

高次展開係数の組み込みによる  
準ミニマックス近似法

— 多項式近似の場合 —

井上 倫夫 小林 康浩 山田 秀二 大北 正昭

鳥取大学工学部

最近、マイクロプロセッサの発展にともなって用途に応じて任意の精度・処理速度で、関数計算を必要とすることが多くなった。適当な近似式を用意しておいて、予め計算機に組み込んでおくと便利なので、いろいろ工夫されている。本報告では、多項式の準ミニマックス近似法について述べる。実用上は、誤差のピークの変動が十分に小さければ、準ミニマックス近似と見なしてよく、ここでは、一様化最良近似式を精度よく求めるのではなく、準ミニマックス近似の定式化に重点を置いている。具体的には、チェビシェフ展開の高次項の係数値を $N+1$ 次を中心折り返し、低次項に加える。さらに、 $N-1$ 次の係数を $N+2$ 、 $N+1$ 次の係数値の比で修正する。これによって、絶対誤差がほぼ一様の近似式が得られる。また、近似誤差の最大値を精度よく見積ることが出来る。

NEAR MINIMAX APPROXIMATION BY CHEBYSHEV POLYNOMIALS  
FOLDING BACK THEIR HIGH ORDER TERMS

Michio INOUE, Yasuhiro KOBAYASHI, Shuji YAMADA\* and Masaaki OHKITA\*

Department of Information and Knowledge Engineering, Faculty of Engineering,  
Tottori University  
Minami 4-101, Koyama-cho, Tottori, 680, JAPAN

\*Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering

This paper provides a procedure to determine a  $N$ th degree-polynomial satisfying a near-minimax approximation to a given function by tuning up its Chebyshev expansion. The tuning-up process consists of two processes. The first is the folding the terms higher than the  $(N+1)$ th degree into the lower terms of the Chebyshev polynomial series. The second is the quadratic correction of the terms of the  $(N-1)$ th degree. On this way, the maximum error of this approximation can be precisely evaluated.

## 1 はじめに

マイクロプロセッサの処理能力が飛躍的に向上し、パーソナルコンピュータでも十分に数値計算が可能となり、諸分野における数値解析の重要性は増すばかりである。繰り返して来る関数の値を精度よく高速に得たいとき、その関数の適当な近似式を用意しておいて予め計算機に組み込んでおくと便利なので、いろいろ工夫されている[1]～[15]。

本報告では、多項式の準ミニマックス近似法について述べる。実用上は、誤差のピークの変動（誤差の偏差点の最大値と最小値との差）が十分に小さければ、準ミニマックス近似と見なしてよく、ここでは、むしろ一様最良近似式を精度よく求めるのではなく、準ミニマックス近似の定式化に重点を置いている。

具体的には、チェビシェフ展開の最初の $N+1$ 項をとって各項の係数を少し修正して絶対誤差を一様にするのであるが、この時、高次項の係数を $N+1$ 次を中心に折り返し、さらに $N-1$ 次の係数を少し修正するだけで絶対誤差がほぼ一様の近似式が得られることを示す。この時、誤差の最大値を精度よく見積ることができる。

同種の議論は、山内氏による“折りたたみ計算法”[8]～[12]（20年前）に述べられている。同氏は、近似区間を陽に表すために、一様化アルゴリズムをべき級数の上で論じている。

本報告で述べる準ミニマックス近似法は、十数年来、筆者らがマイクロプロセッサの組み込み関数用として利用してきた近似アルゴリズムであり[15]、既に山内氏によって発表された方法が広く利用されていると理解していた[14]。筆者らは、その特徴が顕著に表現されるチェビシェフ多項式を用い、非常にシンプルなアルゴリズムで表現している。また、さらにその発展として、離散フーリエ変換における選点直交関係より高次周波数成分が低次項に折り返るエイリアス現象を明らかにし、その積極的活用法を提案している[16]、[17]。

