条件付き項書換え系の健全性と完全性

山田 俊行 [1]　Aart Middeldorp [2]　井田 哲雄 [2]

[1] 筑波大学博士課程工学研究科
[2] 筑波大学電子情報工学系

email: {toshi,ami,ida}@score.is.tsukuba.ac.jp

概要

条件付き等式系 $\mathcal{E}$ に対する条件付き項書換え系 (CTRS) が健全かつ完全であることは, $\mathcal{E}$ のすべてのモデルにおける等価性 ($=_{\mathcal{M}_\mathcal{E}}$) と $\mathcal{E}$ のもとで等しいことの証明可能性 ($\leftrightarrow^*$) とが一致することを意味する．本論文では, oriented CTRS の完全性に関する Avenhaus と Loría-Sáenz の主張を反駁し, 絶対不可約性 (absolute irreduciblity) が oriented CTRS の完全性を保証するのに不適切であることを指摘する．この性質に代え, 安定性という性質を導入することにより, oriented CTRS が完全であるための新たな十分条件を提示する．Suzuki らにより提案された, 階層合流性をもつ oriented CTRS が健全かつ完全であることは, 本論文の結果により明らかになる．

Soundness and Completeness of Conditional Term Rewriting Systems

Toshiyuki Yamada [1]　Aart Middeldorp [2]　Tetsuo Ida [2]

[1] Doctoral Program in Engineering, University of Tsukuba
[2] Institute of Information Sciences and Electronics, University of Tsukuba

email: {toshi,ami,ida}@score.is.tsukuba.ac.jp

Abstract

Soundness and completeness of a conditional term rewriting system (CTRS) for a conditional equational system $\mathcal{E}$ means the equivalence of equality in all models ($=_{\mathcal{M}_\mathcal{E}}$) and the provability by equational reasoning ($\leftrightarrow^*$). In this paper a claim of Avenhaus and Loría-Sáenz about the completeness of oriented CTRSs is refuted. We point out that absolute irreduciblity is an insufficient for ensuring the completeness of oriented CTRSs. As a substitute, we introduce stability and provide a new sufficient condition for completeness of oriented CTRSs. The level-confluent oriented CTRSs proposed by Suzuki *et al.* turn out to be sound and complete by using the result in this paper.

1　はじめに

項書換え系 (TRS) は, 計算に関する議論を項の変形に基づいて形式的に行うための体系である. TRS は, 等式論理の自動証明や宣言型言語など, 記号計算に関連した計算機科学の基礎理論として, その性質が長年にわたって研究されてきた. TRS の拡張である条件付き項書換え系 (CTRS) は, 近年, 関数論理型言語の計算モデルとしての研究が盛んである.

CTRS では, 条件付き等式の集合によって項の書換えを定める. 等式を用いた推論の基本的な問題の一つとして, 「与えられた2つの項が, 条件付き等式の集合のもとで常に等しいかどうか」という恒真性 (validity) の判定問題があげられる. 健全かつ完全であるような CTRS では, 恒真性が項の書換えという構文的な操作だけによって判定できる. したがって, CTRS の健全性と完全性を保証するための条件を明らかにすることは重要である.

natural CTRS や join CTRS と呼ばれる CTRS のクラスに関する健全性と完全性は, Kaplan [Kap84] や Dershowitz と Okada [DO90] によって論じられている. また, 関数論理型言語の計算モデルとして注目されている oriented CTRS に関する健全性と完全性は Avenhaus と Loría-Sáenz [ALS93] により論じられている. 本論文では, Avenhaus と Loría-Sáenz の結果に対する反例を示し, その反例から, 健全性と完全性を保証するために重要な CTRS の性質を明らかにする. ここでの考察に基づき, oriented CTRS が健全かつ完全であるための新たな十分条件を提示する. 本論文で得られる結果を利用することにより, Suzuki らにより提案された階層合流性をもつ oriented CTRS [SMI95] が健全性と完全性をもつことが明らかになる.

