プログラミング-言語・基礎・実践- 21－22
(1995. 3. 10)

妨害の下での最短経路問題の複雑さ

山口一章，荒木俊郎，柏原敏伸

大阪大学

〒５６０　大阪府豊中市待兼山町１－３　基礎工学部
情報工学科　柏原研究室　山口一章

電話
06-850-6578
ky@ics.es.osaka-u.ac.jp

あらまし　有向グラフ $G=(V,A)$ と妨害数なる正整数 K，各辺の重み (正) が与えられている．プレイヤー１は出発地点から，１回に１つの辺をたどって目標地点まで行く．プレイヤー２は自分の手番にいくつかの辺を切断する．プレイヤー２の切断できる辺の数はゲームを通じて K 本までとする．プレイヤー１は道のりができるだけ小さくなるようにし，プレイヤー２はできるだけ大きくなるようにする．本稿では，２人が最善を尽くしたときの道のりを $O(n^K(m+n\log n))$ ($m=|A|$, $n=|V|$) 時間で求め得ることと，全ての辺の長さが１であるとしても，道のりを求める問題が P-SPACE-complete であることを示す．

キーワード　グラフ，最短経路，経路障害，２人ゲーム，P-SPACE 完全

The complexity of shortest path problem under obstruction

Yamaguchi Kazuaki, Araki Toshiro, Kashiwabara Toshinobu

Osaka University

Department of Information and Computer Sciences, Faculty of Engineering Science, Osaka University, Toyonaka-shi, 560 Japan

phone. 06-850-6578
ky@ics.es.osaka-u.ac.jp

Abstract

Let $G=(V,A)$ be a directed graph with (positive) arc-length, and an integer K is specified. Player1 attempts to move from starting point to destination, moving along one arc during each turn. Player2 deletes arcs from A during his turn. The number of arcs which Player2 can delete within a game is K. Player1 tries to keep the path length to a minimum value, while Player2 attempts to make it as large as possible. What value will it be? In this paper, we show that the problem can be solved in $O(n^K(m+n\log n))$ time ($m=|A|$, $n=|V|$), and that it is P-SPACE-complete even if every arc-length is 1.

key words　graph, shortest path, obstruction, 2 player game, P-SPACE-complete

1 まえがき

最短経路を求める問題はコンピュータサイエンスやオペレーションズリサーチにおける基本的な問題の一つである．最近では，様々な状況を設定してその下における最短経路を求める問題が考えられている[1]-[7]．例えば，Canadian Traveller's Problem と呼ばれる問題はいくつかの辺が通行できない可能性があり，そのことが現場に到着するまで分からないようなグラフ上で経路を考える問題である．Canadian Traveller's Problem は，一般の場合の Pspace-Complete 性が示され，K が定数である場合の多項式アルゴリズムが報告されている[1][2]．本稿では次のような問題を考える．

妨害最短経路問題

有向グラフ $G = (V, A)$，出発点，目的地なる G の 2 頂点 s, t，妨害数なる正整数 K，各辺に正実数の重み $\ell(\cdot)$ が与えられている．このとき，プレイヤー 1，プレイヤー 2 が以下のゲームをプレーする．プレイヤー 1，2 ともに全体が見えているものとする．

1. $v_0 = s, \quad \tau = 0$
2. プレイヤー 2 は A の部分集合で要素数が K 以下のものを 1 つ考える (空集合でも良い)．それを D とする．
3. $A \leftarrow A - D, \quad K \leftarrow K - |D|$
4. プレイヤー 1 は（この時点のグラフ $G = (V, A)$ において）v_τ から出ている辺を 1 つ選び，その終点を $v_{\tau+1}$ と名付ける．
5. $\tau \leftarrow \tau + 1$
6. $v_\tau \neq t$ ならば 2 に行く．
7. 終了．

$v_\tau = t$ となったとき，すなわちプレイヤー 1 が t に到達したときのプレイヤー 1 が選んだ辺の重みの和 $W \triangleq \sum_{i=0}^{\tau-1} \ell((v_i, v_{i+1}))$ を道のりと呼ぶ．途中で v_τ から出ている全ての辺が除かれたときや有限手数内に t に到達できないときは $W = \infty$ とする．

