プログラミング　18－16
（1998. 3. 23）

n 次元立方体の線形配置のコストについて

山本 治, 神保 秀司, 橋口 攻三郎

岡山大学工学部情報工学科

〒 700-8530 岡山市津島中 3-1-1
E-mail: jimbo@kiso.it.okayama-u.ac.jp, TEL: +81-86-251-8176, FAX: +81-86-251-8256.

あらまし　n-立方体は, n 次元 0/1 ベクトルの全てを点集合とし, 2 点 v, w 間のハミング距離が 1 である 2 点集合 $\{v, w\}$ の全てを辺集合とする無向グラフであり, 線形配置とは, その点を引き続いた正整数の集合上に配置することである. 本報告では, 線形配置によって辺が写像されてできる線分の長さの最大値として最大値コストを新たに定義し, それを最小にする線形配置の候補として重み順圧縮配置を提案する. なお, 重み順圧縮配置の最大値コストの最小性は, 計算機実験などにより示唆されているが, 証明の検証は完了していない. なお, 最大値コストの評価に Kruskal-Catona の定理を利用し, 重み順圧縮配置の最大値コストは, 総和コストが最小である自然配置の最大値コストよりも $\Theta(\sqrt{n})$ 倍良いという結果を得た.

キーワード　グラフ理論, ハイパーキューブ, 並列計算, VLSI, BANDWIDTH (NP-完全問題), 極値集合論.

On the costs of linear layouts of n-cubes

Osamu Yamamoto, Shuji Jimbo, and Kosaburo Hashiguchi

Department of Information Technology,
Faculty of Engineering, Okayama University,

3-1-1, Tsushima-Naka, Okayama 700-8530, Japan.
E-mail: jimbo@kiso.it.okayama-u.ac.jp, TEL: +81-86-251-8176, FAX: +81-86-251-8256.

Abstract　The n-cube is the undirected graph whose vertex set consists of all the n-dimensional 0/1 vectors and whose edge set consists of all the 2-sets $\{v, w\}$ such that the Hamming distance between v and w is one. A linear layout is an arrangement of the n-cube into the set of successive positive integers. In this report, we propose the maximum-cost of a linear layout that is defined to be the maximum length of the image of an edge. We also propose the squashed-weighted layout as a candidate for a linear layout with the minimum maximum-cost. However, the proof of the minimumness has not been completed. We have evaluated the maximum-cost of the squashed-weighted layout using Kruskal-Katona theorem, and have obtained the result that the maximum-cost of the squashed-weighted layout is $\sqrt{n}$ times better than that of the natural layout, whose summation-cost is minimum.

key words　graph theory, hypercube, parallel computation, VLSI, BANDWIDTH, extremal set theory.

1 はじめに

n-立方体は, n 次元 0/1 ベクトルの全てを点集合とし, 2 点間のハミング距離が 1 である 2 点, 即ち, 丁度 1 つの成分が異なっている 2 点を全て辺で結んで得られる無向グラフであり, 並列計算機構の構造として扱われるハイパーキューブの構造を表している. また VLSI の配線に関する結果を考察する上での有力な手段となり得る.

従来, n-立方体の点を直線上に等間隔に並べ場合に各種のコストを定義して, その配置の効率について検討されている [6][5]. このように並べることを本報告では線形配置と呼ぶ. 正確には, n-立方体の点集合を定義域とし, 数直線上の, 1 から 2^n までの点を値域とする一対一の写像である. コストは, n-立方体の辺が線形配置によって写像されてできる線分の長さ等に基づいて定義される. 本報告で考察の対象とする最大値コストを, 線形配置によって辺が写像されてできた線分の長さの最大値として定義する. なお, 一般の無向グラフの線形配置の最大値コストの最小値を評価する問題は, BANDWIDTH と呼ばれ, NP-完全であることが知られている [2].

本報告では, 最大値コストを最小にすると予想される線形配置 δ_n を提案する. $delta_n$ の最大値コストの最小性を保証する入り組んだ証明は得られているが, 検証が完了していない. 関連した話題としては, 自然配置と呼ばれる線形配置が, 本報告で総和コストと呼ぶものを最小にすることを示した研究がある [6][5]. そこでの総和コストの最小性の証明における重要な部分は, n-立方体の点集合を k 個の点からなる集合 A と 2^n-k 個の点からなる集合 B に分割したときの, A の点と B の点を結ぶ辺の本数の下界を求め, 自然配置によって $1, 2, \ldots, k$ に写像される n-立方体の点からなる集合を A とおいたとき, A の点と B の点を結ぶ辺の本数がその下界と一致することを示す議論である. 即ち, 総和コストの最小性の問題をグラフ理論の問題に帰着させている. 本報告でも, 類似した議論に基づいている. 加えて極値集合論 [1] (extremal set theory) と呼ばれる分野において, Kruskal-Katona の定理 [4][3] と呼ばれる結果を利用している.

