数 値 解 析 27 − 5
(1988. 12. 2)

D-K法に対する半局所収束定理

山本 哲朗　　陳 小君
愛媛大学理学部

代数方程式のすべての根を同時に求めるDurand−Kerner法に対する半局所収束定理と誤差評価を与える郑士明(Zheng Siming)の2論文
1. 关于同时求解多项式所有根的Durand−Kerner方法的收敛性，科学通报27(1982)，515−517
2. 关于多项式求根的一个并行算法的收敛性，数学研究与评論7(1987)，657−660
を紹介する。

A Semi-local Convergence Theorem for the D-K Method for Solving Polynomial Equations

Yamamoto Tetsuro and Chen Xiaojun
Department of Mathematics, Faculty of Science, Ehime University
Matsuyama 790, Japan

The purpose of this paper is to introduce two papers written by Zheng Siming:
1. On convergence of Durand-Kerner's method for finding the roots of a polynomial simultaneously (Chinese), Kexue Tongbao 27(1982), 515−517
2. On convergence of a parallel algorithm for finding the roots of a polynomial (Chinese), J. Math. Research and Exposition 7(1987), 657−660,
which give a semi-local convergence theorem as well as error estimates for the Durand−Kerner method for finding all the roots of a polynomial simultaneously.

1. はじめに

よく知られているように，n次代数方程式

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} \quad (a_0=1,\ a_n\neq 0)$$

の根 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ を同時に求めるDurand－Kerner法（以下D-K法）は

$$x_i^{(m+1)}=x_i^{(m)}-P(x_i^{(m)})\Big/\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i^{(m)}-x_j^{(m)}),\ 1\leq i\leq n,\ m\geq 0 \qquad (1.1)$$

により定義される。　この反復は $x_1,\cdots,x_n$ に関するk次基本対称式を φ_k とするとき，n元連立非線形方程式

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\varphi_k(x_1,\cdots,x_n)-(-1)^k a_k=0,\ k=1,2,\cdots,n$$

を解くNewton法に等しい（Kerner 1966）．　したがって，反復（1.1）に対するKantorovich型収束定理を導くことができる筈であるが，このことに対する郑士明（Zheng Siming）の結果を紹介する。　以下に述べる結果は次の２論文を要約したものである。

1．郑士明：关于同时求解多项式所有根的Durand－Kerner方法的收敛性，科学通报 27（1982），515－517.
2．郑士明：关于多项式求根的一个并行算法的收敛性，数学研究与评论，7（1987），657－660.

尚，オ１論文は昨年哈爾濱工学院潘壮元氏より山本に送られてきたものであり，オ２論文は陳がMathematical ReviewのRieviewerとして入手したものである。

2. Kantorovich型収束定理

以下，$(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$ を根 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ に対する初期値とし，

$$\eta_i^{(m)}=|x_i^{(m+1)}-x_i^{(m)}|,\quad \eta_m=\max_i \eta_i^{(m)},$$

$$B_{ij}^{(m)}=1/|x_i^{(m)}-x_j^{(m)}|\ (i\neq j),\quad B_m=\max_{\substack{i,j\\ i\neq j}} B_{ij}^{(m)}$$

とおく。

定理１（郑士明 1982）　$B_0\eta_0<1/2$ および

$$(n-1)B_0\eta_0(1-B_0\eta_0)^{n-2}/(1-2B_0\eta_0)^n\leq 1$$

ならば，$(x_1^{(m)},\cdots,x_n^{(m)})\to(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\ (m\to\infty)$.

定理２（郑士明 1982）　すべての $j\neq i$ につき $B_{ij}^{(0)}(\eta_i^{(0)}+\eta_j^{(0)})<1$ かつ

$$\frac{1}{1-B_{ij}^{(0)}(\eta_i^{(0)}+\eta_j^{(0)})}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n}\frac{B_{ik}^{(0)}\eta_k^{(0)}}{1-B_{ik}^{(0)}\eta_i^{(0)}}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{n}\frac{1-B_{il}^{(0)}\eta_i^{(0)}}{1-B_{il}^{(0)}(\eta_i^{(0)}+\eta_l^{(0)})}\leq 1 \qquad (2.1)$$

ならば，$(x_1^{(m)},\cdots,x_n^{(m)})\to(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\ (m\to\infty)$.