最近、マイクロプロセッサの発展によって任意の精度・処理速度・用途に応じて関数計算を必要とすることが多くなり、再度、近似アルゴリズムの検討を行った。その結果、有理式についても同様のアルゴリズムが可能であることが示された。そこで、諸兄のご意見を得るべく今回、本近似アルゴリズムを発表することとなった。

## 2 折り返し計算法（第一次近似）

一般に、チェビシェフ（Chebyshev）展開は収束がはやく、これを利用してチェビシェフ多項式からミニマックス近似に進むのが有望と思われる。

与えられた関数  $f(x)$  が  $[-1 \leq x \leq 1]$  の区間内で特異点がなく、おとなしい関数であれば、

$$x = \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

によって、チェビシェフ展開し、

$$f(\cos \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i \cos i\theta \quad (1)$$

で与えられる場合に、最初の $N+1$ 項をとって各項の係数を少し修正して、絶対誤差を一様にする場合について考える。すなわち、近似式を  $g_1(\cos \theta)$  として

$$g_1(\cos \theta) = \sum_{i=0}^N (C_i + a_i) \cos i\theta \quad (2)$$

とおくと、絶対誤差は、

$$E_1(\cos \theta) = -C_{N+1} \cos (N+1)\theta + \sum_{i=0}^N a_i \cos i\theta - \sum_{j=1}^{\infty} C_{N+1+j} \cos (N+1+j)\theta \quad (3)$$

で表される。一般にチェビシエフ展開の各係数は、

$$|C_{N+1}| > |C_{N+2}| > |C_{N+3}| > \dots \quad (4)$$

であるから、(3)式の主要項は、 $C_{N+1} \cos (N+1)\theta$  であり、絶対誤差のピークは、

$$x_p = \cos \theta_p \quad \theta_p = \frac{\pi}{N+1} p \quad p=0, 1, \dots, N+1 \quad (5)$$

の近傍にあると考えられる。ところで(3)式より

$$E_1(\cos \theta_p) = -\left( C_{N+1} + \sum_{r=1}^{\infty} C_{(2r+1)(N+1)} \right) \cos (N+1)\theta_p - \sum_{i=0}^N \left[ \sum_{r=1}^{\infty} C_{2r(N+1)+i} - a_i \right] \cos (N+1)\theta_p \cos (N-i)\theta_p \quad (6)$$