2　準備

本節では, 条件付き項書換え系 (CTRS) の議論に必要な概念と用語を定義する. 詳細については, [Klo92], [DJ90], [Wec92] を参照されたい.

2.1　条件付き項書換え系 (CTRS)

まず, CTRS の構文論的な対象を導入し, 操作的意味を与える.

変数の集合を $\mathcal{V}$, 関数記号の集合を $\mathcal{F}$ で表し, $\mathcal{V}$ と $\mathcal{F}$ からつくられる項の集合を $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ と書く. 項 t に現れる変数の集合を $\mathrm{Var}(t)$ で表し, $\mathrm{Var}(s,t) = \mathrm{Var}(s) \cup \mathrm{Var}(t)$ と定義する。

等式とは項の対 (s,t) であり, これを $s \approx t$ と書く. **条件付き等式**は, 等式 (l,r) と, **条件部**と呼ばれる等式の有限列 $E = s_1 \approx t_1, \ldots, s_n \approx t_n$ からなる対 $(l \approx r, E)$ であり, これを $l \approx r \Leftarrow E$ (E が空列の場合には $l \approx r$) と書く. **条件付き等式系** (conditional equational system, **CES** と略す) とは, 関数記号の集合 $\mathcal{F}$ と, 条件付き等式の集合 $\mathcal{E}$ との対 $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ である. 前後関係から $\mathcal{F}$ が明らかな場合, これを省略して $\mathcal{E}$ だけで CES を表す.

項 t に現れる部分項の出現位置の集合 $\mathrm{Pos}(t)$ は, $t \in \mathcal{V}$ のとき $\mathrm{Pos}(t) = \{\epsilon\}$, $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ のとき $\mathrm{Pos}(t) = \{\epsilon\} \cup \{\, i \cdot p \mid 1 \le i \le n, p \in \mathrm{Pos}(t_i)\,\}$ と定義する. 項 t の位置 p にある部分項を $t_{|p}$ で表し, 項 t の位置 p にある部分項を s で置き換えてできる項を $t[s]_p$ で表す. また, $\mathrm{Pos}_\mathcal{F}(t) = \{\, p \in \mathrm{Pos}(t) \mid t_{|p} \in \mathcal{F}\,\}$ と定義する. 代入 σ は $\mathcal{V}$ から $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ への写像である. すべての代入の集合を $\Sigma_\mathcal{F}$ で表す. 名前替えとは, 全単射の代入である. 代入 σ は, 任意の $f \in \mathcal{F}$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_\mathcal{F}$ について $\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$ と定めることにより, $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ から $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ への写像へと拡張できる. $\sigma(t)$ の略記として $t\sigma$ を使う. 2つの項 t, u が単一化可能であるとは, $t\sigma = u\sigma$ となる代入 σ が存在することをいう. $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ 上の関係 $\to$ が**文脈について閉じている**とは, $s \to t$ ならば任意の $u \in \mathcal{T}_\mathcal{F}$, $p \in \mathrm{Pos}(u)$ について $u[s]_p \to u[t]_p$ が成り立つことをいう.

2項関係 $\to$ の対称閉包を $\leftrightarrow$, 反射推移閉包を $\to^*$ で表す. したがって, $\leftrightarrow$ の反射推移閉包は $\leftrightarrow^*$ で表される. 関係 $\to$ の逆を $\leftarrow$ で表す. したがって, $\to^*$ の逆は ${}^*\!\!\leftarrow$ で表される. $a_1 \to^* b \;{}^*\!\!\leftarrow a_2$ を満たす b があるとき, $a_1 \downarrow a_2$ と書く. 関係 $\to$ が**合流性**をもつとは, $b_1 \;{}^*\!\!\leftarrow a \to^* b_2$ ならば $b_1 \downarrow b_2$ が成り立つことをいう. $\to$ の合流性は $\leftrightarrow^* \subseteq \downarrow$ と同値である.