定理1は定理2の系であるから，定理2を証明すればよい。

補題1. 定理2の仮定の下で，$j \neq i$, $m=0,1,2,\cdots$ に対して

$$B_{ij}^{(m)}\eta_i^{(m)} \leqq B_{ij}^{(m-1)}\eta_i^{(m-1)} \leqq \cdots \leqq B_{ij}^{(0)}\eta_i^{(0)}$$

かつ

$$\eta_i^{(m)} \leqq \left[1 - B_{ij}^{(0)}(\eta_i^{(0)} + \eta_j^{(0)})\right]^m \eta_i^{(0)}$$

（証明）$m=0$ ならば明らか。m のとき成り立つと仮定する。$k \neq i$, $j \neq i$ に対し

$$B_{ij}^{(m+1)} = \frac{1}{\left|(x_i^{(m+1)} - x_i^{(m)}) - (x_j^{(m+1)} - x_j^{(m)}) + (x_i^{(m)} - x_j^{(m)})\right|}$$

$$\leqq \frac{B_{ij}^{(m)}}{1 - B_{ij}^{(m)}(\eta_i^{(m)} + \eta_j^{(m)})}$$

$$\frac{1}{|x_i^{(m+1)} - x_k^{(m)}|} = \frac{1}{\left|(x_i^{(m+1)} - x_i^{(m)}) + (x_i^{(m)} - x_k^{(m)})\right|} \leqq \frac{B_{ik}^{(m)}}{1 - B_{ik}^{(m)}\eta_i^{(m)}}$$

$$\left|\frac{x_i^{(m+1)} - x_k^{(m)}}{x_i^{(m+1)} - x_k^{(m+1)}}\right| = \left|1 + \frac{x_k^{(m+1)} - x_k^{(m)}}{x_i^{(m+1)} - x_k^{(m+1)}}\right| \leqq 1 + \frac{B_{ik}^{(m)}\eta_k^{(m)}}{1 - B_{ik}^{(m)}(\eta_i^{(m)} + \eta_k^{(m)})}$$

また Lagrange の補間公式により

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} P(x_k^{(m)}) \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j^{(m)}}{x_k^{(m)} - x_j^{(m)}} + \prod_{j=1}^{n}(x - x_j^{(m)})$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(x_k^{(m)} - x_k^{(m+1)}) \prod_{j \neq k}(x - x_j^{(m)}) + \prod_{j=1}^{n}(x - x_j^{(m)}) \tag{2.2}$$

$$\therefore P(x_i^{(m+1)}) = \sum_{k=1}^{n}(x_k^{(m)} - x_k^{(m+1)}) \prod_{j \neq k}(x_i^{(m+1)} - x_j^{(m)}) + \prod_{j=1}^{n}(x_i^{(m+1)} - x_j^{(m)})$$

$$= \sum_{k \neq i}(x_k^{(m)} - x_k^{(m+1)}) \prod_{j \neq k}(x_i^{(m+1)} - x_j^{(m)})$$

$$= (x_i^{(m+1)} - x_i^{(m)}) \sum_{k \neq i} \frac{x_k^{(m)} - x_k^{(m+1)}}{x_i^{(m+1)} - x_k^{(m)}} \underbrace{\prod_{j \neq i}(x_i^{(m+1)} - x_j^{(m)})}_{k\text{に無関係}}$$

したがって

$$x_i^{(m+2)} = x_i^{(m+1)} - (x_i^{(m+1)} - x_i^{(m)}) \left(\sum_{k \neq i} \frac{x_k^{(m)} - x_k^{(m+1)}}{x_i^{(m+1)} - x_k^{(m)}}\right) \prod_{j \neq i} \frac{x_i^{(m+1)} - x_j^{(m)}}{x_i^{(m+1)} - x_j^{(m+1)}} \tag{2.3}$$

$$\eta_i^{(m+1)} = |x_i^{(m+2)} - x_i^{(m+1)}|$$

$$\leqq \eta_i^{(m)} \left(\sum_{k \neq i} \frac{B_{ik}^{(m)}\eta_k^{(m)}}{1 - B_{ik}^{(m)}\eta_i^{(m)}}\right) \prod_{j \neq i}\left(1 + \frac{B_{ij}^{(m)}\eta_j^{(m)}}{1 - B_{ij}^{(m)}(\eta_i^{(m)} + \eta_j^{(m)})}\right) \tag{2.4}$$