プレイヤー 1 が道のりをできるだけ小さくなるようにし，プレイヤー 2 が道のりをできるだけ大きくなるようにしたときの W の値は？

ある人が出発地から目的地まで車を使って移動するという状況について考える．目的地までの地図上の最短経路は事故や渋滞があれば予定の時間に間に合わなくなる可能性があるとする．早く到着できなくとも，道路の渋滞や事故があっても確実に予定の時間には間に合うような経路があればそちらを選ぶべきである．確実に到着できる 2 つの経路があれば早く到着できる方を選びたい．妨害最短経路問題はこのような問題をグラフ上の 2 人ゲームの問題に定式化したものである．

妨害最短経路問題では一度通った辺を妨害することが起こり得るが，それを禁止するような類似問題も考えられる．前出の Canadian Traveller's Problem は通過後の妨害を禁止するような 2 人ゲームの問題として定式化することができる．

妨害最短経路問題と Canadian Traveller's Problem で結果が異なる例を示す．図 1のグラフにおいて，a から d への辺の重みを 100，他の辺の重みを 1，妨害数を 2 とすると，妨害最短経路問題での最適値は 105，Canadian Traveller's Problem での最適値は 102 となる．

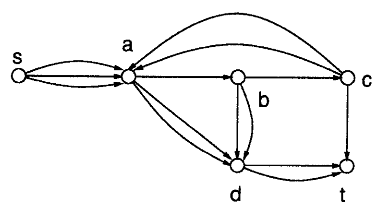

図 1: 2 つの問題で結果の異なる例

2 準備

有向グラフ G，出発点 s，目的地 t，妨害数 K，辺の重みが $\ell(\cdot)$ であるような妨害最短経路問題において考えるゲームをゲーム (G,s,t,K,ℓ) と書くことにする．

ゲーム (G,s,t,K,ℓ) において2人のプレイヤーが最善を尽くしたときのプレイヤー1の通る道のりを $w(G,s,t,K,\ell)$ と書く．混乱のない場合は t と ℓ を略してゲーム (G,s,K), $w(G,s,K)$ 等と書く．

グラフ $G=(V,A)$ 及び V の部分集合 V' と A の部分集合 A' に対し，$G-A'$ は辺集合 $A-A'$ による G の辺誘導部分グラフを表し，$G-V'$ は頂点集合 $V-V'$ による G の頂点誘導部分グラフを表すことにする．混乱のない限り，$G-\{a\}$ は $G-a$ と，$G-\{v\}$ は $G-v$ と略す．

$$\begin{aligned}\partial_A^G(v) &\triangleq \{(v,u)|(v,u)\in A\}\\ \partial_V^G(v) &\triangleq \{u|(v,u)\in A\}\end{aligned}$$

と定義する．混乱の生じない場合は単に $\partial_A(v), \partial_V(v)$ 等と書く．頂点 u から v への有向辺を (u,v) で表す．多重辺の表記法については後で触れる．辺 (u,v) の重み $\ell((u,v))$ を単に $\ell(u,v)$ と書く．

妨害最短経路問題のゲームにおいて，プレイヤー1が辺 (x,y) を選ぶことを，x から y へ進行するといい，プレイヤー2が辺集合 D を選ぶことを，D を切断するということにする．妨害数が K であるとはプレイヤー2がこれから K 本の辺を切断する権利を有することを表している．

3 アルゴリズム

$w(G,s,K)$ を求め方を示す．

$K=0$ のときは通常の最短経路問題なので既知のアルゴリズムを用いる．

$K\geq 1$ のときは以下のアルゴリズムを用いる．

入力： 有向グラフ $G=(V,A)$，辺の重み $\ell(\cdot)$，頂点 s,t，妨害数 K

出力： 全ての頂点 $v\in V$ に対する $w(G,v,K)$

step 1 $w(G,t,K)\leftarrow 0, S\leftarrow \mathrm{V}-\{\mathrm{t}\}$

step 2 $C\leftarrow\{(u,v)|u\in S, v\in V-S\}$

step 3 もし $C=\emptyset$ なら step 8 へ．

step 4 C の要素 (u,v) に対し $\ell(u,v)+w(G,v,K)$ の値を求め，最小のもののうちの1つを (u^*,v^*) とする．全ての辺に対する値が ∞ なら step 8 へ．

step 5 $w(G,u^*,K)\leftarrow$
$$\max\{\ell(u^*,v^*)+w(G,v^*,K),\ w(G-(u^*,v^*),u^*,K-1)\}$$

step 6 $S\leftarrow S-\{u^*\}$

step 7 step 2 へ．

step 8 S の全ての頂点 v に対して $w(G,v,K)\leftarrow\infty$ とする．

step 9 終了．

3.1 正当性の証明

$$w'(G,s,t,K,\ell) \triangleq \min_{v\in\partial_V(s)}(w(G,v,t,K,\ell)+\ell(s,v))$$