2 定義

いくつかの基本的な概念を定義する. 有限集合 S のサイズ, 即ち S の要素の個数を $|S|$ で表す. 全ての整数からなる集合を $\mathbb{Z}$ で表し, 全ての非負整数からなる集合を $\mathbb{Z}^+$ で表し, 全ての正整数からなる集合を $\mathbb{N}$ で表す. n が正整数であるとき, n-立方体グラフは, $\{0,1\}^n$ を点集合とし, 2 点間のハミング距離が 1 である 2 点, 即ち, 丁度 1 つの成分が異なっている 2 点を全て辺で結んで得られる無向グラフであり, Q_n で表す. Q_n の点集合を $V(Q_n)$ で, 辺集合を $E(Q_n)$ で表す. S は, 無向グラフ $G=(V,E)$ の点集合 V の部分集合であるとする. S に属さない G の点, 即ち $V\setminus S$ の点のうち, S のどれかの点と隣接しているもの全てからなる集合を S の隣接部分と呼び, $\Gamma_G(S)$ と表す. G の点 v と w を結ぶ辺が存在するとき, v と w は隣接すると言う. $V\setminus(S\cup\Gamma_G(S))$ を S の外部と呼び, $\mathcal{O}_G(S)$ と表す. $V\setminus S$ の隣接部分を S の境界とよび, $\partial_G(S)$ と表す. $S\setminus\partial_G(S)$ を S の内部と呼び, $\mathcal{I}_G(S)$ と表す. 対象とする無向グラフ G が明確であるときは, 各表記中のグラフを表す添字を省略し, それぞれ $\Gamma(S)$, $\mathcal{O}(S)$, $\partial(S)$, $\mathcal{I}(S)$ と書く. 本報告では, 特に断らない限りグラフを表す添字が省略された場合は, Q_n が省略されていると見なす.

n-立方体 Q_n の点集合 $V(Q_n)$ から正整数の集合 $\{1,2,\ldots,2^n\}$ への一対一対応を, n-立方体の線形配置と呼ぶ. 対象とする n-立方体が明らかであるときは, 単に線形配置と呼ぶことを許す. 写像 $\rho: V(Q_n)\to\{1,2,\ldots,2^n\}$ は, n-立方体の線形配置であるとする. $\sum_{\{v,w\}\in E(Q_n)}|\rho(v)-\rho(w)|$ をρ の総和コストと呼び, SUM(ρ) で表す. また, $\max_{\{v,w\}\in E(Q_n)}|\rho(v)-\rho(w)|$ をρ の最大値コストと呼び, MAX(ρ) で表す. n-立方体の点は, 線形配置 ρ の値が大きい程 (小さい程) ρ に関して右に (左に) あると言うことにする.

Q_n の点 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ の座標成分の総和$\sum_{i=1}^n x_i$, 即ち値が 1 である成分の個数, をその点の重みと呼び, $w(x)$ と表す. Q_n の点のうち重みが k であるもの全てからなる集合を $W_n(k)$ で表す. Q_n の点集合 $V(Q_n)=\{0,1\}^n$ は,

$$V(Q_n)=W_n(0)\cup W_n(1)\cup\cdots\cup W_n(n-1)\cup W_n(n)$$

と分割される. ある線形配置に関して, 右にある n-立方体の点程重みが大きい (小さい) とき, その線形配置は重み順 (重みについて降順) であると言うことにする.

文字 0 と 1 からなり, かつ, 丁度 k 個の 1 を含む語で, その語の中の最も右にある文字が 1 であるもの全てからなる集合を$\Sigma(k)$ で表す. $\Sigma(k)$ の語の間の圧縮順序 (squashed order) $\leq_{\mathrm{S}}$ とは, $w=w_1w_2\cdots w_m\in\Sigma(k)$ と $z=z_1z_2\cdots z_n\in\Sigma(k)$ に対して, $w\leq_{\mathrm{S}} z$ を, $\sum_{i=1}^m w_i2^{i-1}\leq\sum_{i=1}^n z_i2^{i-1}$ で定義することにより得られる順序関係である. この定義から明らかな通り, 圧縮順序において w が z よりも「小さいかあるいは等しい」とは, 語 w と z を,

