

デバイスシミュレーションにおける TF前処理とILU前処理との性能比較

土肥 俊, 原田紀夫

日本電気(株) C & C 情報研究所

規則疎な非対称連立一次方程式の反復解法のためのスーパーコンピュータ向き前処理手法として筆者らの提案した三重対角近似分解法(TF法)を用いたTFBCG/TFCGSアルゴリズムを, 2次元MOSFETデバイスシミュレーションにおける電子電流連続式とエネルギー保存式の求解に適用し, スーパーコンピュータSX-2における計算時間・収束性を従来のILUBCG/ILUCGSアルゴリズムと比較する。TF前処理を用いた反復法はILU前処理(fill-inなし)による反復法よりも反復回数が多いが, SX-2での計算時間では1/1.2~1/2と高速である。fill-inを考慮したILU前処理(ILU(1,2)及びILU(2,3))との比較では, ILUCGS(2,3)アルゴリズムが最も高速であり, 続いてTFCGS, ILUCGS(1,2)の順となる。しかしそれらの差は1割程度とわずかである。

本稿ではまた, ILU行列導出過程の一般化としての「前処理行列導出手順」を導入し, それによってTF行列も同様に導出できることを示す。さらに両前処理行列の近似性についても比較評価を行う。

COMPARING PERFORMANCE OF THE TF AND ILU PRECONDITIONERS FOR DEVICE SIMULATION APPLICATION (in Japanese)

Shun DOI, Norio HARADA

C&C Information Technology Research Laboratories
NEC Corporation

4-1-1, Miyazaki, Miyamae-ku, Kawasaki 213, JAPAN

Convergence and computational speed of the Tridiagonal Factorization (TF) preconditioner, which was introduced by the authors, have been compared on the NEC SX-2 supercomputer with the conventional ILU preconditioner for solving nonsymmetric linear systems arising from carrier continuity and energy conservation equations for 2-D MOSFET device simulation. Although, the TFBCG/TFCGS programs, combinations of the TF preconditioner with the BCG/CGS iterative procedures, require more iterations than the non-fill-in ILUBCG/ILUCGS programs, they are 1.2 to 2 times faster than the ILU's. Comparison of the TFCGS program with some fill-in ILUCGS algorithms show that the TFCGS is about 10% slower than the ILUCGS(2,3), as well as being about 10% faster than the ILUCGS(1,2).

This paper also shows that the TF preconditioner can be introduced by a procedure, which is a generalization of the ILU preconditioner introduction process. The approximation property of both preconditioners is also discussed.

1. はじめに

スーパーコンピュータの普及に伴い、ベクトル化率・ベクトル処理効率の高いアルゴリズムの重要性が増している。

筆者らは文献[1]で、移流拡散方程式の差分近似から生じる規則疎非対称連立一次方程式求解のためのスーパーコンピュータ向き前処理法として、三重対角近似分解(Tridiagonal Factorization;TF)法を提案した。TF法の前処理行列(TF行列)は原偏微分方程式の独立変数(x,y,z)に対応する部分係数行列への「行列分離」³⁾として定義される。その逆行列操作はILU法⁴⁾と演算量が等しく、またADI法⁵⁾と同じ並列性を持つ。

文献[2]では3次元の例題について、TF法をBCG法⁶⁾に適用したTFBCG法と従来の(M)ILUBCG法(fill-inなし)とを比較することにより、TF法の収束性はILU法より若干劣る(反復数で0~6割増し)が、スーパーコンピュータSX-2上での計算時間はリストベクトル版ILUBCG法⁷⁾の1/2~1/3倍であることを示した。一方、Gustafsson補正⁸⁾が効果を示す問題では同MILUBCG法と同程度の計算時間であることもわかった。

本稿では2次元の数値例として、デバイス・シミュレーションにおける電子電流連続式とエネルギー保存式とを取り上げ、TF法とILU法との比較を行う。基礎反復法としてはBCG法とCGS法⁹⁾を用いる。

本稿第2章ではまた、ILU行列導出過程の一般化としての「前処理行列導出手順」を導入し、それによって同様にTF行列も導出できることを示す。TF法とILU法との相違はそれらの行列構造にあること、それらは共にある重要な条件を満たすことを示す。第3章では、TF法・ILU法の前処理行列の近似誤差が方程式の異方性や移流性強度の変化に対してどのように変化するかを示す式を導き、それによって近似性の比較評価を行う。その結果、これら指標の変化に対して両手法の近似誤差は非常によく似た特性を示すことが明らかになる。

