q_{t+1}(\vec{a'}) = Q_t(\vec{a}) \wedge \alpha(\vec{z'}/\vec{a'})$ とする[7]。ただし、$\alpha(\vec{z'}/\vec{a'})$ は、α の引数 $\vec{z'}$ に $\vec{a'}$ を代入したことを表わす。□

状況 Q_t を用いて不定限量式の変数を定数に置換するが、この操作を代入と呼ぶ。

定義 10 状態 $Q_t(\vec{a})$ おいて、不定限量式 α の引数 $\vec{x}$ に $\vec{a}$ を代入した時の真理値を

$$\tau_{S_o}(\alpha(\vec{x}/\vec{a})) = \frac{\tau_{S_o}({}^D Q_t(\vec{a}/\vec{x}) \wedge \alpha)}{\tau_{S_o}({}^D Q_t(\vec{a}/\vec{x})} \qquad (5)$$

とする。□

定義10は、時点 t で Q_t を満たすものが主観的個体 $\vec{a}$ であるから、Q_t を満たすものが α を満たす条件付き確率を α に $\vec{a}$ を代入した時の真理値とすべきであるという考えに基づく。これは Bacchus による信念の表現 [1] と基本的に同じ考え方であるが、Bacchus はその意味論を全く与えていない。本稿の特徴は、その根拠となる意味論を定式化し、主観的個体や状況、個体同定などの機構を導入している点にある。

定義 10による代入では、個体 a に合わせて、代入された論理式の真理値が変わるので健全性が保たれる。従来の代入 $\tau({}^D q(x)) = \tau(q(a))$ では、個体 a の属性や状態に関する情報が何も取り入れられないため、健全性が成り立たないのである。

5 公理系と健全性

公理および推論規則を次のように定義する。

定義 11 (公理系)

公理：A1. $\tau(T) = 1$ A2. $0 \leq \tau(\alpha) \leq 1$

推論規則：

R1.$(\alpha \wedge \beta : \tau_1), (\alpha \wedge \neg\beta : \tau_2)$ ならば $(\alpha : \tau_1 + \tau_2)$

R2.$(\alpha : \tau_1), (\alpha \wedge \beta : \tau_2)$ ならば $(\alpha \wedge \neg\beta : \tau_1 - \tau_2)$

R3.$(\alpha : \tau_1), (\alpha \wedge \neg\beta : \tau_2)$ ならば $(\alpha \wedge \beta : \tau_1 - \tau_2)$□

$(\alpha \to \beta) \equiv \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$ であり、$\tau(\neg(\alpha \wedge \neg\beta)) = 1 - \tau(\alpha \wedge \neg\beta)$ と考えれば、推論規則 R3 は 2 値論理での分離規則の拡張ととらえることができる。ただし、β は分離されずに $\alpha \wedge \beta$ が得られる。

以上の公理に固有公理を加えて演繹推論を行なう。固有公理は不定限量式の集合 Γ として与える。この Γ を理論と呼ぶ。理論 Γ のすべての論理式の真理値を満たす構造 S_o を Γ の**モデル**と呼び、M_Γ で表わす。また、モデル M_Γ での α の真理値を $\tau_{M_\Gamma}(\alpha)$ と表わす。

定義 12 理論 Γ のすべてのモデルにおいて α が真理値 τ で成り立つ時、$(\alpha : \tau)$ を Γ の帰結と言い、$\Gamma \models (\alpha : \tau)$ と表わす。この時の真理値を $\tau_\Gamma(\alpha)$ と書く。□

定義 13 理論 Γ に推論規則を有限回適用して $(\alpha : \tau)$ が得られることを、$\Gamma \vdash (\alpha : \tau)$ と書く。□