となる。

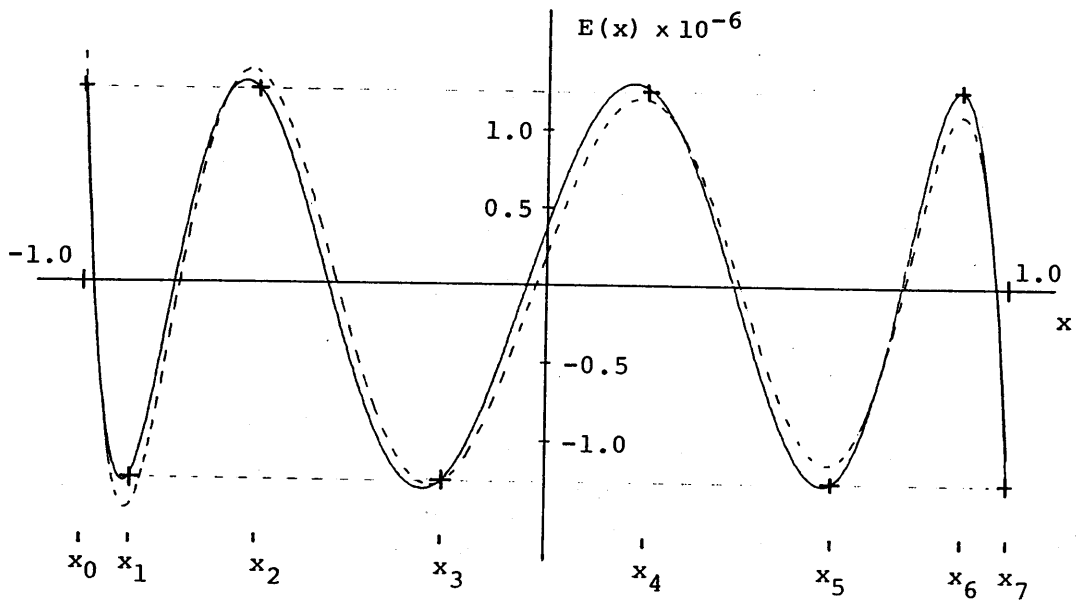


図1 誤差曲線

$$\log_e \left( 1 + \frac{1}{3} x \right) \quad N = 6$$

この時、

$$a_i = \sum_{r=1}^{\infty} C_{2r(N+1)+i} \quad i=0,1,\dots,N \quad (7)$$

とおけば

$$E_1(\cos \theta_p) = - \left( C_{N+1} + \sum_{r=1}^{\infty} C_{(2r+1)(N+1)} \right) (-1)^P \quad (8)$$

となり、 $\cos \theta_p$  で誤差の絶対値が一定値となる。ところで、絶対誤差のピークは、 $\cos \theta_p$  の近傍にあるので、これによって誤差のピーク値をほぼ一樣にすることができる。実用上は、(4)式より、最初の数項のみ考慮すればよく、第1次近似式として、

$$g_1(\cos \theta) = \sum_{i=0}^N (C_i + C_{2(N+1)-i}) \cos i\theta \quad (9)$$

が与えられる。ここで、 $\log(1+x/3)$  [ $-1 \leq x \leq 1$ ,  $N=6$ ] について結果を図1に示す。図中で実線が第1近似による絶対誤差を表している。破線は、(2)式で  $a_i = 0$  としたN次打ち切りの時の誤差である。ここで、+印は、 $\cos \theta_p$  での絶対誤差を示す。(9)式は、チェビシェフ展開のN+1次以上の高次の係数が規則的に折り返されていることから、折り返し計算法と名づけた。ところで、 $|\cos(N+1)\theta_p| = 1$  でのチェビシェフ補間によって、(9)式と同一の結果を得ることができる[4]。また(9)式と同種の議論が離散フーリエ変換に見られる[16],[17]。そこでは、この高次項の周波数成分をエイリアス誤差として除去すべく努力が払われる。

### 3 準ミニマックス近似法

折り返し計算法で与えられた(9)式の各項の係数をもう少し修正して絶対誤差をほぼ一樣にする。すなわち、近似式を  $g_2(\cos \theta)$  とし、

$$g_2(\cos \theta) = \sum_{i=0}^N [C_i + C_{2(N+1)-i} + b_i] \cos i\theta \quad (10)$$

とすると、絶対誤差は、

$$\begin{aligned} E_2(\cos \theta) = & - C_{N+1} \cos(N+1)\theta \\ & - C_{N+2} [\cos(N+2)\theta - \cos N\theta] + b_N \cos N\theta \\ & - C_{N+3} [\cos(N+3)\theta - \cos(N-1)\theta] + b_{N-1} \cos(N-1)\theta \\ & - \dots \end{aligned} \quad (11)$$

となる。この時、前節より絶対誤差のピーク(偏差点)は、 $\cos \theta_p$  の近傍であると考えられる。そこで、この誤差のピーク点を  $\cos \theta_p + s$  とすれば、誤差のピーク値は  $E_2(\cos \theta_p + s)$  で与えられ

$$E_2(\cos \theta_p + s) = E_2(\cos \theta_p) + s E_2'(\cos \theta_p) + \frac{1}{2} s^2 E_2''(\cos \theta_p) + \dots \quad (12)$$

と表せる。

ここで、 $s$  は十分に小さいので  $s^2$  までで打ち切って考える。また、誤差のピーク点では、

$$\frac{d E_2(\cos \theta_p + s)}{d s} = 0 \quad (13)$$

であるから、これより (12) 式は、

$$E_2(\cos \theta_p + s) \approx E_2(\cos \theta_p) - \frac{1}{2} \frac{[E_2'(\cos \theta_p)]^2}{E_2''(\cos \theta_p)} \quad (14)$$

