数　値　解　析 34－4
（1990．10．6）

重根に強い同時反復公式

櫻井　鉄也　　鳥居　達生　　杉浦　洋
名古屋大学　工学部

代数方程式 $f(z)=0$ のすべての根を求めるための，重根に対して高い収束次数を持つ反復公式を示す．各近似根上で多項式の m 階導関数値までを用いて，$f(z)$ が単根のみを持つ場合には $2m$ 次，重根を持つ場合には m 次収束する．この反復公式で用いる大域的方法では，$f(z)$ の多重根が打ち消されて単根のみを持つような関数を用いる．そのかわりに，$f(z)$ の零点と近似根が同じように扱われ区別されなくなるため，近似式の性質を利用して，$f(z)$ の零点に向かうような近似根を見つける．

Simultaneous iteration formula for multiple zeros

Tetsuya Sakurai　Tatsuo Torii　Hiroshi Sugiura
Faculty of Eng.,　Nagoya University
Nagoya,　464-01,　Japan

Simultaneous iteration formula to solve a polynomial equation $f(z)=0$, which has the high convergence order even for multiple zeros, is described. The convergence order of this formula is $2m$ for simple zeros and m for multiple zeros with the m-th degree Taylor polynomial of a function at each approximations. In this formula, we combine a local method and a global method. This global method does not distinguish between zeros of $f(z)$ and approximations, therefore we use a method to find the next approximation approaching to a zero.

1　はじめに

代数方程式 $f(z)=0$ を解く反復法として，Newton-Raphson 法や Halley 法に代表されるような，１点，あるいは１点に収束していく複数点での関数値や導関数値を用いた反復公式を，局所的方法と呼ぶ．

これに対して，複数の近似根をとり，それぞれの点で反復計算を行い，別々の根に収束していく方法を大域的方法と呼ぶ．このような方法としては，Durand-Kerner 法 [1] や Aberth 法 [2] がよく知られている．これらは単根に対してはそれぞれ２次，３次の方法であるが，重根に対しては線形収束である．

大域的方法において，局所的方法を組み合わせることで，重根に対して高い収束次数が得られる [3]．これは局所的方法の収束性によっているので，ある重根に対してその多重度と同じ数の近似根が近づいたときに，本来の収束次数が得られる．

本論文では，他の近似根がまだ近づいていないときにも，重根に対して高い収束次数を持つような大域的公式を提案する．収束次数については３.２節で述べる．この公式では重根に対する収束性と引き替えに，関数の零点と近似根の区別をしなくなる．３.３節では，得られた近似根が他の近似根に近づいているか関数の零点に近づいているかを判定し，零点に近づくような近似根を採用する方法について述べる．

４節では，この反復公式を用いて重根を持つ多項式を解いたときの数値例を示す．

2　Padé 近似による反復公式

n 次の多項式 $f(z)$ の零点を求める反復公式は，$f(z)$ に対する Padé 近似を用いることにより得られる．これは次のようにして求められる．

［Padé 近似による反復公式］

Step 1. $f(z)$ に対して，ある近似根 z_0 で，分子が１次の Padé 近似式の分子 $P(z)$ を求める．

Step 2. $P(z)=0$ の解を求め，それを次の近似根 z_0' とする．

この方法により，Newton-Raphson　法や，Halley 法を含む局所的な反復公式が得られる [4]．また，$f(z)$ を近似するかわりに $f(z)/f'(z)$ を用いると，重根に対しても単根と同じ収束次数を持つ局所的な方法が得られる [5]．この反復公式は，$f(z)$ の m 階導関数値までを用いて，多重度にかかわらず m 次収束する．

一方，大域的な方法も Padé 近似による反復公式から同様に得られる [5]．$f(z)$ の n 個の近似根を $z_1, \ldots, z_n$ とする．ここで z_k 以外の近似根を零点とする多項式を

$$\pi_k(z) := \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} (z - z_i) \tag{2.1}$$