$$\leqq \eta_i^{(m)} \sum_{k\neq i} \frac{B_{ik}^{(0)}\eta_k^{(0)}}{1-B_{ik}^{(0)}\eta_i^{(0)}} \prod_{j\neq i} \left(1+\frac{B_{ij}^{(0)}\eta_j^{(0)}}{1-B_{ij}^{(0)}(\eta_i^{(0)}+\eta_j^{(0)})}\right)$$

$$= \eta_i^{(m)} \sum_{k\neq i} \frac{B_{ik}^{(0)}\eta_k^{(0)}}{1-B_{ik}^{(0)}\eta_i^{(0)}} \prod_{j\neq i} \frac{1-B_{ij}^{(0)}\eta_i^{(0)}}{1-B_{ij}^{(0)}(\eta_i^{(0)}+\eta_j^{(0)})}$$

$$\leqq \eta_i^{(m)}\left[1-B_{ij}^{(0)}(\eta_i^{(0)}+\eta_j^{(0)})\right] \qquad (\,(2.1)\text{による})$$

$$\leqq \cdots \leqq \eta_i^{(0)}\left[1-B_{ij}^{(0)}(\eta_i^{(0)}+\eta_j^{(0)})\right]^{m+1} \tag{2.5}$$

$$\therefore\ B_{ij}^{(m+1)}\eta_i^{(m+1)} \leqq \frac{1-B_{ij}^{(0)}(\eta_i^{(0)}+\eta_j^{(0)})}{1-B_{ij}^{(m)}(\eta_i^{(m)}+\eta_j^{(m)})} B_{ij}^{(m)}\eta_i^{(m)} \leqq B_{ij}^{(m)}\eta_i^{(m)}$$

故に帰納法により補題が成り立つ。

（定理2の証明）すべての $i\neq j$ につき $\eta_i^{(0)}=\eta_j^{(0)}=0$ ならば $x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}$ は $P(x)=0$ の根であるから，

$$h_i = \max_{j\neq i} B_{ij}^{(0)}(\eta_i^{(0)}+\eta_j^{(0)}) > 0$$

としてよい。したがって $0<1-h_i<1$ である。 (2.1) と (2.5) によって

$$|x_i^{(m+p)}-x_i^{(m)}| \leqq \sum_{k=0}^{p-1}\eta_i^{(m+k)} \leqq \sum_{k=0}^{p-1}\eta_i^{(0)}(1-h_i)^{m+k}$$

$$\leqq (1-h_i)^m \eta_i^{(0)} \frac{1}{h_i} \to 0 \quad (m\to\infty).$$

故に各 i につき $\{x_i^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ は Cauchy 列で，ある値 x_i^* に収束する。 (2.2)で $m\to\infty$ として

$$P(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i^*), \quad \text{i.e.,}\quad x_i^*=\alpha_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

3. 収束条件の最良（best possible）性

前節の記号に加えて

$$g(t)=g(n,t)=(n-1)\frac{t}{1-t}\left(1+\frac{t}{1-2t}\right)^{n-1}\frac{1}{1-2t}$$

$$h(t)=h(n,t)=(n-1)\frac{t}{1-t}\left(1+\frac{t}{1-2t}\right)^{n-1}=(1-2t)g(t), \quad 0\leqq t<\frac{1}{2},$$

$$s_m=B_m\eta_m,\quad g_m=g(s_m),\quad h_m=h(s_m)$$

とおく。このとき，定理1によって，D-K法 (1.1) が収束するための十分条件は

$$s_0=B_0\eta_0\in[0,\tfrac{1}{2}),\quad g_0=g(n,s_0)\leqq 1. \tag{3.1}$$

定理3（郑士明/1987）　$n\geq 2$ かつ ある正定数 B, η に対して $g(2, B\eta)>1$ ならば

$$B_0=B,\quad \eta_0=\eta \qquad (x_1^{(m)},\cdots,x_n^{(m)}) \not\to (\alpha_1,\cdots,\alpha_n) \ (m\to\infty)$$

となるような n 次多項式と初期値 $(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$ が存在する。

（証明.）　$x_i^{(0)}=(2i-3)/(2B)$，$i=1,2,\cdots,n$，かつ

$$P(x)=\begin{cases} x^2+(B\eta-\frac{1}{4})/B^2 & (n=2) \\ [x^2+(B\eta-\frac{1}{4})/B^2]\prod_{j=3}^{n}(x-x_j^{(0)}) & (n\geq 3) \end{cases}$$