と表される。従って、絶対誤差のピーク値を  $\cos \theta_p$  で表すことができる。ここで、(4) 式より係数のオーダーを考慮すれば、

$$E_2(\cos \theta_p) \approx -(-1)^P C_{N+1} \left[ 1 - \frac{b_N}{C_{N+1}} \cos \theta_p - \frac{b_{N-1}}{C_{N+1}} \cos 2\theta_p - \dots \right] \quad (15)$$

$$E_2'(\cos \theta_p) \approx (-1)^P 2(N+1)C_{N+2} \left[ 1 + \frac{b_N}{C_{N+2}} \frac{N}{2(N+1)} + \dots \right. \\ \left. + \left( 2\frac{C_{N+3}}{C_{N+2}} + \frac{b_{N-1}}{C_{N+2}} \frac{N-1}{N+1} \right) \cos \theta_p + \dots \right. \\ \left. + \dots \right] \quad (16)$$

$$E_2''(\cos \theta_p) \approx (-1)^P \frac{(N+1)^2}{\sin^2 \theta_p} C_{N+1} \left[ 1 + \dots \right. \\ \left. + \left( \frac{C_{N+2}}{C_{N+1}} \frac{2}{N+1} - \frac{b_N}{C_{N+1}} \frac{N}{N+1} \right) \cos \theta_p \right. \\ \left. + \dots \right] \quad (17)$$

となる。従って、絶対誤差は、(15) ~ (17) 式を (14) 式に代入すれば、

$$E_2(\cos \theta_p + s) \approx -(-1)^P C_{N+1} \left\{ 1 + \left( \frac{C_{N+2}}{C_{N+1}} \right)^2 + \dots \right. \\ \left. + \left[ -\frac{b_N}{C_{N+1}} + 2\frac{C_{N+2} C_{N+3}}{C_{N+1}^2} - \left( \frac{C_{N+2}}{C_{N+1}} \right)^3 \frac{1}{N+1} + \dots \right] \cos \theta_p \right. \\ \left. + \left[ -\frac{b_{N-1}}{C_{N+1}} - \left( \frac{C_{N+2}}{C_{N+1}} \right)^2 + \dots \right] \cos 2\theta_p \right. \\ \left. + \left[ -\frac{b_{N-2}}{C_{N+1}} - 2\frac{C_{N+2} C_{N+3}}{C_{N+1}^2} + \left( \frac{C_{N+2}}{C_{N+1}} \right)^3 \frac{1}{N+1} + \dots \right] \cos 3\theta_p \right. \\ \left. + \dots \right\} \quad (18)$$

となる。

チェビシェフ展開の係数は次数が高くなるに従って、比較的是やく減少するので、誤差の主要項が  $C_{N+1}$  であることを考慮して (18) 式の誤差ピークの変動をできるだけ小さく抑えるために、修正量  $b_i$  を

$$\begin{aligned} b_N &= 0 \\ b_{N-1} &= -\frac{(C_{N+2})^2}{C_{N+1}} \\ b_i &= 0, \quad i = 0, 1, \dots, N-2 \end{aligned} \quad (19)$$

とする。

以上の結果、準ミニマックス近似として

$$\begin{aligned} g_2(\cos \theta) &= [C_N + C_{N+2}] \cos N\theta \\ &+ [C_{N-1} + C_{N+3} - \frac{(C_{N+2})^2}{C_{N+1}}] \cos(N-1)\theta \\ &+ [C_{N-2} + C_{N+4}] \cos(N-2)\theta \\ &+ C_{N-3} \cos(N-3)\theta \\ &+ \dots + C_1 \cos \theta + \frac{1}{2} C_0 \end{aligned} \quad (20)$$