それぞれ第 1 文字を最下位ビットとする非負整数の二進表現と見なした場合に w が z よりも小さいかあるいは等しいという意味である．通常，極値集合論 (extremal set theory) と呼ばれる分野では，圧縮順序は，一定の個数 (k 個) の要素からなる正整数の集合全てからなる集合族に対して定義される．本報告では，$\Sigma(k)$ の語 $w = w_1w_2\cdots w_m$ を正整数の集合 $\{i \in \mathbb{Z} \mid w_i = 1\}$ と同一視している．なお，ここでは，Q_n の点で重みが k のもの $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ と $\Sigma(k)$ の語 $w_1w_2\cdots w_m$ を同一視する．但し，m は，$w_i = 1$ を満たす $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ の最大値である．重みが $k > 0$ である Q_n の点からなる集合 $S \subseteq W_n(k)$ の影 (shadow) は，S の隣接部分と $W_n(k-1)$ の共通部分$\Gamma(S) \cap W_n(k-1)$ のことであり，$\Delta(S)$ で表す．但し，$S \subseteq W_n(0)$ の場合は，S の影は $\Delta(S) = \emptyset$ (空集合) である．

次の命題は，正整数のある種の表現方法を保証する．

命題 1 ([4][3][7]) k を正整数とする．任意の正整数 m は，

$$m = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \cdots + \binom{a_t}{t} \tag{1}$$

の形に一意に表すことができる．但し，$a_k > a_{k-1} > \cdots > a_t \geq t \geq 1$ である．

上記の式 (1) の形の m の表現は，m の k-二項係数表現と呼ばれる．また，この中の a_k を，その最大係数と呼ぶことにする．

3 線形配置の最大値コストの最小値の評価

ρ を n-立方体の線形配置としたとき，各 $k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$ に対して，$\rho(v) \leq i$ かつ $\rho(w) > k$ を満たす辺 $\{v, w\} \in E(Q_n)$ を「線形配置 ρ について k をまたぐ辺」と呼ぶことにする．線形配置の総和コストの評価では，k をまたぐ辺の本数がなるべく小さくなるような n-立方体の線形配置 ρ を見付けることが問題となった．これは，$S_k = \{\rho^{-1}(1), \rho^{-1}(2), \ldots, \rho^{-1}(k)\}$ に属する 2 点を結ぶ辺の本数がなるべく大きくなるような ρ を見付けることと等価である [6][5]．この問題と類似の次の問題 A を考えてみる．

> 問題 A: n-立方体の線形配置 ρ で，$S_k = \{\rho^{-1}(1), \rho^{-1}(2), \ldots, \rho^{-1}(k)\}$ の内部のサイズ $|\mathcal{I}(S_k)|$ がなるべく大きいものを見付けよ．

一般に無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，$S \subseteq V$ の内部は S から S の境界 $\partial(S)$ を引いて得られる差集合 $S \setminus \partial(S)$ であり，S の境界は，S の補集合の隣接部分 $\Gamma(V \setminus S)$ であることから，問題 A は次の問題 B と等価である．

> 問題 B: n-立方体の線形配置 ρ で，$S_k = \{\rho^{-1}(1), \rho^{-1}(2), \ldots, \rho^{-1}(k)\}$ の隣接部分のサイズ $|\Gamma(S_k)|$ がなるべく小さいものを見付けよ．

Q_n の点集合 $V(Q_n)$ の k-部分集合 (サイズが k である部分集合) の内部のサイズの最大値を $e_n(k)$ で表すことにする．S_k は，Q_n の k 個の点からなる集合であるから，S_k の内部のサイズは，$e_n(k)$ を超えることはできない．次の定理 1 は，$e_n(k)$ の上界を再帰的に定義している．

定理 1 関数列 $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ を $f_n(0) = 0$, $f_n(2^n) = 2^n$, かつ，$1 \leq k \leq 2^n - 1$ を満たす整数 k に対しては，

$$f_n(k) = \max_{\max\{0, k-2^{n-1}\} \leq i \leq k/2} (\min\{f_{n-1}(i), k-i\} + \min\{f_{n-1}(k-i), i\})$$

として再帰的に定義する．各関数 f_n は，$\{0, 1, \ldots, 2^n\}$ から非負整数への関数である．このとき，任意の正整数 n および 任意の非負整数 $k \leq 2^n$ に対して，

$$e_n(k) \leq f_n(k)$$

が成り立つ．

(証明)　n に関する帰納法で証明する．$e_1(0) = f_1(0) = 1$, $e_1(1) = f_1(1) = 0$, $e_1(2) = f_1(2) = 2$ が成立することは明らかである．以下 $n \geq 2$ とする．また，定義より，$k = 0$ あるいは $k = 2^n$ ならば $e_n(k) = f_n(k)$ が成り立つので，$1 \leq k \leq 2^n - 1$ と仮定する．$|\mathcal{I}(S)| = e_n(k)$ を満たすように，$S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq V(Q_n)$ を選ぶ．S_0 を S の要素のうち第 1 成分が 0 であるもの全てからなる集合とし，$S_1 = S \setminus S_0$ とする．$i = |S_0|$ とおく．$|S_0| \leq |S_1|$ と仮定し