2. TF法とILU法の導出過程の比較

本章では、TF法とILU法とが同一の手順で導出できることを示す。まずはじめに準備を行う。

規則疎な非対称N元連立一次方程式を

$$A u = f \quad (1)$$

と表す。ここで係数行列Aは図1に示される構造を持つものとする。

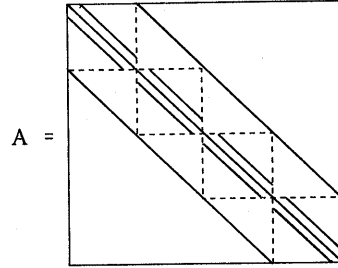


図1. 2次元5点差分行列の構造

式(1)に対する前処理付き反復法はこれと等価な式

$$(A M^{-1})(M u) = f$$

(または $(M^{-1}A)u = M^{-1}f$)に対する反復法であると定義される。Mは前処理行列と呼ばれる。即ち「前処理付き反復法」は前処理行列Mの構成法(前処理法)と双対共役勾配法など前処理なしの反復法(基礎反復法)の独立な技術の組合せとして実現される。以下では、ベクトル計算・並列計算において特に重要な前処理法を取り上げ、議論する。

ここで行列の表記法を導入する。行列Aの第i行の非零要素のみを取り出して並べ、それを $A[i]$ と表す。これを用いて、2次元5点差分行列の第i行を

$$A[i] = [b_i \quad c_i \quad d_i \quad e_i \quad f_i] \quad (2)$$

$$i-n_x \quad i-1 \quad i \quad i+1 \quad i+n_x$$

と表す。

「前処理行列導出手順」を定義する。

- 1) 前処理行列M(未知係数)の構造を決める。
- 2) Mを展開する。
- 3) 原係数行列Aとの係数比較により、Mの未知係数を決定する。このときAの非零要素とそれに対応するMの要素が等しいという条件を課す。

本手順に従ってTF法・ILU法を実際に導出する。まずTF法を導出する。

- 1) TF行列 $M_{TF} = X D Y$ とおく。ここで、

$$X[i] = [0 \quad C_i \quad 1/D_i \quad E_i \quad 0],$$

$$D[i] = [0 \quad 0 \quad D_i \quad 0 \quad 0],$$

$$Y[i] = [B_i \quad 0 \quad 1/D_i \quad 0 \quad F_i]. \quad (3)$$

- 2) $X D Y$ を展開すると次のようになる。

$\{X D Y\}[i] = [$	$B_{i-1} D_{i-1} C_i$	列番号 $i-n_x-1$
	B_i	$i-n_x$
	$E_{i+1} D_{i+1} B_i$	$i-n_x+1$

$$\begin{array}{ll}
 C_i & i-1 \\
 1/D_i & i \\
 E_i & i+1 \\
 C_i D_{i-1} F_{i-1} & i+n_x-1 \\
 F_i & i+n_x \\
 E_i D_{i+1} F_{i+1} & i+n_x+1
 \end{array} \quad (4)$$

3) 付加条件より次式を得る.

$$B_i = b_i, C_i = c_i, E_i = e_i, F_i = f_i, D_i = 1/d_i. \quad (5)$$

式(5)を式(3)に代入すると

$$\begin{aligned}
 X[i] &= [0 \quad c_i \quad d_i \quad e_i \quad 0], \\
 D[i] &= [0 \quad 0 \quad 1/d_i \quad 0 \quad 0], \\
 Y[i] &= [b_i \quad 0 \quad d_i \quad 0 \quad f_i],
 \end{aligned}$$

となる。これは三重対角型の行列分離、即ちTF法、を表している。

同様に、ILU法を導出する。

1) ILU行列 $M_{ILU} = LDU$ とおく。ここで、

$$\begin{aligned}
 L[i] &= [B_i \quad C_i \quad 1/D_i \quad 0 \quad 0], \\
 D[i] &= [0 \quad 0 \quad D_i \quad 0 \quad 0], \\
 U[i] &= [0 \quad 0 \quad 1/D_i \quad E_i \quad F_i]. \quad (6)
 \end{aligned}$$