本論文では2種類の**条件付き項書換え系** (conditional term rewriting system, CTRS と略す) に

ついて議論する. CES $(\mathcal{F},\mathcal{E})$ に対する **natural CTRS** は, 項の集合上の 2 項関係 $\rightarrow_{\mathcal{E}}$ である. この関係を定義するために, まず, 各自然数 n について関係 $\rightarrow_{\mathcal{E}_n}$ を以下のように定める:

$$\begin{array}{lcl} \rightarrow_{\mathcal{E}_0} & = & \varnothing, \\ \rightarrow_{\mathcal{E}_{n+1}} & = & \{\, (t[l\sigma]_p, t[r\sigma]_p) \mid l \approx r \Leftarrow E \in \mathcal{E},\ t \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}},\ p \in \mathrm{Pos}(t),\ \sigma \in \Sigma_{\mathcal{F}},\ E\sigma \subseteq \leftrightarrow^*_{\mathcal{E}_n} \,\}. \end{array}$$

ここで $E\sigma$ は集合 $\{\, s\sigma \approx t\sigma \mid s \approx t$ は E の中の等式$\,\}$ を表す. 関係 $\rightarrow_{\mathcal{E}}$ を, ある自然数 n について $s \rightarrow_{\mathcal{E}_n} t$ が成り立つとき, またそのときに限り $s \rightarrow_{\mathcal{E}} t$ として定義する. $s \rightarrow_{\mathcal{E}_n} t$ を満たす最小の n は, 書換え $s \rightarrow_{\mathcal{E}} t$ の深さと呼ばれる. 書換えの位置 p を明示したい場合には, $s \xrightarrow{p}_{\mathcal{E}} t$ のように書く. CES $(\mathcal{F},\mathcal{E})$ に対する **oriented CTRS** $\rightarrow_{\mathcal{E}^\circ}$ は natural CTRS の定義の $\leftrightarrow^*_{\mathcal{E}_n}$ を $\rightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ_n}$ に置き換えて同様に定める.

書換えの関係についての性質を証明する場合, 深さに関する数学的帰納法を使う代わりに次の命題を使うことにより, 証明を容易にできる.

命題 2.1 (書換え関係の性質)

CES $(\mathcal{F},\mathcal{E})$ に対する CTRS $\rightarrow_{\mathcal{E}}$ $(\rightarrow_{\mathcal{E}^\circ})$ は, 次の 2 つの性質を満たす関係 $\rightarrow$ のうち, 最小のものである.

(1) $\rightarrow$ は文脈について閉じている.

(2) 任意の $l \approx r \Leftarrow E \in \mathcal{E}$ について, $E\sigma \subseteq \leftrightarrow^*$ $(E\sigma \subseteq \rightarrow^*)$ ならば $l\sigma \rightarrow r\sigma$.

□

2.2 健全性と完全性

ここでは CTRS の代数的意味を与える.

$\mathcal{F}$ を関数記号の集合とする. **$\mathcal{F}$ 代数** $\mathcal{A}$ とは, 集合 A 上に, 各関数記号 $f \in \mathcal{F}$ に対応する演算 $f_A : A^n \rightarrow A$ (n は, f の引数の数) が定められたものをいう. $\mathcal{F}$ 代数 $\mathcal{A}$ 上の**付値** α とは $\mathcal{V}$ から A への写像である. 付値 α は, $t \in \mathcal{V}$ のとき $\langle\alpha\rangle_{\mathcal{A}}(t) = \alpha(t)$, $t = f(t_1,\ldots,t_n)$ のとき $f_A(\langle\alpha\rangle_{\mathcal{A}}(t_1),\ldots,\langle\alpha\rangle_{\mathcal{A}}(t_n))$ と定めることにより, 項の解釈を与える写像 $\langle\alpha\rangle_{\mathcal{A}} : \mathcal{T}_{\mathcal{F}} \rightarrow A$ へと拡張できる.