と定義する．簡単のため，混乱のない限り t と ℓ を略して $w'(G,s,K)$ と書く．

[補題 3.1] ゲーム (G,s,K) において以下の等式が成り立つ．

$$w(G,s,K)=\max_{D\subseteq A,\ |D|\leq K} w'(G-D,s,K-|D|)$$

(証明) w，w' の定義より明らか． □

[補題 3.2] 辺集合

$$\{(s,u)|w'(G,s,K)=\ell(s,u)+w(G,u,K),\ u\in\partial_V(s)\}$$

の，要素数 K 以下の任意の部分集合 B に対し

$$w(G,s,K)=\max\{w'(G,s,K), w(G-B,s,K-|B|)\}$$

が成り立つ．

(証明)　A の，要素数 K 以下の任意の部分集合を D とする．まず，$(A-D)\cap B\neq\emptyset$ なる場合を考える．$(A-D)\cap B$ の任意の1つの要素を (s,v) とする．w' の定義より

$$w'(G-D,s,K-|D|)=\min_{(s,u)\in\partial_A(s)-D}(\ell(s,u)+w(G-D,u,K-|D|))$$

$(s,v)\in\partial_A(s)-D$ より

$$\min_{(s,u)\in\partial_A(s)-D}\ell(s,u)+w(G-D,u,K-|D|)\leq\ell(s,v)+w(G-D,v,K-|D|)$$

ゲーム (G,v,K) はプレイヤー2が最初に辺集合 D を含むような切断の中で最も良いものを選ぶことによってゲーム$(G-D,v,K-|D|)$ と同じ道のりにすることができるので

$$w(G-D,v,K-|D|)\leq w(G,v,K)$$

$(s,v)\in B$ なので

$$\ell(s,v)+w(G,v,K)=w'(G,s,K)$$

以上，$(A-D)\cap B\neq\emptyset$ なら $w'(G-D,s,K-|D|)\leq w'(G,s,K)$ となった．残るは $D\supseteq B$ なる場合であるが，このとき明らかに $w'(G-D,s,K-|D|)\leq w(G-B,s,K-|B|)$ となる．よって補題3.1 より

$$w(G,s,K)\leq\max\{w'(G,s,K),w(G-B,s,K-|B|)\}$$

が得られる．ゲーム (G,s,K) においては，プレイヤー2が最初に妨害として空集合を選べば $w'(G,s,K)$ に，B を含むような妨害の中で最も良いものを選べば $w(G-B,s,K-|B|)$ に道のりを設定できる．よって逆方向の不等号も成立する．□

補題3.1，補題3.2とあわせて次の系が得られる．

[系 3.1] ゲーム (G,s,K) において最初の妨害として s 以外の頂点を始点に持つ辺の妨害を考えなくてもよい．すなわち

$$w(G,s,K)=\max_{D\subseteq\partial_A(s),\ |D|\leq K}w'(G-D,s,K-|D|)$$

が成り立つ．また，多重辺の一部分に対する妨害も考えなくてもよい．

[定理 3.1] アルゴリズム実行中のどの時点においても，$V-S$ の全ての頂点について $w(G,\cdot,K)$ の値が正しく求まっている．

(証明)　$|V-S|$ に関して数学的帰納法を用いて証明する．

$|V-S|=1$ のとき，$V-S=\{t\}$ であり，$w(G,t,K)=0$ なので成り立つ．

$|V-S|=k-1$ のとき，$V-S$ の全ての頂点について w の値が正しく求まっていると仮定する．

v を，$v\in\partial_V(u^*)$ なる任意の頂点とする．このとき

$$\ell(u^*,v^*)+w(G,v^*,K)\leq\ell(u^*,v)+w(G,v,K)\tag{1}$$

が成り立つことを示す．

1. $v\in V-S$ ならば v^* の選び方より式(1) は明らかに成り立つ．

2. $v\in S$ ならば，v から t に行くとき必ず (この時点での) C の辺を通らなければならない．プレイヤー1が C の辺を通るまでプレイヤー2が妨害しなかったとしても v から t への道のりが $\ell(u^*,v^*)+w(G,v^*,K)$ 以上になるので，$w(G,v,K)\geq\ell(u^*,v^*)+w(G,v^*,K)$ である．