2) LDUを展開すると次のようになる。

	列番号
$\{LDU\}[i] = [B_i$	$i-n_x$
$B_i D_{i-n_x} E_{i-n_x}$	$i-n_x+1$
C_i	$i-1$
$B_i D_{i-n_x} F_{i-n_x} + C_i D_{i-1} E_{i-1} + 1/D_i$	i
E_i	$i+1$
$F_{i-1} D_{i-1} C_i$	$i+n_x-1$
F_i	$i+n_x$

(7)

3) 付加条件より次式を得る.

$$B_i = b_i, C_i = c_i, E_i = e_i, F_i = f_i,$$

$$b_i f_{i-n_x} D_{i-n_x} + c_i e_{i-1} D_{i-1} + 1/D_i = d_i. \quad (8)$$

Dに関する式は次の漸化式に書き替えられる。

$$D_i = 1/(d_i - b_i f_{i-n_x} D_{i-n_x} - c_i e_{i-1} D_{i-1}). \quad (9)$$

これはILU法の漸化式にほかならない。

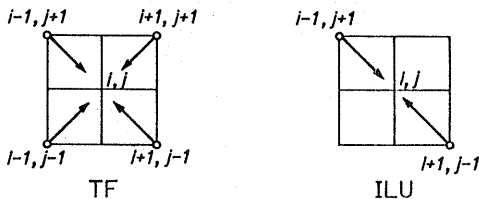


図2. 前処理行列の近似誤差の空間表現

「前処理行列導出手順」によってTF法とILU法とが統一に導出できることを示した。この手順は、その一場合としてILU法が導出されるという意味で、ILU行列導出過程の一般化となっている。

本章ではさらに、TF法とILU法との相違点はそれらの前処理行列構造にあること、即ちTF法の三重対角行列(式(3))とILU法の三角行列(式(6))、また何れの方法も前処理行列Mの非零要素のうちAの非零要素に対応する部分はそれと等しいという性質を持つことを示した。

3. TF法とILU法の近似性の比較

式(4)はTF行列第i行の誤差が $i \pm n_x \pm 1$ (順序不定)列に現れることを示している。また式(7)はILU行列第i行の近似誤差が $i \pm n_x \mp 1$ 列に現れることを示している。これらはまた図2により空間表現できる。本章ではこれら近似誤差が方程式の異方性・移流性の変化に対してどのように変化するかを比較・評価する。

前処理行列Mの近似誤差行列Rを $M-A$ で定義し、その第i行の非零要素次式のように表す。

$$R[i] = [r^1_i \quad r^2_i \quad r^3_i \quad r^4_i]$$

$i-n_x-1 \quad i-n_x+1 \quad i+n_x-1 \quad i+n_x+1$

以下では全てのiについて $b_i = b, c_i = c, d_i = d, e_i = e, f_i = f$ かつ $d > 0$ なる場合を考える。この場合、 $r^k_i = r^k$ ($k=1, 2, 3, 4$) であるから、以下では必要のない限りiをつけない。

式(2), (4), (5)より、TF行列の誤差は次のように容易に求まる。

$$\begin{aligned}
 r_{TF}^1 & (= r_{TF}^1 = c_i b_{i-1} / d_{i-1}) = bc/d, \\
 r_{TF}^2 & (= r_{TF}^2 = e_i b_{i+1} / d_{i+1}) = be/d, \\
 r_{TF}^3 & (= r_{TF}^3 = c_i f_{i-1} / d_{i-1}) = cf/d, \\
 r_{TF}^4 & (= r_{TF}^4 = e_i f_{i+1} / d_{i+1}) = ef/d. \quad (10)
 \end{aligned}$$

一方ILU法の場合、漸化式(9)があるので r を b_i, c_i などの式として簡単には表せない。しかしここで、級数 $\{D_i\}$ がある値Dに収束すると仮定すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 r_{ILU}^1 & = r_{ILU}^4 = 0, \\
 r_{ILU}^2 & = \frac{be[d - \{d^2 - 4(bf+ce)\}^{1/2}]}{2(bf+ce)}, \\
 r_{ILU}^3 & = \frac{cf[d - \{d^2 - 4(bf+ce)\}^{1/2}]}{2(bf+ce)}. \quad (11)
 \end{aligned}$$

* 比較的簡単な例で実際に計算してみると、 $\{D_i\}$ は有限の値Dに十分速く収束する。

式(10)と式(11)とを用いて,TF法とILU法の近似誤差の大きさを比較するために,方程式

$$(k_x u_x)_x + (k_y u_y)_y - v_x u_x = 0,$$

を導入する(k_x, k_y, v_x 以外の添字 x, y は微分を表す).