とし，

$$F_k(z) := \frac{f(z)}{\pi_k(z)} \tag{2.2}$$

とおく．Padé 近似による反復公式において，$f(z)$のかわりに $F_k(z)$ を用い，$z_0 = z_k$，$k = 1, \ldots, n$ として計算する．これにより新しい近似根 z_k'，$k = 1, \ldots, n$ を得る．

こうして得られる大域的方法の収束次数は，m 階導関数値までを用いて，単根に対しては $m+2$ 次，重根に対しては線形収束である．$m=1$ のとき，この方法は Aberth 法と一致する．

3　重根を考慮した大域的方法

3.1　局所的な方法との組み合わせ

高次の大域的方法は，同じ根にその根の多重度を超えて，近似根が集まることがある [6]．また重根に対しては，線形収束である．これらの問題に対するする一つの対策として，局所的方法と大域的方法を組み合わせる反復公式がある [3].

これは，ある近似根 z_k の新しい近似根を大域的方法で計算するときに，他の近似根 $z_1,\dots, z_{k-1}, z_{k+1},\dots, z_n$ を，あらかじめ重根に対して高い収束次数を持つ局所的方法で改良しておく．これを**同時反復公式 I** と呼ぶことにする．

この反復公式の収束次数は，多項式が単根のみを持つときには $2m+1$ 次，重根を持つときには m 次である．

3.2　重根の解消

$f(z)$ が重根を持つときでも $f(z)/f'(z)$ は単根のみを持つ．局所的方法のときは，この単根のみを持つ関数を近似することで，重根に対しても収束次数が変わらない反復公式を得た．これと同様に，大域的な方法においても，$F_k(z)$ のかわりに $G_k(z)=F_k(z)/F'_k(z)$ を近似することにする．同時反復公式 I において，$F_k(z)$ のかわりに $G_k(z)$ を用いた公式を**同時反復公式 II** と呼ぶことにする．

$f(z)$ の相異なる零点の数を N とし，根 ζ_i の多重度を μ_i とすると

$$\frac{1}{G_k(z)}=\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{\pi'_k(z)}{\pi_k(z)}$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\frac{\mu_i}{z-\zeta_i}-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\frac{1}{z-z_i} \tag{3.1}$$

と表わせる．これより $1/G_k(z)$ の分母は，ζ_i と z_i に単根を持つことがわかる．したがって，$G_k(z)$ は単根のみを持つ関数であるから，これを反復公式に用いれば，多重度にかかわりない公式が期待できる．

ここで，同時反復公式 II の収束次数について考える．$G_k(z)$ は $F'_k(z)$ を含むので，$f(z)$ の m 階導関数値までを用いたとき，$G_k(z)$ については $m-1$ 階導関数値まで得られる．これより得られる $G_k(z)$ の Padé 近似式は，分子が 1 次のときに分母は $m-2$ 次式となる．$G_k(z)$ に対する z_k における $[1/m-2]$-Padé 近似式の分子の零点は，文献 [3] の補題 2 より

$$z'_k=z_k+(m-1)!\frac{\left(\dfrac{1}{G_k}\right)^{(m-2)}(z_k)}{\left(\dfrac{1}{G_k}\right)^{(m-1)}(z_k)} \tag{3.2}$$

と表せる．ここで，式 (3.1) はまた

$$\frac{1}{G_k(z)}=\frac{1}{z-\zeta_k}+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\left(\frac{1}{z-\zeta_i}-\frac{1}{z-z_i}\right)$$

と表すことができる．

$$s_i^{(j)}(z):=\left(\frac{1}{z-\zeta_i}\right)^{j+1}-\left(\frac{1}{z-z_i}\right)^{j+1} \tag{3.3}$$

とおくと，$1/G_k(z)$ の j 階導関数は

$$\left(\frac{1}{G_k}\right)^{(j)}(z)=(-1)^j j!\left\{\left(\frac{1}{z-\zeta_k}\right)^{j+1}+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}s_i^{(j)}(z)\right\} \tag{3.4}$$