以上より式(1) が成り立つ．w' の定義より

$$\begin{aligned}w'(G,u^*,K)&=\min_{v\in\partial_V(u^*)}(\ell(u^*,v)+w(G,v,K))\\&=\ell(u^*,v^*)+w(G,v^*,K)\end{aligned}$$

なので，$B=\{(u^*,v^*)\}$ として補題3.2を用いれば

$$\begin{aligned}w(G,u^*,K)&=\max\{w'(G,u^*,K),w(G-(u^*,v^*),u^*,K-1)\}\\&=\max\{\ell(u^*,v^*)+w(G,v^*,K),\\&\qquad w(G-(u^*,v^*),u^*,K-1)\}\end{aligned}$$

が得られる．この式によって step 5 において $w(G, u^*, K)$ に正しい値が代入されることが保証される．よって $|V-S|=k$ のときも成り立つ． □

3.2 計算複雑度

グラフ $G=(V,A)$ の辺数を m，頂点数を n とする．G における妨害数 K のときの w を求めるアルゴリズムの時間計算量を $T(m,n,K)$ とする．

アルゴリズムは step 5 において再帰呼び出しを行うが，それに要する時間は $T(m-1, n, K-1)$ である．残りの操作は $O(m)$ 時間で行うことができる．繰り返しは最大 n 回行われるので

$$T(m,n,K)=n*T(m-1,n,K-1)+O(mn)$$

と書ける．$T(m,n,0)=O(m+n\log n)$ とすれば上記漸化式より

$$T(m,n,K)=O(n^K(m+n\log n))$$

が得られる．

アルゴリズムの再帰以外の部分における空間計算量は $O(m+n)$ である．再帰は最大深さ K なので全体での空間計算量は $O(K(m+n))$ である．

4 P-SPACE 完全の証明

4.1 準備

次の問題は P-SPACE 完全であることが知られている[8]．

Sequential Truth Assignment

L 個のブール変数の系列 $<x_1, x_2, \cdots, x_L>$ と，各々が x_i または $\bar{x}_i$ $(1 \le i \le L)$ の3つのリテラルからなる M 個の項が与えられたとき，次のルールに従って2人のプレイヤーがプレーを行ったときにプレイヤー1に必勝法があるか否かを判定せよ．

ブール変数の系列 $<x_1, x_2, \cdots, x_L>$ の順に従いプレイヤー1，2 が交互に $x_1, x_2, \cdots, x_L$ に真偽値を割り当てる．全ての変数に割当が行なわれた後，M 個の項が全て満たされていればプレイヤー1の勝ち．そうでなければプレイヤー2の勝ち．

以下では一般性を失うことなく L は偶数であるとしておく．

前節において，妨害最短経路問題の空間計算量は多項式で押えられることを示した．本節では Sequential Truth Assignment (以下 STA と略す) が全ての辺の重みが1であるような妨害最短経路問題に帰着できることを証明する．

なお，この節においては辺の重みは全て1であるとし，その重み関数は $\ell^1(\cdot)$ で表すことにする．

[補題 4.1] ゲーム (G,s,K) において，s から t への辺独立な道の最大数が K 以下であるとき，$w(G,s,K)=\infty$ である．また，$i=0,1,\cdots,l-1$ について v_i から v_{i+1} へ $K+1$ 本以上の多重辺が存在するような頂点系列 $s=v_0, v_1, v_2, \cdots, v_{l-1}, v_l=t$ が存在するとき $w(G,s,K)\le l$ である．

(証明) いずれも明らかである． □

[補題 4.2] $K \ge 1$ のとき，$t \in \partial_V(s)$ ならば

$$w(G,s,K)=w(G-(s,t),s,K-1)$$

である．

(証明) 全ての辺の重みが同じなので，s から t への辺が存在すればプレイヤー2は必ず妨害すべきである． □

STA においてプレイヤー1に必勝法があるときかつそのときに限りプレイヤー1の道のりがある自然数 W^* 以下になるようなゲーム (G,s,t,K,ℓ^1) の作り方を示す．G は STA における，プレイヤー1が変数に値を割り当てること，プレイヤー2が変数に値を割り当てること，全ての項が充足されているか否かを判定することに対応する3つのモジュールからなる．以下でそれぞれの構成方法を示す．