拡散項に中心差分を,また移流項に風上差分を,それぞれ用い,上式を離散化する.空間刻み $\Delta x = \Delta y = 1$ とする.

はじめに近似誤差と異方性との関係調べる. $v_x = 0$ とし,Aの係数 b, c, d, e, f を k_x, k_y で表すと,

$$b = f = -k_y, \quad c = e = -k_x, \quad d = 2(k_x + k_y)$$

となる.これを式(10),(11)に代入し,次式を得る.

$$\begin{aligned} r_{TF}^1 &= r_{TF}^2 = r_{TF}^3 = r_{TF}^4 = k_x k_y / 2(k_x + k_y), \\ r_{ILU}^2 &= r_{ILU}^3 = \frac{k_x k_y \{k_x + k_y - (2k_x k_y)^{1/2}\}}{k_x^2 + k_y^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

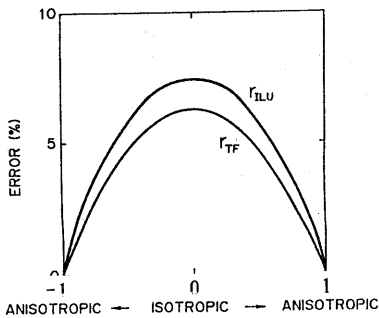


図3. 異方性の強さと近似誤差との関係

$$\begin{aligned} \partial_x(k_x \partial_x u) + \partial_y(k_y \partial_y u) &= 0 \\ (k_x - k_y) / (k_x + k_y) &: \text{Anisotropy} \\ (\Delta x = \Delta y = 1) \end{aligned}$$

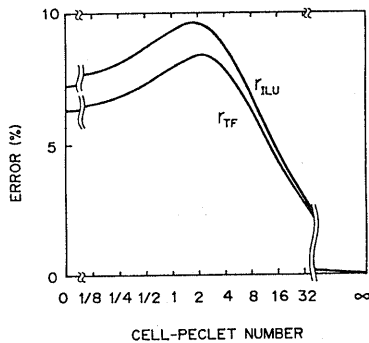


図4. 移流性の強さと近似誤差との関係

$$\begin{aligned} \Delta u - P_e \partial_x u &= 0 \\ P_e = P_e \Delta x &: \text{Cell-Peclet no.} \\ (\Delta x = \Delta y = 1) \end{aligned}$$

即ち,全ての誤差項の値がそれぞれ等しい.ここで,異方性の強さの指標として異方度 P_a を

$$P_a = (k_x - k_y) / (k_x + k_y)$$

と定義する.図3は式(12)の r_{TF}, r_{ILU} を行列Aの対角項 d で正規化した値を P_a を横軸にして表したものである.

同様に,近似誤差と移流性との関係を調べる. $k_x = k_y = 1$ とすると

$$b = c = f = -1, \quad d = 4 + v_x, \quad e = -(1 + v_x)$$

となる.これを式(10),(11)に代入し,次式を得る.

$$\begin{aligned} r_{TF}^1 &= r_{TF}^3 = 1 / (4 + v_x), \\ r_{TF}^2 &= r_{TF}^4 = (1 + v_x) / (4 + v_x), \\ r_{ILU}^2 &= \frac{(1 + v_x) \{4 + v_x - (8 + 4v_x + v_x^2)^{1/2}\}}{2(2 + v_x)}, \\ r_{ILU}^3 &= \frac{4 + v_x - (8 + 4v_x + v_x^2)^{1/2}}{2(2 + v_x)}. \end{aligned} \quad (13)$$