となる．よって式 (3.2), (3.4) より

$$z_k' = z_k - \frac{\left(\dfrac{1}{z_k - \zeta_k}\right)^{m-1} + \displaystyle\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} s_i^{(m-2)}(z_k)}{\left(\dfrac{1}{z_k - \zeta_k}\right)^{m} + \displaystyle\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} s_i^{(m-1)}(z_k)}$$

$$= z_k - \frac{z_k - \zeta_k + (z_k - \zeta_k)^m \displaystyle\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} s_i^{(m-2)}(z_k)}{1 + (z_k - \zeta_k)^m \displaystyle\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} s_i^{(m-1)}(z_k)}. \quad (3.5)$$

これより同時反復公式 II の収束次数は次のようになることがわかる．

定理　近似根 $z_1,\ldots, z_n$ は $f(z)$ の零点 $\zeta_1,\ldots, \zeta_n$ に十分近いとする．このとき同時反復公式 II の収束次数は $f(z)$ が単根のみを持つときには $2m$ 次，重根を持つときには m 次である．

証明　$\varepsilon_i = z_i - \zeta_i$, $\delta_i = z_k - z_i$, $i = 1,\ldots,n$ とおき，

$$\varepsilon_M := \max_{1\le i\le n,\, i\neq k} |\varepsilon_i|,$$
$$\delta_M := \min_{1\le i\le n,\, i\neq k} |\delta_i|$$

とする．z_k 以外の近似根は局所的な方法で改良されているので $|\varepsilon_i| < |\delta_i|$, $i \neq k$ としてよい．よって $s_i^{(j)}(z_k)$ は

$$s_i^{(j)}(z_k) = \left(\frac{1}{z_k - z_i + z_i - \zeta_i}\right)^{j+1} - \left(\frac{1}{z_k - z_i}\right)^{j+1}$$
$$= \left(\frac{1}{\delta_i + \varepsilon_i}\right)^{j+1} - \left(\frac{1}{\delta_i}\right)^{j+1}$$
$$= O\left(\frac{\varepsilon_i}{\delta_i^{j+2}}\right) \quad (3.6)$$

となる．式 (3.5), (3.6) より

$$z_k' = z_k - \varepsilon_k \frac{1 + \varepsilon_k^{m-1} O\left(\varepsilon_M / \delta_M^m\right)}{1 + \varepsilon_k^m O\left(\varepsilon_M / \delta_M^{m+1}\right)}$$
$$= \zeta_k + O\left(\frac{\varepsilon_k^m \varepsilon_M}{\delta_M^m}\right). \quad (3.7)$$

反復計算をする前の近似根の誤差はすべて $O(\varepsilon)$ とする．ここで用いる局所的方法は，多重度にかかわらず m 次の方法であるから，z_k 以外の近似根の誤差は

$$\varepsilon_M = O\left(\varepsilon^m\right) \quad (3.8)$$

となる．ζ_k が単根のときには

$$\delta_M = O(1) \quad (3.9)$$

としてよい．これに対して，ζ_k が重根の場合には ζ_k の近傍に z_k 以外の近似根もある．これらは局所的な方法で改良されているので

$$\delta_M = O(\varepsilon_k) = O(\varepsilon) \quad (3.10)$$

となる．よって式 (3.7) に式 (3.8) と，(3.9) または (3.10) を代入して定理の結論を得る．■

$G_k(z)$ は重根を持たない関数であるが，$f(z)$ が重根を持つときにはその重根に対して複数個の近似根が集まるため，収束次数は他の近似根の誤差に影響されてしまう．

重根に対して，その多重度より少ない数の近似根しか近づいておらず，一部の近似根はまだ収束し始めていないときには，同時反復公式 I では線形収束である．しかし公式 II では式 (3.5) において $s_i^{(j)}(z_k) = O(1)$ であるような近似根 z_i がある．よって一回反復後の誤差は $O(\varepsilon^m)$ となり，このときでも m 次収束する．

