数 値 解 析 36－1
（1 9 9 1. 3. 1 5）

# 数列加速法について

杉原正顕
一橋大学・経済学部

本稿においては，交代級数の収束加速法に関する４つの話題について述べる．第一の話題はEuler変換の振動的関数の無限積分計算への適用可能性である．第二の話題は交代級数の部分和に対する（漸近）展開公式である．第三の話題はEuler変換 vs Aitken 加速（Euler変換とAitken 加速では，どちらが交代級数の加速法として有効か？）． 最後の話題は交代級数に対する普遍的加速法の非存在（すべての交代級数の収束を加速することはできない．）である．

# Four Topics on Convergence Acceleration Methods for Alternating Series

Masaaki Sugihara
Department of Economics, Hitotsubashi University
Kunitach, Tokyo 186, Japan

In this note we discuss four topics on convergence acceleration methods for alternating series. The first is applicability of the Euler transformation to numerical integration of oscillatory functions over the infinite interval. The second is an asymptotic expansion of the partial sum of alternating series. The third is the Euler transformation versus the Aitken $\delta^2$-process (Which is the better acceleration method for alternating series, the Euler transformation or the Aitken $\delta^2$-process?). The last is non-accelerability of alternating series (All alternating series are not accelerable.).

## §0. はじめに

本稿においては，交代級数の収速の加速と関連する４つの話題について記す．まず初めに，「減衰の遅い振動型関数の無限積分の計算へのEuler変換の応用」について述べる．次に「交代級数の部分和に対する(漸近)展開公式」を与える．(この公式は取りたてて新しいものとは思われないが，詳細に議論した文献等を見うけないので取りあげた．) 才３番目に「Euler変換 vs Aitken加速」について述べる．最後に，文献[1]にある「交代級数に対する普遍的加速法の非存在」について紹介する．

## §1. 減衰の遅い振動型関数の無限積分の計算へのEuler変換の応用

減衰の遅い振動型関数の無限積分の計算法として，被積分関数の引き続く零点で積分区間を小区間に分け，各区間で積分値を求め，それを足し合わせる方法がある．ただし，愚直に足し合わせたのでは効率が悪いので収束の加速を行う．加速法としては，Euler変換，Levinのυ-変換，等々が使用される．ここでは，Euler変換を行いる方法について考える．この方法は，発想が素直なこともあって，数多くの人々が提案し，その有効性を"実証"している[2][4][5][9]．しかし，筆者の知る限り，その有効性を理論的に明らかにした文献は皆無である．そこで，以下，Euler変換を用いる方法の有効性を理論的に考察する――より正確には，理論的に有効性が証明できる場合をあげる――

Euler変換の数列変換としての有効性に関する次の理論的結果が基本的道具である．[3]

> 交代級数 $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \cdots$ の各項 $a_n$ が次の表現をもつとする．
>
> (1.1) $$a_n = \int_0^\infty e^{-nt}\, d\psi(t).$$
>
> ここで $\psi(t)$ は $n$ に無関係であり，かつ，次の条件を満たすとする．
>
> (1.2) $$\int_0^\infty |d\psi(t)| \leq M < +\infty.$$
>
> このとき，Euler変換によって得られる級数 $\frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{4}\Delta a_0 + \frac{1}{8}\Delta^2 a_0 \cdots + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^n \Delta^n a_0 +$ の各項は次のように評価される．
>
> (1.3) $$\left|\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \Delta^n a_0\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} M.$$

この結果は，$a_n$ についての表現から，$\Delta^n a_0$ についての表現

$$\Delta^n a_0 = \int_0^\infty (e^{-t} - 1)^n\, d\psi(t)$$

が得られることに注意すれば明らか． ■

この結果の意味するところは，「$a_n$ が上記のような表現を許せば，Euler変換後の級数は，公比1/2の等比級数と同等もしくは速く収束する．」である．

《注意》 上記の結果と，Euler変換の正則性(regularity)「交代級数が収束するならば Euler変換後の級数も収束する」[10]とをあわせると，「収束交代級数の各項 $a_n$ が(1.1)の表現を許せば，Euler変換後の級数は，公比1/2の等比級数と同等もしくは速く同じ収束値に収束する」ことがわかる．

以下，この結果の適用できる場合を２つあげる．

【例 1.1】 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

この例の場合

(1.4) $$(-1)^n a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

である。このの $a_n$ が(1.1)の表現をもつことが次のようにして証明される。
まず，$\sin x/x$ の表現（Fourier変換による）

(1.5) $$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{ixy} dy$$

に注意する。この表現を(1.4)の右辺に代入して，積分の順序を交換し，$x$に関する積分を実行すると

(1.6) $$a_n = (-1)^n \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{(e^{i\pi y}-1)}{iy} e^{in\pi y} dy.$$