等式 $s \approx t$ が $\mathcal{F}$ 代数 $\mathcal{A}$ で**恒真**であるとは, $\mathcal{A}$ 上の任意の付値 α に対して, $\langle\alpha\rangle_{\mathcal{A}}(s) = \langle\alpha\rangle_{\mathcal{A}}(t)$ が成り立つことをいう. 条件付き等式 $l \approx r \Leftarrow E$ が $\mathcal{F}$ 代数 $\mathcal{A}$ で**恒真**であるとは, E 中の各等式 $s \approx t$ について $\langle\alpha\rangle_{\mathcal{A}}(s) = \langle\alpha\rangle_{\mathcal{A}}(t)$ が成り立つような $\mathcal{A}$ 上の付値 α に対して, $\langle\alpha\rangle_{\mathcal{A}}(l) = \langle\alpha\rangle_{\mathcal{A}}(r)$ が成り立つことをいう. CES $\mathcal{E}$ のすべての条件付き等式 $l \approx r \Leftarrow E$ が $\mathcal{F}$ 代数 $\mathcal{A}$ で恒真であるとき, $\mathcal{A}$ は $\mathcal{E}$ の**モデル**であるという. 等式 $s \approx t$ が CES $\mathcal{E}$ のすべてのモデルで恒真であることを $s =_{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}} t$ と表す.

$\mathcal{E}$ を CES とする. CTRS $\rightarrow_{\mathcal{E}}$ $(\rightarrow_{\mathcal{E}^\circ})$ が $\mathcal{E}$ に関して**健全**であるとは, $\leftrightarrow^*_{\mathcal{E}} \subseteq =_{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}}$ $(\leftrightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ} \subseteq =_{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}})$ を満たすことをいい, また, **完全**であるとは, $=_{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}} \subseteq \leftrightarrow^*_{\mathcal{E}}$ $(=_{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}} \subseteq \leftrightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ})$ を満たすことをいう.

3 CTRS の健全性と完全性

本節では, natural CTRS が常に健全かつ完全であるという事実に基づいて, oriented CTRS の健全性と完全性を保証するための十分条件を提示する.

3.1 natural CTRS の健全性と完全性

natural CTRS における関係 $\leftrightarrow^*_{\mathcal{E}}$ は, 2 つの項が公理 $\mathcal{E}$ のもとで等しいことの証明可能性と考えることができる. 次の定理は, natural CTRS では, すべてのモデルでの等価性 $=_{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}}$ と証明可能性 $\leftrightarrow^*_{\mathcal{E}}$ とが一致することを意味する.

定理 3.1 (natural CTRS の健全性と完全性)

$\mathcal{E}$ を任意の CES とする. natural CTRS $\rightarrow_{\mathcal{E}}$ は $\mathcal{E}$ に対して健全かつ完全である. つまり, 2 つの関係 $=_{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}}$ と $\leftrightarrow^*_{\mathcal{E}}$ は常に一致する. □

この定理の証明については, [Yam96] や [Kap84] を参照されたい.

3.2 oriented CTRS の健全性と完全性

定理 3.1 から, oriented CTRS の健全性と完全性を示すには, $\leftrightarrow^*_{\mathcal{E}}$ と $\leftrightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ}$ が一致することを確かめればよい.

定理 3.2 (oriented CTRS の健全性)
$\mathcal{E}$ を任意の CES とする. oriented CTRS $\rightarrow_{\mathcal{E}^\circ}$ は $\mathcal{E}$ に対して常に健全である. つまり, $\leftrightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ} \subseteq =_{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}}$ が成り立つ.