4.2 プレイヤー1の変数割り当て部

有向グラフ $G_1=(V_1,A_1)$ を以下のように定義する (図2 参照)．以下では頂点 a から頂

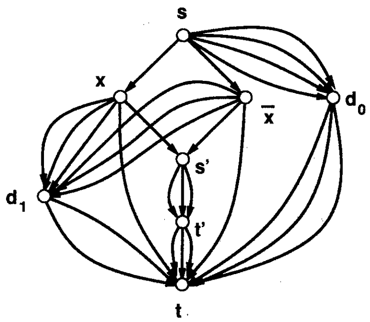

図 2: 有向グラフ G_1 $(K=3)$

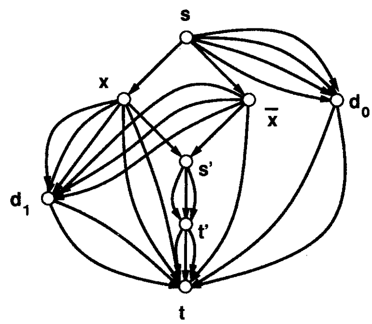

図 3: 有向グラフ G_2 $(K=3)$

点 b への α 本の多重辺を$\alpha*(a,b)$ と表記する．全ての辺の重みが1であることと系3.1より，これで不都合は生じない．

$$V_1 = \{s, x, \bar{x}, d_0, d_1, s', t', t\}$$
$$\begin{aligned} A_1 = \{&(s,x),(s,\bar{x}),(K+1)*(s,d_0),\\ &K*(d_0,t),(x,s'),(\bar{x},s'),(x,t),(\bar{x},t),\\ &K*(x,d_1),K*(\bar{x},d_1),(K-1)*(d_1,t),\\ &K*(s',t'),K*(t',t)\}\end{aligned}$$

(ただし，$K \geq 1$)

[定理 4.1] ゲーム (G_1, s, t, K) において2人のプレイヤーが最善を尽くせば

1. プレイヤー1は $s \to x \to s' \to t' \to t$ と進むかまたは $s \to \bar{x} \to s' \to t' \to t$ と進むことになる．

2. 経路の選択権はプレイヤー1が持つ．

3. プレイヤー1がいずれを選択してもプレイヤー1が s' に到着した時点でプレイヤー2は妨害の権利を $K-1$ 保持していることが可能である．

(証明)　補題4.1，補題4.2，補題3.2 を用いてゲームを解析すればよい．　□

4.3 プレイヤー2の変数割り当て部

有向グラフ $G_2 = (V_2, A_2)$ を以下のように定義する (図3参照)．

$$V_2 = \{s, x, \bar{x}, d_0, d_1, s', t', t\}$$
$$\begin{aligned} A_2 = \{&(s,x),(s,\bar{x}),(K+1)*(s,d_0),\\ &(K-1)*(d_0,t),(x,s'),(\bar{x},s'),\\ &2*(x,t),(\bar{x},t),K*(x,d_1),K*(\bar{x},d_1),\\ &(K-2)*(d_1,t),K*(s',t'),K*(t',t)\}\end{aligned}$$

(ただし，$K \geq 2$)

[定理 4.2] ゲーム (G_2, s, t, K) において2人のプレイヤーが最善を尽くせば

1. プレイヤー1は $s \to x \to s' \to t' \to t$ と進むかまたは $s \to \bar{x} \to s' \to t' \to t$ と進むことになる．

2. 経路の選択権はプレイヤー2が持つ．

3. プレイヤー2がいずれを選択してもプレイヤー1が s' に到着した時点でプレイヤー2は妨害の権利を $K-2$ 保持していることが可能である．

(証明)　定理4.1 と同様の手法で示すことが出来る．　□

(注) 上記の定理4.1，4.2においては，G_1, G_2 に s' から t' を通り t へ行く，$K-1$ 本以下の切断では妨害できな

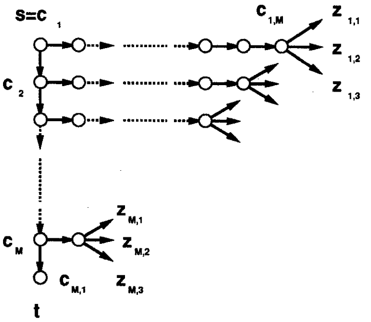

図 4: 有向グラフ G_3

いような長さ2以上の道が存在することが本質的である．例えば多重度 K の多重辺がいくつか繋がったような道で t' をおきかえても定理は成り立つ．G_1 及び G_2 において，s から s' へ行くまでにそれぞれ1本及び2本の辺が切断されると考えて良いことにも注意されたい．