が与えられる。この時、絶対誤差の最大値は

$$E_{2 \max} \approx |C_{N+1}| [1 + \frac{(C_{N+2})^2}{C_{N+1}}] \quad (21)$$

である。結果を図2に示す。破線は、前節の折り返し計算法の誤差である。

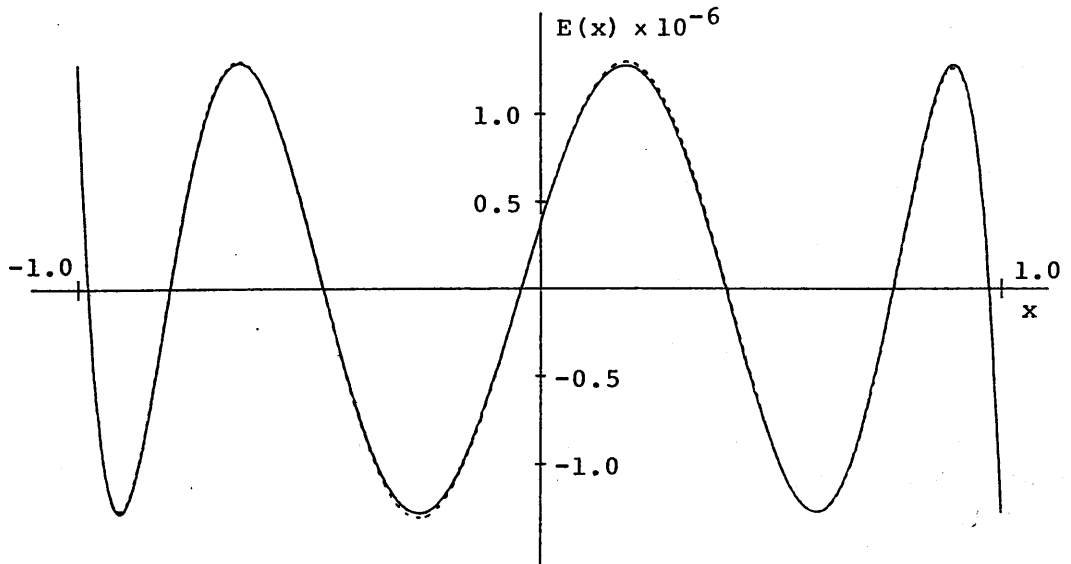


図2 誤差曲線

$$\log_e(1 + \frac{1}{3}x) \quad N = 6$$

## 4 検討

### 4-1 準ミニマックス近似アルゴリズム

与えられた関数のチェビシェフ展開の係数が既知であれば、

$$\begin{aligned}
 g(x) = & [ C_N + C_{N+2} ] T_N(x) \\
 & + [ C_{N-1} + C_{N+3} - \frac{C_{N+2}^2}{C_{N+1}} ] T_{N-1}(x) \\
 & + [ C_{N-2} + C_{N+4} ] T_{N-2}(x) \\
 & + C_{N-3} T_{N-3}(x) + \dots + C_1 T_1(x) + \frac{1}{2} C_0
 \end{aligned} \tag{22}$$

よって、任意の次数の準ミニマックス近似式を容易に求めることができる。また、その時の最大誤差を(21)式によって、見積ることができる。実際の使用にあたっては(22)式のチェビシェフ多項式をべき級数に変換して利用する。

具体例として、図3に  $\exp(x/2)$ 、図4に  $\sin(\pi x/4)$ 、図5に  $\cos(\pi x/4)$  を示す。

### 4-2 誤差の一様化について

さらに誤差の一様化を望む場合、(12)式で、 $s^3$  で打ち切って考えると、(14)式は、

$$E_3(\cos \theta_p + s) = E_2(\cos \theta_p) - \frac{1}{2} \frac{E_2'(\cos \theta_p)^2}{E_2''(\cos \theta_p)} + \frac{E_2'(\cos \theta_p)^3 E_2'''(\cos \theta_p)}{E_2''(\cos \theta_p)^2} \tag{23}$$