証明
natural CTRS の健全性 (定理 3.1) から $\leftrightarrow^*_{\mathcal{E}} \subseteq =_{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}}$, 書換え関係の定義から $\leftrightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ} \subseteq \leftrightarrow^*_{\mathcal{E}}$ が得られる. □

oriented CTRS は健全性をもつが, 必ずしも完全であるとは限らない. そこで, oriented CTRS の完全性を保証するための十分条件について考える.

補助定理 3.3 (oriented CTRS の完全性の十分条件)
oriented CTRS $\rightarrow_{\mathcal{E}^\circ}$ が合流性をもつような CES $\mathcal{E}$ を考える. 任意の $l \approx r \Leftarrow E \in \mathcal{E}$ と, $C\sigma \subseteq \downarrow_{\mathcal{E}^\circ}$ を満たすような任意の代入 σ について, 次の 2 つの条件を満たすような代入 τ が存在するならば, $\rightarrow_{\mathcal{E}^\circ}$ は $\mathcal{E}$ に対して完全である.
(1) すべての $x \in \mathrm{Var}(l,r)$ について $\sigma(x) \rightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ} \tau(x)$.
(2) $C\tau \subseteq \rightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ}$.

証明
$\rightarrow_{\mathcal{E}}$ は完全性をもつ (定理 3.1) から, $\rightarrow_{\mathcal{E}^\circ}$ の完全性を証明するには $\leftrightarrow^*_{\mathcal{E}} \subseteq \leftrightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ}$ を示せばよい. さらに, $\leftrightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ}$ は同値関係であるから, $\rightarrow_{\mathcal{E}} \subseteq \leftrightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ}$ を示せば十分である. この包含関係を, 命題 2.1 を用いて証明する. $\leftrightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ}$ が文脈について閉じていることは, $\rightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ}$ が文脈について閉じている (命題 2.1 (1)) ことからただちに導かれる. 続いて, 任意の $l \approx r \Leftarrow E \in \mathcal{E}$, $\sigma \in \Sigma_{\mathcal{F}}$ について, $E\sigma \subseteq \leftrightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ}$ ならば $l\sigma \leftrightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ} r\sigma$ が成り立つことを示す. $E\sigma \subseteq \leftrightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ}$ を仮定する. $\rightarrow_{\mathcal{E}^\circ}$ の合流性より $E\sigma \subseteq \downarrow_{\mathcal{E}^\circ}$ であり, (2) より $E\tau \subseteq \rightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ}$ を満たす τ が存在する. したがって, 命題 2.1 (2) より $l\tau \rightarrow_{\mathcal{E}^\circ} r\tau$, また, (1) より $l\sigma \rightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ} l\tau$, $r\sigma \rightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ} r\tau$ であるから, $l\sigma \leftrightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ} r\sigma$ が成立する. □

Avenhaus と Loría-Sáenz は, モード付きの論理プログラムの性質を調べるため, 決定的な項書換え系 (deterministic TRS, DTRS) と呼ばれる特別な CES について, oriented CTRS の完全性を論じている [ALS93]. 彼らは, 完全性を保証するための条件として, 絶対不可約性を導入した. CES $\mathcal{E}$ に関して, 項 t が**絶対不可約** (absolutely irreducible) であるとは, 任意の名前替え ρ, $p \in \mathrm{Pos}_{\mathcal{F}}(t)$, $l \approx r \Leftarrow E \in \mathcal{E}$ について, $\mathrm{Var}(t\rho) \cap \mathrm{Var}(l) = \varnothing$ ならば $t\rho_{|p}$ と l が単一化不可能であることをいう. また, CTRS $\rightarrow_{\mathcal{E}^\circ}$ が**絶対不可約**であるとは, 任意の $l \approx r \Leftarrow E \in \mathcal{E}$ について, E 中の各等式 $s \approx t$ の右辺 t が絶対不可約であることをいう.