$r_{TF}^1, r_{TF}^3, r_{ILU}^3$ は v_x の増加に伴って単調減少する.従って,誤差の支配項は $r_{TF}^2, r_{TF}^4, r_{ILU}^2$ である.移流性の強さの指標であるセルペクレ数 P_o は

$$P_o = \Delta x \cdot v_x / k_x = v_x$$

となる.図4は式(13)の $r_{TF}^2 (= r_{TF}^4 r), r_{ILU}^2$ をAの対

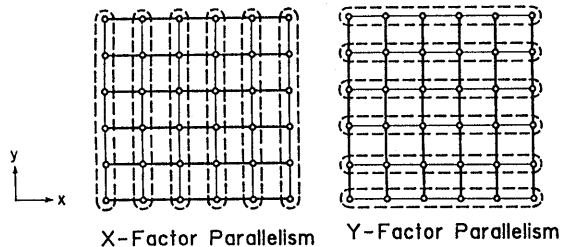


図5. TF前処理法における並列性

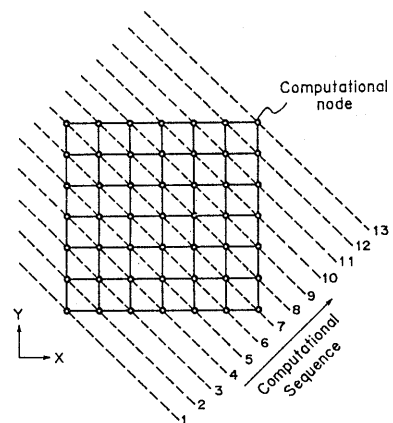


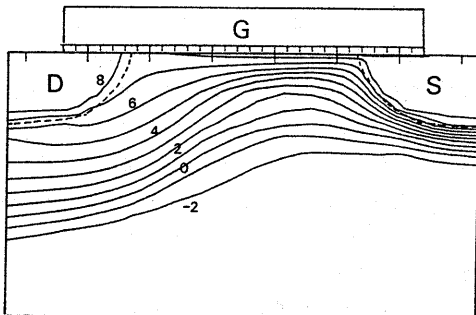
図6. ILU前処理法における並列性

角項dで正規化し、 P_0 を横軸にして表したものである。図3,4より次のことがわかる。

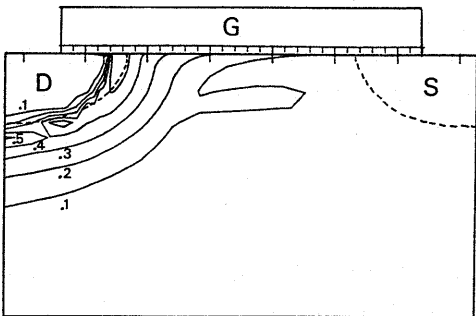
- 1) 両近似誤差の大きさは、異方性・移流性の変化に対して全く同じ傾向で変化する。
- 2) TF行列の近似誤差値はILU行列のそれよりも常に約2割程度小さい(ただし誤差の項数はILU法が2項であるのに対してTF法はその倍の4項であるから、TF法のほうが近似の度合いが高いということをこのことは意味しているわけではない)。
- 3) 異方性・移流性が大きくなると、TF法・ILU法の近似誤差は小さくなる傾向がある。但し、移流性に対しては、セルベクレ数が2前後でピークが現れる。

4. デバイスシミュレーションによる比較

比較実験には、当社の2次元MOSFETシミュレータ¹⁰⁾を用いた。付録にその方程式を示す。例題は外部反復の第1回目と最終回における電子電流連続式とエネルギー保存式とである。一般に最初の外部反復における方程式は質が悪い。



a. キャリア分布 ($\log(n/n_1), n_1: \text{const}$)



b. エネルギー分布 (eV)

図7. デバイス構造と解析結果

基礎反復法としては、BCG法とCGS法⁹⁾とを用いた。前処理行列Mによる前進後退代入 $v = M^{-1}g$ に関して、TF法ではADI法⁵⁾と同様のベクトル化を行った(図5)。一方ILUBCG法・ILUCGS法ではハイパープレーン法によるベクトル化を行った(図6)。これは、例えばILU分解された下三角行列Lによる前進代入 $v = L^{-1}g$;

$$v_{ij} = (g_{ij} - l_{ij-1} \cdot v_{i,j-1} - l_{i-1,j} \cdot v_{i-1,j}) / l_{ij}$$

表1.a 例題1における反復回数の比較(回)

		BCG法		CGS法	
方程式	反復	TFBCG	ILUBCG	TFCGS	ILUCGS
電子電流連続	初期	170	133	114	82
	最終	105	91	59	49
エネルギー保存	初期	8	8	5	5
	最終	9	5	6	3