となる。従って、(23)式の誤差ピークの変動をできるだけ小さく抑えるためには、各係数の修正量は、与えられた誤差項の高次のオーダーを加味すれば、準ミニマックス近似式として

$$\begin{aligned}
 g^*(x) = & [ C_N + C_{N+2} + 2 \frac{C_{N+2} C_{N+3}}{C_{N+1}} - \frac{C_{N+2}^3}{C_{N+1}^2} ] T_N(x) \\
 & + [ C_{N-1} + C_{N+3} - \frac{C_{N+2}^2}{C_{N+1}} ] T_{N-1}(x) \\
 & + [ C_{N-2} + C_{N+4} - 2 \frac{C_{N+2} C_{N+3}}{C_{N+1}} + \frac{C_{N+2}^3}{C_{N+1}^2} ] T_{N-2}(x) \\
 & + [ C_{N-3} + C_{N+5} ] T_{N-3}(x) \\
 & + C_{N-4} T_{N-4}(x) + \dots + C_1 T_1(x) + \frac{1}{2} C_0
 \end{aligned} \tag{24}$$

が与えられる。チェビシェフの係数で収束の悪い関数、たとえば、 $\log(1+x/3) [-1 \leq x \leq 1]$  などは、良い結果が得られる。表1は、同関数 ( $N=6$ ) の絶対誤差の各ピーク点の値を示す。(24)式によって、さらに一様化されている。

表1 誤差のピーク点

$E(x_i) \times 10^{-5}$

	チェビシェフ展開 N次打ち切り	折り返し計算法	本アルゴリズム (1項修正)	本アルゴリズム (3項修正)
$x_0$	-1.0000	-1.00000	-1.000000	-1.0000000
$E(x_0)$	0.1472	0.12505	0.127865	0.1278651
$x_1$	-0.9062	-0.91051	-0.909789	-0.9097640
$E(x_1)$	-0.1444	-0.12677	-0.128277	-0.1279714
$x_2$	-0.6398	-0.65248	-0.651006	-0.6512145
$E(x_2)$	0.1372	0.12972	0.128605	0.1279953
$x_3$	-0.2464	-0.26388	-0.263372	-0.2639989
$E(x_3)$	-0.1283	-0.13081	-0.128071	-0.1278736
$x_4$	0.2000	0.18455	0.183186	0.1826201
$E(x_4)$	0.1201	0.12963	0.127381	0.1279015
$x_5$	0.6097	0.60071	0.598800	0.5987014
$E(x_5)$	-0.1139	-0.12750	-0.127288	-0.1279853
$x_6$	0.8969	0.89426	0.893456	0.8935174
$E(x_6)$	0.1100	0.12572	0.127646	0.1279308
$x_7$	1.0000	1.00000	1.000000	1.0000000
$E(x_7)$	-0.1088	-0.12505	-0.127865	-0.1278651

$$f(x) = \log_e \left( 1 + \frac{1}{3} x \right) \quad g(x) = \sum_{i=0}^6 A_i x^i$$

1°  $f(x) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \quad -1 \leq x \leq 1$

$$g(x) = \sum_{i=0}^{13} A_i x^i$$

最大絶対誤差 =  $0.8584 \times 10^{-19}$

$A_0 = 1.00000$	$00000$	$00000$	$00008$	$580$	$A_7 = 0.00000$	$15500$	$99206$	$29377$	$091$
$A_1 = 0.50000$	$00000$	$00000$	$00004$	$003$	$A_8 = 0.00000$	$00968$	$81202$	$70178$	$432$
$A_2 = 0.12499$	$99999$	$99999$	$99159$	$256$	$A_9 = 0.00000$	$00053$	$82289$	$03531$	$979$
$A_3 = 0.02083$	$33333$	$33333$	$33201$	$238$	$A_{10} = 0.00000$	$00002$	$69111$	$06619$	$097$
$A_4 = 0.00260$	$41666$	$66666$	$80117$	$195$	$A_{11} = 0.00000$	$00000$	$12232$	$32412$	$472$
$A_5 = 0.00026$	$04166$	$66666$	$67947$	$504$	$A_{12} = 0.00000$	$00000$	$00512$	$14233$	$976$
$A_6 = 0.00002$	$17013$	$88888$	$08197$	$503$	$A_{13} = 0.00000$	$00000$	$00019$	$69687$	$956$