とおけば

$$\frac{1}{|x_i^{(0)}-x_j^{(0)}|}=\frac{B}{|i-j|},\quad i,j=1,2,\cdots,n,\ j\neq i$$

$$|x_1^{(1)}-x_1^{(0)}|=|x_2^{(1)}-x_2^{(0)}|=\eta,\quad |x_i^{(1)}-x_i^{(0)}|=0\ (i=3,\cdots,n)$$

故に　$B_0=B$，$\eta_0=\eta$．　また　$t\in[0,\frac{1}{2})$ のとき $g(n,t)$ は狭義単調増加で

$$g(n,0)=0,\quad \lim_{t\to 1/2} g(n,t)=+\infty\ (n\geq 2),\quad g(2,\tfrac{1}{4})=1 \qquad (3.2)$$

仮定によって $g(2,B\eta)>1$ であるから $B\eta>\frac{1}{4}$．　したがって多項式 $P(x)$ は複素数 $\alpha_1,\alpha_2=\pm i\sqrt{B\eta-1/4}/B$ を零点にもつ。　一方，(1.1) によって，$(x_1^{(m)},\cdots,x_n^{(m)})$ は実数値であるから $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ に収束することはない。

（注意）この定理から，$n=2$ の場合，条件 (3.1) を弱めることはできないことがわかる。

4．誤差評価

定理4（郑士明/1987）．$n\geq 2$ かつ $(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$ は条件 (3.1) をみたすと仮定する。

(i)
$$\max_i|x_i^{(m)}-\alpha_i|\leq\frac{\eta_m}{1-h_m}\leq\frac{(1-2s_0)^m g_0^{2^m-1}}{1-(1-2s_0)g_0^{2^m}}\eta_0,\quad m\geq 0 \qquad (4.1)$$

(ii) $g_0=1$ ならば 上の不等式で等号が成り立つような多項式 $P(x)$ と初期値 $(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$ がある。

(iii) $g_0<1$ ならば $P(x)=0$ は重根をもたない。

（証明）(i) $\eta_0=0$ ならば $x_i^{(0)}$ $(1\leq i\leq n)$ は $P(x)=0$ の根であるから，$s_0=B_0\eta_0>0$ としてよい。　このとき $g_0>0$（∵ $g(n,t)$ と $h(n,t)$ は $t\in[0,1/2)$ につき狭義単調増加で $g(n,0)=0$）　また $n_1\leq n_2$ ならば $t\in[0,1/2)$ のとき

$$g(n_1,t)\leq g(n_2,t),\quad h(n_1,t)\leq h(n_2,t)$$

故に $s_0 > 1/4$ ならば $g_0 = g(n, s_0) \geqq g(2, s_0) > g(2, 1/4) = 1$ となるから，$g_0 \leqq 1$ のときは $0 < s_0 \leqq 1/4$ でなければならない。 したがって

$$0 < 1 - 2s_0 < 1 \ , \quad 0 < h_0 = h(s_0) = (1 - 2s_0) g_0 < 1$$

ここで 不等式

$$|x_i^{(m+1)} - x_j^{(m)}| \geqq |x_i^{(m)} - x_j^{(m)}| - |x_i^{(m+1)} - x_i^{(m)}|$$

を使えば

$$|x_i^{(m+1)} - x_j^{(m+1)}| \geqq |x_i^{(m+1)} - x_j^{(m)}| - |x_j^{(m)} - x_j^{(m+1)}|$$

$$\geqq |x_i^{(m)} - x_j^{(m)}| - |x_i^{(m+1)} - x_i^{(m)}| - |x_j^{(m)} - x_j^{(m+1)}|$$

$$\therefore \ B_{m+1} = \max_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \left(1 / |x_i^{(m+1)} - x_j^{(m+1)}| \right) \leqq B_m / (1 - 2s_m)$$

また (2.3) or (2.4) より $\eta_{m+1} \leqq \eta_m h_m$

$$\therefore \ s_{m+1} = B_{m+1} \eta_{m+1} \leqq B_m \eta_m h_m / (1 - 2s_m) = s_m g_m$$