4.4　充足判定部

ブール変数 $x_1, x_2, \cdots, x_L$ と，各々が x_i または $\bar{x_i}$ $(1 \leq i \leq L)$ の3つのリテラルからなる M 個の項 $z_{j,1}, z_{j,2}, z_{j,3}$ $(j = 1, 2, \cdots, M)$ に対し，有向グラフ $G_3 = (V_3, E_3)$ を以下のように定義する (図4参照).

$$
\begin{aligned}
V_3 &= \{t\} \cup \{x_i, \bar{x_1} | 1 \leq i \leq L\} \\
&\quad \cup \bigcup_{1 \leq i \leq M} (\{c_{i,j} | 1 \leq j \leq M - i + 1\} \\
&\quad \cup \{c_i\}) \\
A_3 &= \{(c_i, c_{i+1}) | 1 \leq i \leq M - 1\} \cup \{(c_M, t)\} \\
&\quad \cup \bigcup_{1 \leq i \leq M} (\{(c_i, c_{i,1}), (c_{i,l-i+1}, z_{i,1}), \\
&\quad (c_{i,l-i+1}, z_{i,2}), (c_{i,l-i+1}, z_{i,3})\} \\
&\quad \cup \{(c_{i,j}, c_{i,j+1}) | 1 \leq j \leq M - i\})
\end{aligned}
$$

但し，$s = c_1$ とし，$z_{i,j}$ は定義より $x_1, \cdots, x_k, \bar{x_1}, \cdots, \bar{x_k}$ のいずれかである．

[定理 4.3] L 個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_L$ に真偽値が与えられたとする．真である変数に対応する頂点から t へ辺を結び，そのようにして得られたグラフを G'_3 とする．

M 個の項が全て充足されているときかつそのときに限りゲーム $(G'_3, s, 1)$ においてプレイヤー1の道のりが $M + 2$ 以下になる．

(証明)　G_3 は，プレイヤー1が c_i にいるとき，プレイヤー2が妨害しなければプレイヤー1は c_{i+1} に行くべきであり，$z_{i,1}, z_{i,2}, z_{i,3}$ のいずれかに t への辺が存在するときのみ，プレイヤー2が辺 (c_i, c_{i+1}) を妨害すればプレイヤー1が道のり $M + 2$ で到達できるという構造になっている．

よって，ある i について $z_{i,1} \vee z_{i,2} \vee z_{i,3}$ が偽であるとき，プレイヤー2はプレイヤー1が c_i に到達したときに (c_i, c_{i+1}) を妨害することによって道のりを $M + 3$ 以上にすることができる．

また，全ての項が満たされているときはプレイヤー1の $c_1 \to c_2 \to \cdots \to c_M$ という進行においてプレイヤー2は妨害することが得にならず，$w(G'_3, c_M, 1) = 3$ であることから，プレイヤー1は $M + 2$ で t に到達することができる．□

4.5　グラフ全体の作り方

$G_1 - \{t'\}$ と $G_2 - \{t'\}$ をそれぞれ G'_1, G'_2 と書くことにする．STA の変数 x_i に対応して i が奇数なら K の値を $\frac{3L-3i+5}{2}$ と定め，G'_1 を作り $G'_1(i)$ とおく．i が偶数なら K の値を $\frac{3L-3i+6}{2}$ と定め，G'_2 を作り $G'_2(i)$ とおく．

全体のグラフ G_4 を以下のように構成する．まず，（上記のように）$G'_1(1), G'_2(2), \cdots, G'_1(L-1), G'_2(L)$ 及び G_3 を作る．全てのグラフの頂点 $t, x_i, \bar{x_i}$ をそれぞれ1つの頂点に合体させる．$G'_1(2i-1)$ の s' と $G'_2(2i)$ の s $(1 \leq i \leq L/2)$，$G'_2(2i)$ の s' と $G'_1(2i+1)$ の s $(1 \leq i \leq L/2 - 1)$ を各 i についてそれぞれ合体して1頂点とし，$G'_2(L)$ の s' と G_3 の s を合体させる．$G'_1(1)$ の s を全体のグラフ G_4 の出発点とする (図5参照).