主張 3.4 (DTRS に基づく oriented CTRS の完全性 [ALS93])
oriented CTRS $\rightarrow_{\mathcal{E}^\circ}$ が合流性をもち絶対不可約であるような DTRS $\mathcal{E}$ を考える. 任意の $l \approx r \Leftarrow s_1 \approx t_1, \ldots, s_n \approx t_n \in \mathcal{E}$ について, $1 \leq j \leq i \leq n$ ならば $\mathrm{Var}(s_j) \cap \mathrm{Var}(t_i) = \varnothing$ が成り立つとき, $\rightarrow_{\mathcal{E}^\circ}$ は $\mathcal{E}$ に対して完全である. □

この主張は, 以下の反例により反駁できる.

例 3.5 (主張 3.4 に対する反例)
oriented CTRS $\rightarrow_{\mathcal{E}^\circ}$ が合流性をもつ, 次の DTRS $\mathcal{E}$ について考える:

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{array}{rclcrcl} a & \approx & f(a) & & & & \\ g(f(x),x) & \approx & a & & & & \\ h(x) & \approx & a & \Leftarrow & a & \approx & g(x,x) \end{array} \right\}.$$

項 $g(x,x)$ は絶対不可約であり, 項 a と変数を共有しない. 主張3.4 の前提は満たされているが, $\rightarrow_{\mathcal{E}^\circ}$ は $\mathcal{E}$ に対して完全ではない. $a \leftrightarrow^*_{\mathcal{E}} g(a,a)$ が成り立つため, $h(a) \rightarrow_{\mathcal{E}} a$ であるが, $a \rightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ} g(a,a)$ が満たされず, $h(a) \rightarrow_{\mathcal{E}^\circ} a$ が成立しないからである. □

上の反例では $g(a,a) \rightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ} a$ という書換えが可能である. もともと条件部にあった関数記号 g が, 書換えによって別の関数記号 a に変わっている. 絶対不可約性が完全性を保証するための条件として不適切な理由はここにある. この問題点を解消するには, 条件部にあった関数記号が書換えによって変化せず, 代入の部分だけが書き換わるような項を, 条件部の等式の右辺に用いればよい. そこで, 絶対不可約性に代えて, 新たに安定性という性質を導入する.

項 t が**安定**であるとは, $t\sigma \rightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ} u \xrightarrow{p}_{\mathcal{E}^\circ} u'$ を満たす任意の代入 σ, 項 u, u', 位置 p に対して $p \notin \mathrm{Pos}_{\mathcal{F}}(t)$ が成立することをいう. また, CTRS $\rightarrow_{\mathcal{E}^\circ}$ が**安定**であるとは, 任意の $l \approx r \Leftarrow E \in \mathcal{E}$ について, E 中の各等式 $s \approx t$ の右辺 t が安定であることをいう.

命題 3.6 (安定な項の性質)

oriented CTRS $\rightarrow_{\mathcal{E}^\circ}$ が合流性をもつ CES $\mathcal{E}$ と, 安定な項 t を考える. $t\sigma \rightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ} u$ ならば, 次の2つの性質を満たす代入 τ が存在する.

(1) $u \rightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ} t\tau$.

(2) 任意の $x \in \mathrm{Var}(t)$ について $\sigma(x) \rightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ} \tau(x)$.

□

主張3.4 の絶対不可約性を安定性に置き換え, さらに, 不要な前提を取り去ることにより, 次の定理を得る.

定理 3.7 (oriented CTRS の完全性)

oriented CTRS $\rightarrow_{\mathcal{E}^\circ}$ が合流性をもち安定であるような CES $\mathcal{E}$ を考える. 任意の $l \approx r \Leftarrow s_1 \approx t_1, \ldots, s_n \approx t_n \in \mathcal{E}$ について, $1 \leq j \leq i \leq n$ かつ $\mathrm{Var}(t_i) \neq \varnothing$ ならば $\mathrm{Var}(s_j) \cap \mathrm{Var}(t_i) = \varnothing$ が成り立つとき, $\rightarrow_{\mathcal{E}^\circ}$ は $\mathcal{E}$ に対して完全である.