3.3 近似根と根の区別

式 (3.1) より近似根 z_i , $i \neq k$ もまた $G_k(z)$ の零点である．したがって $G_k(z)$ に対する近似式から得られる反復公式は，$f(z)$ の零点と近似根を区別せず，他の近似根に向かって収束する可能性がある．ここでは，得られた新しい近似根が多項式の零点に向かっているか近似根に向かっているかを判定し，根に向かうような近似根を選択する方法について述べる．

式の簡単のために，$G_k(z)$ に対する [1/$m-2$]-Padé 近似のかわりに，$1/G_k(z)$ に対する [$m-2$/1]-Padé 近似について考える．この分母が 1 次の近似式を

$$R_{m-2,1}(z) = \frac{\beta_1}{z-\alpha_1} + U_1(z) \tag{3.10}$$

と表す．ここで，$U_1(z)$ は $m-3$ 次の多項式である．いま，近似根 z_k が他の近似根 z_l にのみ近いものとすると，式 (3.1) より

$$\frac{1}{G_k(z_k)} = \frac{-1}{z_k - z_l} + O(1) \tag{3.11}$$

であるから，式 (3.10), (3.11) より $\alpha_1 \approx z_l$, $\beta_1 \approx -1$ となるはずである．そこで Re $\beta_1 \leq 0$ のときには，近似根に向かっている可能性が高いと考える．このときは，あらためて $U_1(z)$ に対する分母が 1 次の Padé 近似を行い

$$U_1(z) = \frac{\beta_2}{z-\alpha_2} + U_2(z) + O((z-z_k)^{m-2})$$

とし，この β_2 について調べる．これを繰り返し，Re $\beta_i > 0$ となったとき α_i を次の近似根として採用する．$U_i(z)$ が定数になるまで繰り返して，すべての Re β_i が正でないときには，同時反復公式 II をあきらめ，同時反復公式 I により次の近似根を求める．これらの計算の手間は多項式の次数がある程度大きいときには，関数値の計算の手間に比べて十分小さい．

4 数値例

同時反復公式 I, II の数値例を示す．言語は BASIC を用い，計算は Macintosh SE/30 上で，倍精度演算で行った．多項式は

$$f(z) = (z-1)^3 (z-0.5i)^3 (z-(-0.5+0.5i))^3$$

とし，半径 2 の円周上に初期値をとった．

図 1 は公式 I と公式 II によって一回反復後の近似根を示す．ここで $m = 6$ とした．図中で ■ は初期値を表わし，○ は一回反復後の近似根を表わす．● は根の位置で，いずれも 3 重根である．