表1.b 例題1における計算時間の比較($\times 10^{-3}$ sec)

		BCG法		CGS法	
方程式	反復	TFBCG	ILUBCG	TFCGS	ILUCGS
電子電流連続	初期	87.7	151.2	56.1	93.2
	最終	50.4	103.8	28.2	56.1
エネルギー保存	初期	4.1	9.6	2.8	6.1
	最終	4.5	6.1	3.2	3.8
計		146.7	270.7	90.3	159.2
比		1.62	3.00	1.00	1.76

表2.a 例題2における反復回数の比較(回)

		BCG法		CGS法	
方程式	反復	TFBCG	ILUBCG	TFCGS	ILUCGS
電子電流連続	初期	158	102	68	53
	最終	103	73	70	46
エネルギー保存	初期	12	8	9	6
	最終	12	8	7	4

表2.b 例題2における計算時間の比較($\times 10^{-3}$ sec)

		BCG法		CGS法	
方程式	反復	TFBCG	ILUBCG	TFCGS	ILUCGS
電子電流連続	初期	76.3	88.7	32.6	47.0
	最終	47.2	64.0	33.4	40.7
エネルギー保存	初期	6.0	7.3	4.6	5.6
	最終	5.9	7.3	3.7	3.9
計		135.5	167.3	74.3	97.2
比		1.82	2.25	1.00	1.31

において $i+j=一定$ となる v_{ij} を同時処理する。x方向のメッシュ・サイズを n_x とすると、これは n_x-1 飛びの等間隔メモリアクセスとなり、ベクトル処理される。

表1~3に実験結果を示す。表1は例題1に、表2は例題2にそれぞれ対応する。それぞれaは反復数、bはSX-2による計算時間である。なお収束の打ち切り条件は相対2乗残差 10^{-12} とした。例題として用いたデバイスの構造と解の一例を図7に示す。表より次のことがわかる。

- 1) 基礎反復法としては、CGS法がBCG法よりも反復数・計算時間共に少ない。
- 2) TF前処理の反復数は、電子電流連続式でILU前処理の1.2~1.5倍、エネルギー保存式で1~2倍である。
- 3) TF前処理を使用した場合の計算速度は、電子電流連続式でILU前処理の1.2~2倍、エネルギー保存式で1~2.4倍である。

表3はTF法をGustafsson補正⁹⁾・fill-inのあるILU法と比較した結果である。(M)ILU法はいずれもハイパープレーン法によるベクトル化を行っている。基礎反復法にCGS法を用い、例題は表1と同じものを使用した。表より、以下のことが結論できる。

- 4) Gustafsson補正は本例題では効果がない。むしろ反復数を増大させる傾向にある。
- 5) fill-inILU法は反復数低減の効果が大きい。特に、電子電流連続式で、ILU(1,1)の反復数がILU(1,2)により1/2.5~1/3に、ILU(2,3)により1/4~1/5に

表3.a 例題1における反復回数の比較(回)

		CGS法			
方程式	反復	TF	MILU	ILU-12	ILU-23
電子電流連続	初期	114	175	26	16
	最終	59	47	19	12
エネルギー保存	初期	5	8	4	3
	最終	6	4	2	2

表3.b 例題1における計算時間の比較($\times 10^{-3}$ sec)

		CGS法			
方程式	反復	TF	MILU	ILU-12	ILU-23
電子電流連続	初期	56.1	190.2	48.5	37.6
	最終	28.2	64.1	35.8	28.8
エネルギー保存	初期	2.8	11.6	8.6	8.9
	最終	3.2	7.8	6.0	6.7
計		90.3	273.7	98.9	82.0
比		1.00	3.03	1.10	0.91

それぞれ減少している。

- 6) トータルの計算時間で見ると、ILU(2,3)が最も速く、続いてTF、ILU(1,2)となる。しかしこれらの差は10%程度と小さい。

5. むすび

本稿第2章では、TF法とILU法とが同じ「手順」で導出できることを示した。さらに、TF法とILU法との相違点はそれらの前処理行列構造にあること(即ちTF法の三重対角行列とILU法の三角行列)、またいずれの方法も前処理行列の非零要素のうち原係数行列の非零要素に対応する部分はそれと等しいという性質を持つことを示した。