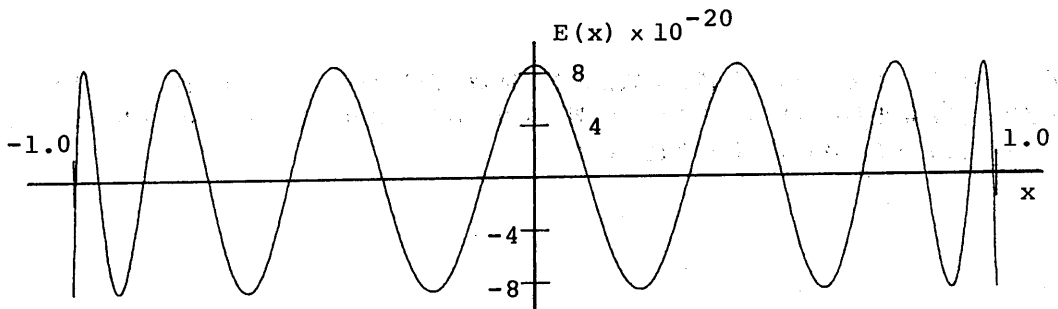


図3 誤差曲線



2°  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \quad -1 \leq x \leq 1$

$g(x) = \sum_{i=0}^7 A_{2i+1} x^{2i+1}$       最大絶対誤差 =  $0.7003 \times 10^{-21}$

$A_1 =$	0.78539	81633	97448	30960	37552
$A_3 =$	-0.08074	55121	88280	78113	53757
$A_5 =$	0.00249	03945	70192	71215	58376
$A_7 =$	-0.00003	65762	04182	12692	50133
$A_9 =$	0.00000	03133	61688	87000	06777
$A_{11} =$	-0.00000	00017	57247	35597	00488
$A_{13} =$	0.00000	00000	06948	11110	86517
$A_{15} =$	-0.00000	00000	00020	21443	83403

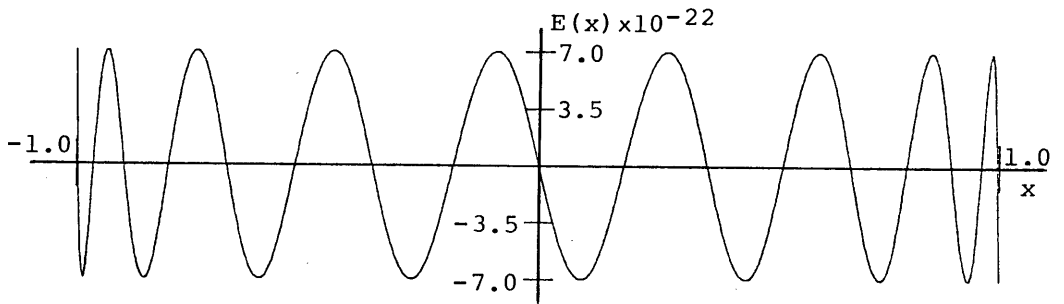


図4 誤差曲線

3°  $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) \quad -1 \leq x \leq 1$

$g(x) = \sum_{i=0}^7 A_{2i} x^{2i}$       最大絶対誤差 =  $0.3030 \times 10^{-19}$

$A_0 =$	0.99999	99999	99999	99996	970
$A_2 =$	-0.30842	51375	34042	45295	933
$A_4 =$	0.01585	43442	43815	41936	653
$A_6 =$	-0.00032	59918	86926	73792	984
$A_8 =$	0.00000	35908	60446	02877	374
$A_{10} =$	-0.00000	00246	11364	03485	775
$A_{12} =$	0.00000	00001	15005	12115	864
$A_{14} =$	-0.00000	00000	00385	81915	115