証明

補助定理3.3 を使って証明するために, $l \approx r \Leftarrow E \in \mathcal{E}$, $E\sigma \subseteq \downarrow_{\mathcal{E}^\circ}$, $E = s_1 \approx t_1, \ldots, s_n \approx t_n$ を仮定する. E 中の等式 $s \approx t$ のうち, $\mathrm{Var}(t) = \varnothing$ であるものを除いた等式列を E' とすれば, ある $m \in \{0, \ldots n\}$ について $E' = s_1 \approx t_1, \ldots, s_m \approx t_m$ と書ける. このとき, 各 $i \in \{0, \ldots, m\}$ について, 以下の (1) ~ (3) を満たすような代入 τ_i を見つければよい.

(1) 任意の $x \in \mathcal{V}$ について $\sigma(x) \rightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ} \tau_i(x)$

(2) 任意の $j \in \{1, \ldots, i\}$ について $s_j\tau_i \rightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ} t_j\tau_i$

(3) E 中の各等式 $s \approx t$ のうち $\mathrm{Var}(t) = \varnothing$ を満たすものについて $s\tau_m \rightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ} t\tau_m$

まず, i に関する数学的帰納法で τ_i を定めることにより (1) と (2) を示す. $\tau_0 = \sigma$ と定めれば, $i = 0$ のときに (1) と (2) が成り立つ. $i \geq 1$ の場合について考える. 帰納法の仮定により, $s_i\sigma \rightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ} s_i\tau_{i-1}$ が成り立つ. また, 安定な項の性質 (命題3.6) から, $s_i\sigma \rightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ} t_i\sigma_i \;{}^*_{\mathcal{E}^\circ}\!\!\leftarrow t_i\sigma$ かつ任意の $x \in \mathrm{Var}(t_i)$ について $\sigma(x) \rightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ} \sigma_i(x)$ を満たす σ_i が存在する. $\rightarrow_{\mathcal{E}^\circ}$ の合流性により, $s_i\tau_{i-1} \downarrow_{\mathcal{E}^\circ} t_i\sigma_i$ を得る. 再び命題3.6 を使うことにより, $s_i\tau_{i-1} \rightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ} t_i\theta_i$ かつ任意の $x \in \mathrm{Var}(t_i)$ について $\sigma(x) \rightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ} \theta_i(x)$ を満たす θ_i の存在を示せる. この事実と, 帰納法の仮定, $\rightarrow_{\mathcal{E}^\circ}$ の合流性から, $x \in \mathrm{Var}(t_i) \cap \bigcup_{1 \leq j < i} \mathrm{Var}(t_j)$ を満たす x に対してそれぞれ $\tau_{i-1}(x) \rightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ} u_{i,x} \;{}^*_{\mathcal{E}^\circ}\!\!\leftarrow \theta_i(x)$ となるような項 $u_{i,x}$ が存在する. τ_i は次のように定義すればよい:

$$\tau_i(x) = \begin{cases} u_{i,x} & x \in \mathrm{Var}(t_i) \cap \bigcup_{1 \leq j < i} \mathrm{Var}(t_j) \text{ のとき} & (\alpha) \\ \theta_i(x) & x \in \mathrm{Var}(t_i) - \bigcup_{1 \leq j < i} \mathrm{Var}(t_j) \text{ のとき} & (\beta) \\ \tau_{i-1}(x) & x \in \mathcal{V} - \mathrm{Var}(t_i) \text{ のとき} & (\gamma) \end{cases}$$

τ_i が (1) を満たすことを示す. (α) の場合, 帰納法の仮定と $u_{i,x}$ の定め方から $\sigma(x) \rightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ} \tau_{i-1}(x) \rightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ} u_{i,x} = \tau_i(x)$. (β) の場合, θ_i の定め方から $\sigma(x) \rightarrow^*_{\mathcal{E}^\circ} \theta_i(x) = \tau_i(x)$. (γ) の場合, 帰納法の仮定に