てよい．なぜなら，S の各要素 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ を $(1-x_1,1-x_2,\ldots,1-x_n)$ (x の各成分をビット反転したもの) に置き換えて得られる集合 S' の内部のサイズは S の内部のサイズに等しく，かつ，S' の要素のうち第 1 成分が 0 であるものの個数は，S の要素のうち第 1 成分が 1 であるものの個数に等しいので，$|S_0|>|S_1|$ のときは，S' を改めて S とおけばよいからである．更に，$|S_0|+|S_1|=|S|=k$ および $0\le|S_0|\le 2^{n-1}$ および $0\le|S_1|\le 2^{n-1}$ より，$\max\{0,k-2^{n-1}\}\le i\le k/2$ が成り立つ．S_0 の要素 x の第 1 成分以外の成分をビット反転したもの x' が S の要素になるとしたら，$x'\in S_0$ でなくてはならない．従って，S_0 の要素で，その第 1 成分以外の成分をビット反転したものが S の要素になるものの個数は，帰納法の仮定より $e_{n-1}(i)$ を超えない．S_0 の要素 x の第 1 成分をビット反転したもの x'' が S の要素になるとしたら，$x''\in S_1$ でなくてはならない．従って，S_0 の要素で，その第 1 成分以外の成分をビット反転したものが S の要素になるものの個数は，$|S_1|=k-i$ を超えない．以上から，

$$|\mathcal{I}(S)\cap S_0|\le\min\{e_{n-1}(i),k-i\}\le\min\{f_{n-1}(i),k-i\}$$

が導かれる．また，同様の考察により，

$$|\mathcal{I}(S)\cap S_1|\le\min\{e_{n-1}(k-i),i\}\le\min\{f_{n-1}(k-i),i\}$$

も導かれる．従って，

$$e_n(k)=|\mathcal{I}(S)|=|\mathcal{I}(S)\cap S_0|+|\mathcal{I}(S)\cap S_1|\le\min\{f_{n-1}(i),k-i\}+\min\{f_{n-1}(k-i),i\}=f_n(k)$$

が導かれ，証明は完了した． ∎

ρ を n-立方体 Q_n の線形配置とし，v を Q_n の点とし，$\rho(v)=k$, $f_n(\rho(v))=k'$ とおく．このとき，Q_n の辺 $\{x,y\}$ で，$|\rho(x)-\rho(y)|\ge k-k'$ を満たすものが存在する．なぜなら，$S=\{\rho^{-1}(1),\rho^{-1}(2),\ldots,\rho^{-1}(k)\}$ の内部のサイズは高々 $k'=f_n(k)$ なので，$\{\rho^{-1}(1),\rho^{-1}(2),\ldots,\rho^{-1}(k'+1)\}$ には，S の境界の点 x が必ず含まれているからである．x に隣接し，$\rho(y)>k$ を満たす y を取ればよい．以上の考察から，各正整数 n に対して，$\mathrm{MAX}(\rho)=\max_{0\le k\le 2^n}(k-f_n(k))$ を満たす n-立方体の線形配置 ρ が存在すれば，$\mathrm{MAX}(\rho)$ は，n-立方体の線形配置の最大値コストの最小値である．しかしながら，このような都合のよい条件を満たす ρ の存在は，自明ではない．

なお，重み順線形配置に関して，次の補題が成り立つことは自明である．

補題 2 ρ を n-立方体の線形配置とし，$S(k)=\{\rho^{-1}(1),\rho^{-1}(2),\ldots,\rho^{-1}(k)\}$, $T(k)=\{\rho^{-1}(2^n-k+1),\rho^{-1}(2^n-k+2),\ldots,\rho^{-1}(2^n)\}$, $s(k)=w(\rho^{-1}(k))$, $t(k)=w(\rho^{-1}(2^n-k+1))$, とおいたとき，$\rho$ が重み順になっているならば，

$$\mathcal{I}(S(k))\subseteq\bigcup_{i=0}^{s-1}W_n(i)\quad\text{および}\quad\Gamma(T(k))\subseteq W_n(t-1)\cup W_n(t)$$

が成り立つ．

本報告では，最大値コストを最小にする線形配置の候補として，次に定義する δ_n を提案する．

定義 1 (δ_n) 各正整数 n に対して，n-立方体の線形配置 δ_n を次の 2 つの条件を満たすように一意に定める．x と y は，Q_n の任意の異なる 2 点とする．

1. $w(x)<w(y)$ ならば $\delta_n(x)<\delta_n(y)$.
2. $1\le w(x)=w(y)$ かつ $x\le_{\mathrm{S}} y$ ならば $\delta_n(y)<\delta_n(x)$.