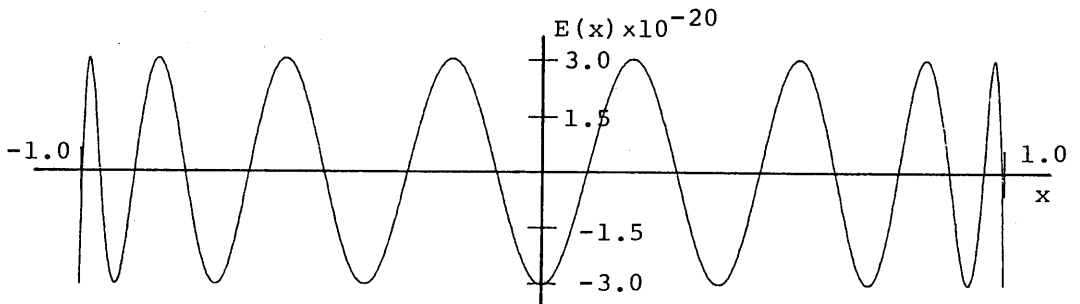


図5 誤差曲線

## 5 おわりに

以上、多項式による準ミニマックス近似法の定式化について述べた。本方法は、近似誤差を精度よく見積ることができると同時に、任意の次数のミニマックス近似式を非常に簡単な操作で得ることが出来る。関数  $\log_e(1+x/3)$  については、多項式近似で十分な近似精度を得るには、高い次数を必要とするので有理式近似の方が有望と思われる。

### 参考文献

- [1] L.A. Lyusternik, O.A. Chervonenkis and A.R. Yanpol'skii: " Handbook for Computing Elementary Functions ", Translated from Russian by G. J. TEE , PERAGMON PRESS , (1965)
- [2] 一松 信: " 近似式 ", 竹内書店 , (1963)
- [3] 赤坂 隆: " 数値計算 ", コロナ社 , (1967)
- [4] 鳥居 達生・牧之内 三郎: " チェビシエフ多項式係数の性質と最適補間多項式次数の決定について ", 電子情報通信 , Vol. J72-A, No. 8, pp.1296-1302, (1989)
- [5] 一松 信: " 初等関数の数値計算 ", 教育出版, (1974)
- [6] A. RALSTON and P. RABINOWITZ: " A FIRST COURSE NUMERICAL ANALYSIS " McGraw-Hill , (1978)
- [7] 戸田 英雄・小野 今美 共訳: " 電子計算機のための数値解析の理論と応用 " ブレイン図書出版(株), (1986) [6]の訳本
- [8] 山内 二郎: " 奇関数の一様最良化多項式近似式の折りたたみ計算法 (特に  $\tan^{-1}x$  の小区間の一様最良多項式近似式), 第4回プログラミング報告集 D52, (1963)
- [9] 山内 二郎: " 一様最良化多項式近似式の折りたたみ計算法 " 数学 15.1, pp.40-45, (1974)
- [10] 山内 二郎・森口 繁一・一松 信・宇野 利雄: " 電子計算機のための数値計算法 I ", 培風館 , (1965)
- [11] 山内 二郎・森口 繁一・一松 信・宇野 利雄: " 電子計算機のための数値計算法 II ", 培風館 , (1967)
- [12] 山内 二郎・宇野 利雄・一松 信・宇野 利雄: " 電子計算機のための数値計算法 III ", 培風館 , (1972)
- [13] 河口 万由香・伊達 惇: " チェビシエフ多項式係数の性質と最適補間多項式次数の決定について " 電子情報通信 , Vol. J72-A, No. 8, pp.1296-1302 , (1989)
- [14] 浜田 穂積: " 有理式近似および連分数近似の最良化について " 情報処理 , Vol.19, No.11 , (1978)
- [15] Y. Kobayashi, M. Ohkita and M. Inoue: " Economization on a Chebyshev Expansion by Way of Turning in the Truncation Error" Proc. IX Internat. Sym. Math. Programming, Budapest, (1976)
- [16] Y. Kobayashi and M. Inoue: " Combination of Two Discrete Fourier Transforms of Data Sampled Separately at Different Rates " , J. Inform. Processing , Vol. 2 , No. 4 , pp. 203-207 , (1980)
- [17] M. Inoue and Y. Kobayashi: " How to Increase the Maximum Frequency of DFT while keeping the Speed of Sampling " J. Inform. Processing , Vol. 7 , No. 7 , (1984)