より $\sigma(x) \to^*_{\mathcal{E}^o} \tau_{i-1}(x) = \tau_i(x)$. 続いて, τ_i が (2) を満たすことを示す. 定理の前提と (γ) より $s_j\tau_i = s_j\tau_{i-1}$ が成り立つ. $1 \leq j < i$ の場合, 帰納法の仮定から $s_j\tau_{i-1} \to^*_{\mathcal{E}^o} t_j\tau_{i-1}$, また, $u_{i,x}$ の定め方と (α) と (γ) より $t_j\tau_{i-1} \to^*_{\mathcal{E}^o} t_j\tau_i$ となる. $j = i$ の場合, θ_i の定め方から $s_j\tau_{i-1} \to^*_{\mathcal{E}^o} t_j\theta_i$, また, $u_{i,x}$ の定め方と (α) と (β) より $t_j\theta_i \to^*_{\mathcal{E}^o} t_j\tau_i$ となる.

続いて (3) を示す. すでに示した (1) より, $s\sigma \to^*_{\mathcal{E}^o} s\tau_m$ が成り立つ. さらに, $\mathrm{Var}(t) = \varnothing$ から, $s\sigma \to^*_{\mathcal{E}^o} t\sigma = t\tau_m$. $\to_{\mathcal{E}^o}$ の合流性と $\mathrm{Var}(t) = \varnothing$ から, $s\tau_m \to^*_{\mathcal{E}^o} t\tau_m$ を得る. □

4 おわりに

本論文では, oriented CTRS の完全性に関する Avenhaus と Loría-Sáenz の主張を反駁した. さらに, 完全性を保証するための条件として不適切な絶対不可約性に代えて安定性を導入することにより, oriented CTRS が完全であるための新たな十分条件を提示した.

本論文の結果は, Suzuki らにより提案された階層合流性 (level-confluence) をもつ CTRS [SMI95] に対して適用することができる. つまり, [SMI95] の系 4.7 の前提を満たす CTRS のクラスは, 定理 3.7 の前提を満たす CTRS のクラスによって完全に包含されているため, 常に健全かつ完全であることが保証される.

参考文献

[ALS93] J. Avenhaus and C. Loría-Sáenz. Canonical conditional rewrite systems containing extra variables. Technical Report SR–93–03, Universität Kaiserslautern, 6750 Kaiserslautern, Germany, March 1993.

[DJ90] N. Dershowitz and J.-P. Jouannaud. Rewrite systems. In J. van Leeuwen, editor, *Handbook of Theoretical Computer Science*, volume B, chapter 6, pages 243–320. The MIT Press, 1990.

[DO90] N. Dershowitz and M. Okada. A rationale for conditional equational programming. *Theoretical Computer Science*, 75:111–138, 1990.

[Kap84] S. Kaplan. Conditional rewrite rules. *Theoretical Computer Science*, 33(2):175–193, 1984.

[Klo92] J. W. Klop. Term rewriting systems. In S. Abramsky, D. Gabbay, and T. Maibaum, editors, *Handbook of Logic in Computer Science*, volume 2, chapter 1, pages 1–116. Oxford University Press, 1992.

[SMI95] T. Suzuki, A. Middeldorp, and T. Ida. Level-confluence of conditional rewrite systems with extra variables in right-hand sides. In *Proceedings of the 6th International Conference on Rewriting Techniques and Applications*, Kaiserslautern, 1995. Lecture Notes in Computer Science 914, pp. 179–193.

[Wec92] W. Wechler. *Universal Algebra for Computer Scientists*, volume 25 of *EATCS Monographs on Theoretical Computer Science*. Springer-Verlag, 1992.

[Yam96] T. Yamada. On the logical strength of conditional rewrite systems. Master's thesis, University of Tsukuba, 1996. http://www.score.is.tsukuba.ac.jp/~toshi/.