なお，2 節にある通り，$w(x)$ は x の重みを表し，$\le_{\mathrm{S}}$ は圧縮順序を表す． ∎

この線形配置 δ_n をここでは，「重み順圧縮配置」と呼ぶことにする．重み順圧縮配置に関して，計算機実験により，次の事実が確かめられている．

事実 3 $1\le n\le 16$ および $0\le k\le 2^n$ を満たす任意の整数 n および k に対して，

$$|\mathcal{I}(\{\delta_n^{-1}(1),\delta_n^{-1}(2),\ldots,\delta_n^{-1}(k)\})|=f_n(k) \tag{2}$$

が成り立つ．

この事実から, $n > 16$ の場合にも式 (2) が成立することが強く予想される.

予想 1 任意の正整数 n および $0 \le k \le 2^n$ を満たす任意の整数 k に対して, 式 *(2)* が成り立つ.

この予想 1 と後に述べる補題 5 を組み合わせることにより, $\mathrm{MAX}(\delta_n)$ の最小性が導かれる. 予想 1 の証明は, 入り組んだ帰納法を使って得られているが, 十分な検証が完了していない. 次節以降では, 予想 1 について, 確定している範囲の事柄に基づいて, その成否を検討する.

4 Kruskal-Katona の定理と重み順圧縮配置 δ_n

前節で定義された重み順圧縮配置 δ_n の重要な性質が, Kruskal-Katona の定理と呼ばれる次の命題から導かれる.

命題 4 ([4][3][7]) n を正整数, $S \subseteq W_n(k)$, $|S| = m$ とし, m の k-二項係数表現を

$$m = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \cdots + \binom{a_t}{t}$$

とする. このとき,

$$|\Delta(S)| \ge \binom{a_k}{k-1} + \binom{a_{k-1}}{k-2} + \cdots + \binom{a_t}{t-1}$$

が成り立つ. 更に, 圧縮順序に関して, $W_n(k)$ の点の中で一番小さいものを v_1, 2 番目に小さいものを $v_2, \ldots, m$ 番目に小さいものを v_m とおけば

$$|\Delta(\{v_1, v_2, \ldots, v_m\})| = \binom{a_k}{k-1} + \binom{a_{k-1}}{k-2} + \cdots + \binom{a_t}{t-1}$$

が成り立つ. なお, $S \subseteq W_n(k)$ に対して, $\Delta(S) \subseteq W_n(k-1)$ は S の影を表す.

正整数 m の二項係数表現を

$$m = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \cdots + \binom{a_t}{t}$$

とする. m に対して,

$$\binom{a_k}{k-1} + \binom{a_{k-1}}{k-2} + \cdots + \binom{a_t}{t-1}$$

を対応させる関数を k を基底とする K 関数と呼び, m に対する関数値を $K_k(m)$ で表す. $K_k(m)$ は, 文献 [4] に従えば, $f(m; k, k-1)$ と表され, 文献 [3] に従えば, $F_k(m)$ と表される. なお, 形式的に, $K_0(0) = 0$ かつ任意の正整数 m に対して $K_0(m) = K_m(0) = 0$ と定義する.

圧縮順序に関して, 次の補題が成り立つ.

補題 5 n は正整数, k は $1 \le k \le n$ を満たす整数とする. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in W_n(k)$ とし, $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ を x と隣接する $W_n(k-1)$ の点の中で, 圧縮順序に関して最大のものとする. このとき,

$$\Delta(\{v \in W_n(k) \mid v \le_S x\}) = \{w \in W_n(k) \mid w \le_S x'\}$$

が成り立つ.

(証明) $|W_n(n)| = 1$ かつ $\Delta(W_n(n)) = W_n(n-1)$ より, $1 \le k \le n-1$ と仮定してよい. $x_i = 1$ を満たす $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ の最小値を s とおく. x' は, x の第 s 成分 $x_s = 1$ を 0 に置き換えて得られる. 初めに, $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in W_n(k)$ とし, $w \le_S x$ と仮定し, w と隣接する $W_n(k-1)$ の点の中で圧縮順序に関して最大のものを $w' = (w'_1, w'_2, \ldots, w_n)$ とおく. このとき, 以下のようにして $w' \le_S x'$ が導かれる. 圧縮順序の定義より, $\sum_{i=s+1}^{n} w_i 2^{i-1} \le \sum_{i=s+1}^{n} x_i 2^{i-1}$ が成立する. $x'_{s+1} = x_{s+1}, x'_{s+2} = x_{s+2}, \ldots, x'_n = x_n$ および $w'_1 \le w_1, w'_2 \le w_2, \ldots, w'_n \le w_n$ より, $\sum_{i=s+1}^{n} w_i 2^{i-1} < \sum_{i=s+1}^{n} x_i 2^{i-1}$ ならば, $w' \le_S x'$ は明らかである. $\sum_{i=s+1}^{n} w_i 2^{i-1} = \sum_{i=s+1}^{n} x_i 2^{i-1}$ ならば, $w_1, w_2, \ldots, w_s$ の中の値が 1 の成分の個数は, 丁度 1 なので, $w' = x'$ が導かれる. 以上で, $w' \le_S x'$ が導かれた. 次に, $z' = (z'_1, z'_2, \ldots, z'_n) \in W_n(k-1)$ とし, $z' \le_S x'$ と仮定し, z' と隣接する $W_n(k)$ の点の中で圧縮順序に関して最小のものを $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ とおく. このとき, 以下のようにして $z \le_S x$ が導かれる. $z'_i = 0$