[7] α が Q_t に矛盾する論理式をもつ場合の処理が必要だが、ここでは考えない。

理論 Γ は不定限量式の集合であったが、状況 Q_t が決まれば具象式の集合として理論を与えることができる。これを具象理論と呼ぶ。

定義 14 状況 Q_t における具象理論を Γ_t とする。状況 $Q_t(\vec{a})$ の引数 $\vec{a}$ を適当な代入 $\vec{x}/\vec{a}$ の逆変換で変数に置換した式 $(Q_t(\vec{a}/\vec{x}) : \tau_t)$ が Γ にあるとする。もし、なければ、状況 Q_t における具象化はできない。次に、$Q_t(\vec{a}/\vec{x})$ を部分として持つ連言式を理論 Γ から探す。その式を $({}^D Q_t(\vec{x}) \wedge \beta : \tau_1)$ とすると、$(\beta(\vec{x}/\vec{a}) : \frac{\tau_1}{\tau_t})$ を Γ_t に加える。$Q_t(\vec{a}/\vec{x})$ を部分として持つすべての連言式についてこれを行なう。また、$(Q_t(\vec{a}) : 1)$ も Γ_t に加える。□

具象理論 Γ_t に対応して、状況 Q_t でのモデルが存在する。これを具象モデルと呼び、M_{Γ_t} で表わす。

演繹推論の健全性は次のように保証される。

定理 6 $\Gamma_t \vdash (\alpha : \tau)$ ならば $\Gamma_t \models (\alpha : \tau)$

(証明) Γ_t を満たす任意のモデル M_{Γ_t} で、$\tau_{M_{\Gamma_t}}(\alpha) = \tau$ を言えばよい。公理 A1,A2 は明らかである。理論 Γ_t の固有公理の真理値 $\tau_{\Gamma_t}(\alpha)$ は、Γ_t から定義14により求められるが、その値は定義10より、$\tau_{M_{\Gamma_t}}(\alpha(\vec{x}/\vec{a}))$ と等しい（Γ_t により S_o が制約されて M_{Γ_t} となっていることに注意）。したがって、Γ_t の固有公理はすべての M_{Γ_t} で成り立つ。

また、推論規則 R1 〜 R3 は有限加法性 $\tau_{\Gamma_t}(\alpha \wedge \beta) + \tau_{\Gamma_t}(\alpha \wedge \neg\beta) = \tau_{\Gamma_t}(\alpha)$ に基づいているが、これは定義 7、10より、Γ_t を満たす任意のモデル M_{Γ_t} で成り立つことは容易に確認できる。∎

上記の推論では、状況が変化すれば、具象式としての固有公理の真理値が変化する。それによって定理の真理値も変化するから、上記の枠組みは非単調推論を自然に実現していることになる。

6 まとめ

確率論理における従来の問題を解決し、新しい意味論を構築した。まず、2 章の仮定 (1) は、定理 5で示したように成り立たない。また、新しい意味論では、代入や推論の健全性は成り立つ。しかも、推論の非単調性が自然に実現される。この鍵は、定数集合を領域とせずに、述語による同値類を領域とした新しい構造を導入した点にある。

なお、紙数の都合で述べられなかったが、推論の完全性も保証される。今後の課題として、個体同定や具象化の具体的アルゴリズムの開発があげられる。

謝辞

多くの有益な助言をいただいた日本電気 C&C 情報研究所の大野和彦氏ならびに竹内純一氏に深く感謝致します。

参考文献

[1] Bacchus,F., Statistically Founded Degrees of Belief, Proceedings of the Canadian Artificial Intelligence Conference (1988) 59-66.

[2] Bacchus,F., On Probability Distributions Over Possible Worlds, Proceedings 4th Workshop on Uncertainty in Artificial Intelligence (1988)15-21.

[3] Gaifman,H., Concerning measures in first order calculi, Israel J. Math.2 (1964)1-18.

[4] Halpern,J.Y., An Analysis of First-Order Logics of Probability, Artificail Intelligence 46 (1990) 311-350.

[5] Hoover,D.N., Probability logic,Annals of Mathematical Logic 14 (1978)287-313.

[6] Keisler,H.,J., Probability quantifiers, in: Barwise,J. and Feferman,S.,eds., Model-Theoretic Logics (Springer, New York,1985)509-556.

[7] Kripke,S.A., Naming and Necessity, Basil Blackwell and Harvard University Press, 1980.

[8] 松嶋他、不確実性様相のための確率世界論理、SITA'89 (1989)701-706.

[9] Nilsson,N.J., Probabilistic Logic, Artifitial Intelligence 28 (1986) 71-87.

[10] 野本和幸、「現代の論理的意味論」、岩波書店、1988.

[11] 大野和彦、確率論理による学習型文献検索、人工知能学会研究会 SIG-FAI-8803-2 (1988)11-20.