$0 \leqq c \leqq 1$，$0 < t < \frac{1}{2}$ ならば $g(ct) \leqq c g(t)$，$h(ct) \leqq c h(t)$ であるから

$$h_{m+1} = h(s_{m+1}) \leqq h(g_m s_m) \leqq g_m h(s_m) = g_m h_m$$

$$g_{m+1} = g(s_{m+1}) \leqq g(g_m s_m) \leqq g_m g(s_m) = g_m^2$$

以下 数学的帰納法によって，g_m，h_m，η_m，s_m は単調減少 かつ $m, l = 0, 1, 2, \cdots$ につき

$$g_{m+l} \leqq g_m^{2^l} \leqq 1 \ , \quad h_{m+l} \leqq h_m g_m^{2^l - 1} < 1 \ , \quad \eta_{m+l} \leqq \eta_m h_m^l g_m^{2^l - l - 1} \qquad (4.2)$$

を示すことができるから

$$|x_i^{(m+p+1)} - x_i^{(m)}| \leqq \sum_{l=0}^{p} \eta_{m+l} \leqq \eta_m \sum_{l=0}^{p} h_m^l \leqq \frac{\eta_m}{1 - h_m} \ , \quad 1 \leqq i \leqq n$$

上式で $p \to \infty$ とすれば

$$|\alpha_i - x_i^{(m)}| \leqq \frac{\eta_m}{1 - h_m} \qquad (4.3)$$

(4.2) において m と l を入れかえて $l = 0$ とすれば

$$h_m \leqq h_0 g_0^{2^m - 1} = (h_0 g_0)^{-1} g_0^{2^m}$$

$$\eta_m \leqq \eta_0 h_0^m g_0^{2^m - m - 1} = \eta_0 (h_0 g_0^{-1})^m g_0^{2^m - 1} = \eta_0 (1 - 2s_0)^m g_0^{2^m - 1}$$

故に (4.3) より (4.1) を得る.

(ii) $n = 2$，$P(x) = x^2$，$x_1^{(0)} > 0$，$x_2^{(0)} = -x_1^{(0)}$ とおけば

$$x_1^{(m)} = \frac{x_1^{(0)}}{2^m} \ , \quad x_2^{(0)} = -x_1^{(m)} \ , \quad \eta_m = \frac{x_1^{(0)}}{2^{m+1}} \ , \quad B_m = \frac{2^{m-1}}{x_1^{(0)}} \ ,$$

$$\therefore \ s_m = \frac{1}{4} \ , \quad h_m = \frac{1}{2} \ , \quad g_m = 1 \ , \qquad m \geqq 0$$

すなわち (4.1) で等号が成り立つ.

(iii) $g_0 = g(n, s_0) < 1$ ならば (3.1) と (3.2) および $g(n, t)$ の連続性・単調増加性によって $g(n, t^*) = 1$ となる $t^* \in (0, 1/2)$ が存在する。 このとき

$$s_0 = B_0 \eta_0 < t^*$$

であるから，$s_m \leqq s_{m-1}$ と併せて

$$h_m \leqq h_0 = h(n, s_0) < h(n, t^*) = (1-2t^*) g(n, t^*) = 1 - 2t^* \tag{4.4}$$

が成り立つ。さらに　$t^* - B_0\eta_0 > 0$　より　$t^* B_0^{-1} - \eta_0 > 0$　すなわち

$$t^* \min_{\substack{i,j \\ i \neq j}} |x_i^{(0)} - x_j^{(0)}| - \eta_0 > 0$$

$$\therefore \frac{B_{m+1}}{t^* - B_{m+1}\eta_{m+1}} \leqq \frac{\dfrac{B_m}{1-2s_m}}{t^* - \dfrac{B_m}{1-2s_m}\eta_m h_m} = \frac{B_m}{t^* - B_m \eta_m (2t^* + h_m)}$$

$$\leqq \frac{B_m}{t^* - B_m \eta_m} \quad (\because (4.4) \text{ より } 2t^* + h_m < 1)$$

$$\leqq \cdots \leqq \frac{B_0}{t^* - B_0 \eta_0}$$

$$\therefore \frac{1}{t^* \min\limits_{\substack{i,j \\ i \neq j}} |x_i^{(m)} - x_j^{(m)}| - \eta_m} \leqq \frac{1}{t^* \min\limits_{\substack{i,j \\ i \neq j}} |x_i^{(0)} - x_j^{(0)}| - \eta_0}$$

$m \to \infty$ として

$$t^* \min_{i \neq j} |\alpha_i - \alpha_j| \geqq t^* \min_{i \neq j} |x_i^{(0)} - x_j^{(0)}| - \eta_0 > 0.$$

故に　$P(x) = 0$　は重根をもたない。