を満たす i の最小値を t とおく. z は, z' の第 t 成分 $z_t = 0$ を 1 に置き換えて得られる. 圧縮順序の定義より, $\sum_{i=t+1}^{n} z'_i 2^{i-1} \le \sum_{i=t+1}^{n} x'_i 2^{i-1}$ が成立する. $x'_1 \le x_1$, $x'_2 \le x_2$, ..., $x'_n \le x_n$ および $z'_{t+1} = z_{t+1}$, $z'_{t+2} = z_{t+2}$, ..., $z'_n = z_n$ より, $\sum_{i=t+1}^{n} z'_i 2^{i-1} < \sum_{i=t+1}^{n} x'_i 2^{i-1}$ ならば, $w' \le_S x'$ は明らかである. $\sum_{i=t+1}^{n} z'_i 2^{i-1} = \sum_{i=t+1}^{n} x'_i 2^{i-1}$ ならば, $x'_1, x'_2, \ldots, x'_t$ の中の値が 0 の成分の個数は, 丁度 1 なので, $z = x$ が導かれる. 以上で, $z \le_S x$ が導かれた. 従って, 補題は証明された. ∎

この補題から次の補題が直ちに導かれる. なお, 説明を簡潔にするために, これ以後 $A_n(k) = \{\delta_n^{-1}(1), \delta_n^{-1}(2), \ldots, \delta_n^{-1}(k)\}$ および $B_n(k) = \{\delta_n^{-1}(2^n - k + 1), \delta_n^{-1}(2^n - k + 2), \ldots, \delta_n^{-1}(2^n)\}$ と表す.

補題 6 n を正整数とし, k を $1 \le k \le 2^n - 1$ を満たす整数とする. また, m を $B_n(k)$ の点のうち最も左にあるもの $\delta_n^{-1}(2^n - k + 1)$ の重みとする. ことのき,

$$|\Gamma_{Q_n}(B_n(k))| = K_m\left(k - \sum_{i=a+1}^{n} \binom{n}{i}\right) + \left(\sum_{i=a}^{n} \binom{n}{i}\right) - k$$

が成り立つ.

更に, 命題 4 および 補題 5 より, 次の定理が直ちに導かれる.

定理 2 n を正整数とし, ρ を n-立方体の線形配置とする.

$$w(\rho^{-1}(1)) \le w(\rho^{-1}(2)) \le \cdots \le w(\rho^{-1}(2^n)) \tag{3}$$

ならば, $1 \le k \le 2^{n-1}$ を満たす任意の整数 k に対して,

$$|\mathcal{I}(\{\rho^{-1}(1), \rho^{-1}(2), \ldots \rho^{-1}(k)\})| \le |\mathcal{I}(A_n(k))|$$

が成り立つ. 従って, $MAX(\rho) \le MAX(\delta_n)$ が成り立つ. なお, Q_n の点 x に対して, $w(x)$ は, x の重みを表す.

(略証) $A = \{\rho^{-1}(1), \rho^{-1}(2), \ldots \rho^{-1}(k)\}$, $B = A_n(k) = \{\delta_n^{-1}(1), \delta_n^{-1}(2), \ldots \delta_n^{-1}(k)\}$ $\delta_n^{-1}(k+1)$ の重みを m とおく. 式 (3) が成立することから, $\rho^{-1}(k+1)$ の重みも m であり, 更に, $\mathcal{I}(A) = \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} W_n(i)\right) \setminus \Delta(W_n(m) \setminus A)$ および $\mathcal{I}(B) = \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} W_n(i)\right) \setminus \Delta(W_n(m) \setminus B)$ が導かれる. 従って, $|\mathcal{I}(A)| = \left(\sum_{i=1}^{m-1} \binom{n}{i}\right) - |\Delta(W_n(m) \setminus A)|$ および $|\mathcal{I}(B)| = \left(\sum_{i=1}^{m-1} \binom{n}{i}\right) - |\Delta(W_n(m) \setminus B)|$ δ_n の定義より, $W_n(m) \setminus B$ は, 圧縮順序に関して小さい方から $\left(\sum_{i=1}^{m} \binom{n}{i}\right) - k$ 個の $W_n(m)$ の要素からなる集合であり, 従って, 命題 4 (Kruskal-Katona の定理) より, $|\Delta(W_n(m) \setminus B)| \le |\Delta(W_n(m) \setminus A)|$ が成り立つ. 従って, $|\mathcal{I}(A)| \le |\mathcal{I}(B)|$ が導かれ, 定理の証明は完了した. ∎

この定理 2 は, 対象とする線形配置 ρ を, $\rho^{-1}(1), \rho^{-1}(2), \ldots, \rho^{-1}(2^n)$ が重みの順に並ぶという性質を持つものに制限した場合, $\mathrm{MAX}(\delta_n)$ が $\mathrm{MAX}(\rho)$ の最小値を与えることを含む, 好ましい性質を持つことを主張している. 事実 3 で述べた計算機実験の結果に加えて, 定理 2 は, 予想 1 の正当性の状況証拠となっている.