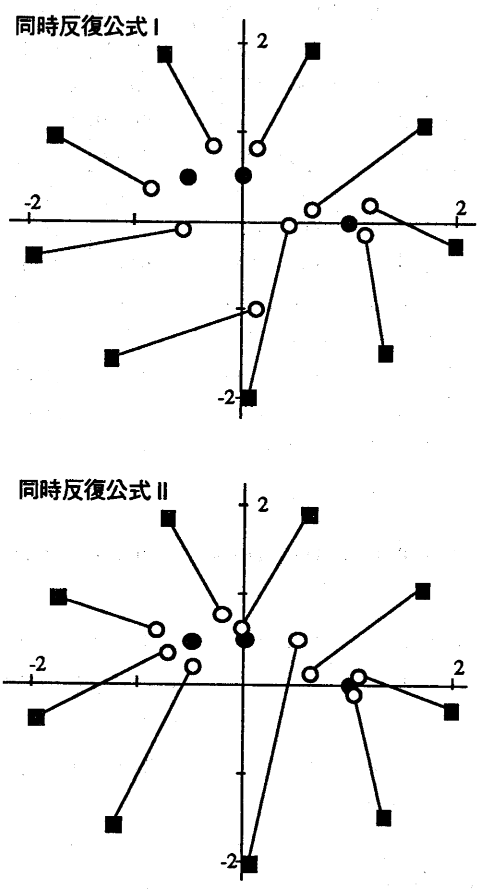

図 1　1 回反復後の近似根

表1　同時反復公式IIによる反復

反復	k	i	α_i	$\mathrm{Re}\beta_i$	$\|f(z_k)\|$
1	1	0	.65678+.11521i	—	1.4E+02
	2	1	-.01295+.61432i	2.2E+00	1.5E+02
	3	0	-.20085+.80629i	—	1.6E+02
	4	1	-.83362+.58244i	1.5E-01	3.6E+02
	5	1	-.72069+.35170i	5.7E-01	1.4E+03
	6	1	-.45798+.16277i	8.7E-01	3.1E+03
	7	0	.54498+.52126i	—	2.8E+03
	8	1	1.06462-.09721i	1.1E+00	9.6E+02
	9	1	1.08752+.10017i	1.1E+00	1.8E+02
2	1	1	1.03108-.05605i	1.7E+00	3.8E-02
	2	1	-.00007+.50022i	3.0E+00	3.2E-04
	3	1	.01453+.52981i	1.3E+00	1.2E-02
	4	1	-.51084+.49914i	1.1E+00	1.7E-01
	5	1	-.50043+.49690i	1.1E+00	4.1E-02
	6	1	-.44917+.46805i	4.2E-01	2.3E-02
	7	1	.06440+.37802i	3.2E-01	6.1E-02
	8	2	.93391+.08179i	8.0E+00	1.4E-02
	9	1	.99229-.00405i	4.8E+00	1.6E-02
3	1	1	1.00000+.00000i	1.0E+00	1.8E-03
	2	1	-.00001+.50001i	1.5E+00	2.1E-12
	3	1	.00005+.50007i	1.0E+00	7.0E-06
	4	1	-.50000+.50000i	1.0E+00	6.9E-07
	5	1	-.50000+.50000i	1.0E+00	1.5E-08
	6	1	-.50000+.50000i	1.0E+00	7.0E-05
	7	1	-.00004+.49993i	1.0E+00	5.2E-04
	8	1	1.00000-.00000i	1.0E+00	4.2E-03
	9	1	1.00000-.00000i	1.0E+00	3.6E-06
4	3	1	.00001+.50000i	8.6E-01	1.0E-13
	7	1	-.00000+.49999i	1.0E+00	1.0E-13

表1に，公式IIによって全根を求めるまでの反復の様子を示す．表中で，k は近似根の番号を表わし，i は何番目の α_i を採用したかを示している．$i=0$ のときには同時反復公式Iを用いたことを表わしている．

この表から，i が1以外となることはあまりないことがわかる．これは他の近似根が局所的方法で改良されているため，近似根どうしが近くにいることが起こりにくいためと思われる．

6　おわりに

重根に対する収束性を考慮した同時反復公式を提案し，その収束次数を証明した．この方法では，単根に対しては $2m$ 次，重根に対しては m 次収束する．

この反復公式では，重根に対する収束性の代償として，方程式の根と近似根を区別しない問題がある．そのため，得られる近似根が他の近似根に向かっているかどうかを判定し，方程式の根に向かっていると思われる近似根を，次の新しい近似根として採用する．判定には β_i の実部の符号のみを用いたが，β_i の持つ意味についてよりくわしく解析し，大きさや虚部についても利用することが今後の課題である．

参考文献

[1] Durand, E. : Solutions Numériques des Équations Algébriques. Tome I, Masson, Paris (1960).

[2] Aberth, O. : Iteration methods for finding all zeros of a polynomial simultaneously, *Math. Comp.* 27, pp. 339-344 (1973).

[3] 櫻井鉄也，鳥居達生，杉浦洋：高次収束する代数方程式の全根同時反復解法，情報処理学会論文誌 Vol. 31, No. 7, pp. 964-969 (1990).

[4] Nourein, A. W. : Root determination by use of Padé approximants, *BIT* 16, pp. 291-297 (1976).

[5] 櫻井鉄也，鳥居達生，杉浦洋：Padé近似による代数方程式の反復解法，情報処理学会論文誌 Vol. 31, No. 4, pp. 517-522 (1990).

[6] 五十嵐正夫：代数方程式と大域的解法，情報処理学会研究報告 Vol. 89, No. 25, pp. 1-8 (1989).