第3章では、前処理行列の非零要素のうち原係数行列の零要素に対応する部分、即ち誤差、が方程式の異方性や移流性に対してどう変化するかをTF法・ILU法について比較し、その結果両手法の誤差は異方性・移流性の対して同じような変化をし、異方性または移流性が強い程、誤差が小さくなることを示した。

第4章では、2次元デバイスシミュレータにTF/ILUBCG去・TF/ILUCGS法を適用し、スーパーコンピュータSX-2による計算速度の比較を行った。その結果、使用した2例題・4種類・計8個の方程式求解のいずれにおいても、TF前処理を用いたCGS法が速かった。また、Gustafsson補正は効果がなかった。一方fill-inを考慮したILU前処理は反復数を大幅に減らす効果があった。その結果、ILUCGS(2,3)が最も速く、続いてTFCGS、ILUCGS(1,2)の順となった。しかしそれらは小差であった。

TF法とILU法の並列性の違いは3次元の問題においてより顕著である。今後3次元のデバイス・シミュレーションの実用化に伴って、TF型前処理法の重要性が増すと考えられる。

最後に、デバイス・シミュレーションの例題を提供下さった当社マイクロエレクトロニクス研究所の福岡氏に感謝致します。

文 献

- 1) 土肥 俊, 原田紀夫: 三項対角行列分離による前処理共役勾配法, 情処32回大会予稿集, 5E-5(1986.3).
- 2) S.Doi and N.Harada: A Preconditioning Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems Suitable for Supercomputers, Proc. of the Int. Conf.

- on Supercomputing, Vol.2, pp.503-509(1987.5).
- 3) 野寺 隆:大型疎行列に対するPCG法, Proc. of the Seminar on Math. Sci., No.7, 慶応大(1983).
 - 4) 村田健郎:前処理付き共役勾配法・共役残差法, 情報処理, Vol.27, No.5, pp.498-507(1986).
 - 5) R.S.Varga:Matrix iterative Analysis, Prentice-Hall(1962).
 - 6) R.Fletcher:Conjugate Gradient Methods for Indefinite Systems, Proc.of the Dundee Biannual Conf.on Num.Anal., Supringer, pp.73-89(1975).
 - 7) 後 保範:ベクトル計算機向きICCG法, 京都大学数理解析研究所講究録, No.514, pp.110-134(1984).
 - 8) I.Gustafsson:A Class of First Order Factorization methods, BIT, No.18, pp.142-156(1978).
 - 9) C.den Heijer:Iterative Methods for Nonsymmetric Linear Systems, Proc. of the Int.Conf. on Simulation of Semiconductor Devices and Processes, Swansea, pp.287-285(1984).
 - 10) M.Fukuma and R.H.Uebbing:Two-Dimensional MOS-FET Simulation with Energy Transport Phenomena, Proc. of the IEEE Int. Electron Devices Meeting, IEDM 84, pp.621-624(1984.12).

付 録

<方程式>

ポアソンの式:

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \phi) = q(n-p+N_A-N_D), \quad (1)$$

$$\text{電子電流連続式: } \nabla \cdot (nv) = 0, \quad (2)$$

運動量保存式:

$$v = (\tau_p/m)\{qE - (2/3)\nabla w - (2w/3n)\nabla n\}, \quad (3)$$

エネルギー保存式:

$$(5/3)v \cdot \nabla w = qE \cdot v - (w-w_0)/\tau_w, \quad (4)$$

ϕ : ポテンシャル, n : 電子濃度, p : 正孔濃度,

N_A, N_D : アクセプター, ドナー濃度,

v : 電子平均速度, E : 電界, m : 有効質量,

w : 平均エネルギー, w_0 : エネルギーの平衡値,

τ_p, τ_w : 運動量, エネルギーの緩和時間.

<解析条件>

nMOS, $V_D = V_G = 2V$, $L_{eff} = 0.25 \mu m$,

$T_{ox} = 100 \text{ \AA}$, $x_i = 0.1 \mu m$.

<離散化条件>

- Decouple法を使用.

(式(1),(2),(3),(4)を独立に解く.)

- 拡散項に中心差分を, 移流項に風上差分を使用.

- 直交不等間隔メッシュを使用.

- メッシュ間隔の最大/最小比は縦横ともに20程度.

- メッシュサイズは 50×50 .