5 予想の証明のための十分条件

本節では, 予想 1 が K 関数の性質に関する別の予想に帰着されることを述べる.

以下, n は正整数を, k は $0 \le k \le 2^n$ を満たす整数を表す. なお, Q_n の点からなる集合 $A_n(k)$ および $B_n(k)$ については, 補題 6 の直前の部分を参照されたい. $k = 0$ および $k = 2^n$ に対して, $|\mathcal{I}(A_n(k))| = f_n(k)$ が成り立つことは明らかなので, $|\mathcal{I}(A_n(k))| = f_n(k)$ を示すためには, 任意の $1 \le k \le 2^n - 1$ に対して,

$$|\mathcal{I}(A_n(k))| \ge \max_{\max\{0, k-2^{n-1}\} \le i \le k/2} (\min\{|\mathcal{I}(A_{n-1}(i))|, k - i\} + \min\{|\mathcal{I}(A_{n-1}(k-i))|, i\})$$

が成り立つことを示せば十分である. この条件は,

$$|\Gamma(B_n(k))| \le \min_{\max\{0, k-2^{n-1}\} \le i \le k/2} (\max\{|\Gamma(B_{n-1}(i))|, k - 2i\} + \max\{|\Gamma(B_{n-1}(k-i))|, 2i - k\}) \tag{4}$$

と等価である. 式 (4) の右辺の最小値を与える i を $\tilde{i}$ とおく. $B_{n-1}(\tilde{i})$ の点のうち δ_{n-1} に関して最も左にあるもの $\delta_{n-1}^{-1}(2^{n-1} - \tilde{i} + 1)$ の重みを a, $B_{n-1}(k - \tilde{i})$ の点のうち, δ_{n-1} に関して最も左にあるもの $\delta_{n-1}^{-1}(2^{n-1} - k + \tilde{i} + 1)$ の重みを b とおけば, 次の補題が成り立つ.

補題 7

$$b \leq a \leq b+1 \tag{5}$$

かあるいは

$$a = b+2 \quad \text{かつ} \quad \tilde{i} = \sum_{i=a}^{n-1} \binom{n-1}{i} \quad \text{かつ} \quad k - \tilde{i} = 1 + \sum_{i=a-1}^{n-1} \binom{n-1}{i}. \tag{6}$$

なぜなら, もし, 式 (5), (6) がどちらも成り立たなければ, 補題 2 と 補題 5 と δ_n の定義から, $|\Gamma(B_{n-1}(\tilde{i}))| \leq k-2(\tilde{i}+1)$ が成り立ち, 従って,

$$\begin{aligned}
&\max\{|\Gamma(B_{n-1}(\tilde{i}))|, k-2\tilde{i}\} + \max\{|\Gamma(B_{n-1}(k-\tilde{i}))|, 2\tilde{i}-k\} \\
&= |\Gamma(B_{n-1}(k-\tilde{i}))| + k - 2\tilde{i} > |\Gamma(B_{n-1}(k-(\tilde{i}+1)))| + k - 2(\tilde{i}+1) \\
&= \max\{|\Gamma(B_{n-1}(\tilde{i}+1))|, k-2(\tilde{i}+1)\} + \max\{|\Gamma(B_{n-1}(k-(\tilde{i}+1)))|, 2(\tilde{i}+1)-k\}
\end{aligned}$$

が導かれるが, これは $\tilde{i}$ の定義と矛盾するからである.

また, 式 (6) が成り立てば, 補題 2, 6 を使って

$$\begin{aligned}
|\Gamma(B_{n-1}(k-\tilde{i}))| + k - 2\tilde{i} &= \binom{n-1}{a-2} + K_{a-2}(1) - 1 + \binom{n-1}{a-1} + 1 \\
&= \binom{n}{a-1} + K > \binom{n}{a-1} + K - 1 = |\Gamma(B_n(k))|
\end{aligned}$$

が導かれるので, 以後, 式 (5) が成り立つと仮定する.

式 (5) の仮定を, $a=b$ の場合と $a=b+1$ の場合に分けて考察する. 予想 1 は, $a=b$ の場合は, 下の予想 2 に, $a=b+1$ の場合は, 下の予想 3 に帰着される.