$G'_2(L)$ を通過するまでは G_3 の中の $x_i, \bar{x_i}$ への辺は無視できること，定理4.1，4.2及び定

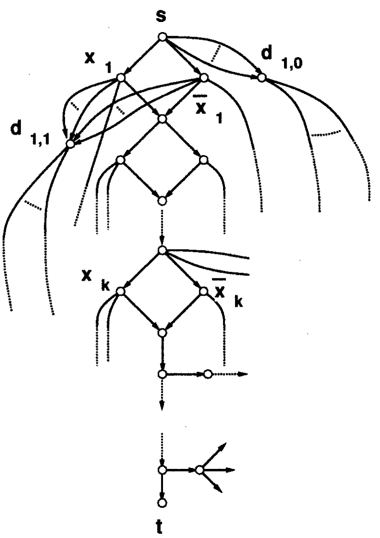

図 5: 有向グラフ G_4

理 4.2の後の注で述べたことより，グラフ G_4 において２人のプレイヤーが最善を尽くせば $G'_1(i)$ (及び $G'_2(i)$) の辺 $(x_i,t),(\bar{x}_i,t)$ のうちの一方のみをプレイヤー２は切断することになる（多重辺であればまとめて切断する）．これは STA において変数 $x_1,x_2,\cdots,x_L$ に真偽値を割り当てたことに対応すると考えられる．というのは，定理4.3によりその後，この割り当てにより全ての項が満たされていればそこからの道のり $M+2$ 以下で，満たされていない項があればそこからの道のり $M+3$ 以上で t に到達することに（または到達不能に）なるからである．

以上まとめると変数の数が L で項の数が M であるような STA が与えられたとき，それに対してグラフ G_4 を作れば，辺の重みが全て１であるようなゲーム $(G_4,s,t,\frac{3}{2}L+1,\ell^1)$ においてプレイヤー１の道のりが $2L+M+2$ 以下であるときかつそのときのみ，STA においてプレイヤー１に必勝法があることになる．よって，次の定理が得られる．

[定理 4.4] 妨害最短経路ゲームにおいて道のりがある値以下であるか否かを判定する問題は P-SPACE-complete である．

5　あとがき

本稿では目的地までの移動中に通行の障害が起こり得るような状況において障害に対する最悪時を保証するような最短経路の問題を２人ゲームとして定式化を行った．妨害数 K を固定した場合の多項式時間アルゴリズム，全ての辺の重みを１とした問題の P-SPACE-completeness の証明を行なった．

今後の課題として，無向グラフにおける問題，妨害者が頂点を削除するような問題について解明すること，及びそれらの結果の，通信ネットワークにおける経路制御への適用が掲げられる．

参考文献

[1] Papadimitriou,C.H. and Yannakakis,M.:"Shortest paths without a map",Theoretical Computer Science, Vol.84(1991), pp.127-150.

[2] Bar-Noy, A. and Schieber, B.:"The Canadian Traveller Problem", Proc. the second annual ACM-SIAM Symp. on Discrete Algo. (1991), pp.261-270.

[3] Jaillet, P.:"Shortest path problems with node failures", Networks, vol.22(1992), pp.589-605.

[4] Frieze, A.M., Grimmett, G.R.:"The shortest-path problem for graphs with random arc-lengths", Discrete Appl. Math., vol.10(1985), pp.57-77.

[5] Ribeiro, C.C., Minoux, M.:"A heuristic approach to hard constrained shortest path problems", Discrete Appl. Math., vol.10(1985), pp.117-124.

[6] Gu Qian Ping, Takaoka, T.:"On the average path length of O(logN) in the shortest path problem", Trans. IEICE, vol.E70(1987), pp.1155-1158.

[7] Maruyama, H.:"A new kth-shortest path algorithm", Trans. IEICE, vol.E76-D(1993), pp.388-389.

[8] Garey,M.R. and Johnson,D.S.: "Computers and Intractability:A Guide to the Theory of NP-Completeness", W.H.Freeman and Company,California, 1979.