予想 2 n を正整数とし, m を n 以下の正整数とする. x と y は, どちらも $\binom{n}{m}$ よりも小さい正整数であるとする. このとき,

$$x+y \leq \binom{n}{m} \quad \text{ならば} \quad K_m(x) + K_m(y) \leq K_m(x+y)$$

および

$$x+y > \binom{n}{m} \quad \text{ならば} \quad K_m(x) + K_m(y) \leq K_m\left(x+y-\binom{n}{m}\right) + \binom{n}{m-1}$$

が成り立つ.

予想 3 n, m, x, y を正整数とし, $m \leq n$ であるとする. このとき,

$$x < \binom{n}{m} \quad \text{かつ} \quad y \leq K_m(x+1)$$

ならば

$$K_m(x) + K_{m-1}(y) \leq K_m(x+y)$$

が成り立つ.

6 おわりに

従来, n-立方体あるいは n-次元ハイパーキューブを直線上に等間隔に配置する方法に対して, 本報告で総和コストと呼ぶコストなどが導入され検討されて来た. 本報告では, 新たに最大値コストと呼ぶコストを導入し, それを最小にすると予想する線形配置 δ_n を提案した. 本報告では, これを重み順圧縮配置と呼ぶ. 著者らは, 計算機実験の結果などにより, この予想の成立を確信しているが, 証明の検証は, 完了していない.

δ_n の最大値コストは, 次の通り求まっている:

$$\mathrm{MAX}(\delta_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{\lceil k/2 \rceil} = \Theta\left(\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}\right) = \Theta(2^n/\sqrt{n}).$$

一方, 総和コストに関して最適な自然配置 α_n は, n-立方体の点を左から右に 2 進表現と見なして大きくなる順に並べる線形配置であるが, 最大値コストは,

$$\mathrm{MAX}(\alpha_n) = 2^{n-1} = \Theta(2^n)$$

であり, 極めて悪い. 一方, 重み順線形配置の総和コストは全て等しく, その値は,

$$\mathrm{SUM}(\delta_n) = \frac{n}{2}\binom{2n}{n} = \Theta(2^{2n}\sqrt{n})$$

である. この値は, 自然配置の総和コスト

$$\mathrm{SUM}(\alpha_n) = 2^{n-1}(2^n - 1) = \Theta\left(2^{2n}\right)$$

の $\sqrt{n}$ 倍の規模になっている.

上に挙げたような, 自然配置と重み順圧縮配置の間のコストの差異は, どちらの線形配置も, 「n-立方体の点を線形配置に関して右側と左側に分割したときの左側の点と右側の点同士の結び付きをなるべく小さくする」という性質を持っていることを考慮すれば興味深い. 異なるコストの間のトレードオフについて調べることも今後の研究課題として挙げられる. なお, 辺が最大値コストに与える影響の度合, 即ち線形配置による辺の像の長さは, 端点の重みが $n/2$ に近い程大きく, 左右両端に近い程小さいので, 中央部分だけを δ_n に一致させ, 残りを総和コストが小さくなるように並べ直すことにより, 最大値コストを最小値に保ったまま, 総和コストが δ_n よりも小さい規模の線形配置が得られる可能性がある.

予想 1 にあるように, 重み順圧縮配置 δ_n が優れた性質を持っている可能性を考慮すれば, δ_n が持つ「良さ」を最大値コストが小さいことだけで評価するのは不十分である. むしろ,

$$\frac{1}{2^n}\sum_{v\in V(Q_n)} \max_{w\in\Gamma(\{v\})} |\delta_n(v) - \delta_n(w)|$$

で定義されるような, 各点に接続する辺の最大長の平均値のようなものをコストに選んで評価した方が, その良さがより反映されると考えられる.

参考文献

[1] P. Frankl. Extremal set systems. In *Handbook of combinatorics*, chapter 24, pp. 1293–1329. Elsevier, Amsterdam, 1995.

[2] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and intractability*. Freeman, New York, 1979.

[3] G. O. H. Katona. A theorem of finite sets. In *Theory of Graphs, Proc. Colloq. Tihany*, pp. 187–207. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1966.

[4] J. B. Kruskal. The number of simplices in a complex. In *Mathematical Optimization Techniques*, pp. 251–278. University of California Press, Berkeley, 1963.

[5] K. Nakano, T. Masuzawa, and N. Tokura. Linear layout of hypercubes. 情報基礎理論ワークショップ, pp. 95–100, 1990.

[6] 中野浩嗣, 陳慰, 増澤利光, 萩原兼一. 超立方体グラフの切断幅と 2 分割幅. 電子情報通信学会論文誌 A, Vol. J73-A, No. 4, pp. 856–862, 1990.

[7] 惠羅博, 土屋守正. 組合せ論. 産業図書株式会社, 1996.