ここで，(1.6)の右辺の積分の被積分関数の積分を図1に示されたような積分路 $\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3+\Gamma_4$ 上で考える。Cauchyの定理により全周での積分はゼロであり，又，$R$を無限大にするとき容易に分かるように$\Gamma_3$上の積分はゼロに収束する。従って，$\Gamma_1$上の積分，つまり，$a_n$は$\Gamma_2+\Gamma_4$上での積分を用いて表わされる。結果は次の通りである。

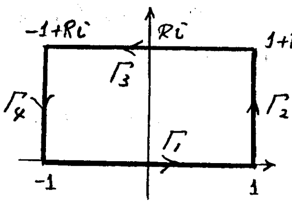

図1 積分路

(1.7) $$a_n = \int_0^\infty \frac{e^{-\pi y}+1}{1+y^2} e^{-n\pi y} dy$$

これで，$a_n$が(1.1)の表現をもつことが示された。
今与えた証明法は，$\sin x/x$ のように，関数が台が有界であるような関数のFourier変換で与えられる場合

(1.8) $$f(x) = \int_{-A}^{A} g(y) e^{ixy} dy$$

にも適用できる（とはいっても，$g$に関して相当厳しい条件が付くが）。例えば，

(1.9) $$\int_0^\infty J_0(x) dx = 1 \quad , J_0(x)\text{は，0次Bessel関数}$$

において，

(1.10) $$(-1)^n a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} J_0(x) dx$$

とすると，$a_n$が(1.1)の表現をもつことが，$J_0(x)$のFourier変換を用いた表現

(1.11) $$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} e^{ixy} dy$$

を利用してわかる。
《注意》 Bessel関数に関する例において，各小区間（積分値を求める）は，$[n\pi,(n+1)\pi)$であり，Bessel関数の零点から定まるものでないことに注意せよ。

【例1.2】 $$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

この例の場合

(1.12) $$(-1)^n a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

である。今，(1.12)の右辺の積分において，変数$x$を$y+n\pi$と変換すると，結果は

$$(-1)^n a_n = \int_0^\pi \frac{\sin(y+n\pi)}{\sqrt{y+n\pi}}dy = (-1)^n\int_0^\pi \frac{\sin y}{\sqrt{y+n\pi}}dy$$

となる．従って，$a_n$は次のように積分表示される．

(1.13) $$a_n = \int_0^\pi \frac{\sin y}{\sqrt{y+n\pi}}dy$$

ここで，公式

(1.14) $$\frac{1}{\sqrt{y+n\pi}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^\infty \xi^{-\frac{1}{2}} e^{-(y+n\pi)\xi}d\xi$$

を(1.13)に代入して積分の順序を交換すると，$a_n$に対する表現式

$$a_n = \int_0^\infty e^{-n\pi\xi}\, \xi^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^\pi \sin y\cdot e^{-y\xi}dy\right)d\xi$$

を得られ，$a_n$が(1.1)の型の表現をもつことがわかる．

この例に関する結果は，容易に次の場合に拡張できる．

(1.15) $$\int_0^\infty g(x)\sin x\, dx$$

ここで，$g(x)$は(1.1)に類似の表現

(1.16) $$g(x) = \int_0^\infty e^{-xt}d\psi(t)$$

を許す関数である．但し，$\psi(t)$は条件

(1.17) $$\int_0^\infty |d\psi(t)| < +\infty$$

を満たすとする．この拡張が適用可能な例として

(1.18) $$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx \quad (0<\alpha<2), \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{(x+1)^\beta}dx \quad (0<\beta)$$

などがある．

以上，Euler変換を行いることの正当性の証明できる場合を見て来たが，Bessel関数等を含んだ複雑な形の関数の場合に関しては手のつけようがないのが現状である．今後の課題としたい．

## §2. 交代級数の部分和に対する展開公式

交代級数 $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n a_n$ の各項 $a_n$がある関数$f$の整数点での値$f(n)$で与えられるような場合に，この交代級数の部分和

(2.1) $$\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k f(k)$$

に対する（漸近）展開公式を与える．

次のDarbouxの公式を用いる．

**Darbouxの公式（[6],[12]）**

関数$u(z)$は点$a$，$z$を結ぶ線分上で正則な関数，$p_n(t)$は$n$次多項式とする．このとき次式が成立する．

(2.2) $$p_n^{(n)}(0)\,\{u(z)-u(a)\} = \sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}(z-a)^r\{p_n^{(n-r)}(1)\,u^{(r)}(z) - p_n^{(n-r)}(0)\,u^{(r)}(a)\} + (-1)^n(z-a)^{n+1}\int_0^1 p_n(t)\,u^{(n+1)}(a+t(z-a))\,dt$$

又,次の Euler 数, Euler 多項式を用いる

**Euler 数, Euler 多項式**

次の母関数を用いて定義される数 $E_n$ を Euler 数という。

(2.3) $$\frac{1}{e^s+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{n!}s^n$$

又,次の母関数を用いて定義される多項式 ($n$次) $E_n(t)$ を Euler 多項式という。

(2.4) $$\frac{e^{ts}}{e^s+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n(t)}{n!}s^n$$

公式の導出に必要な Euler 数, Euler 多項式の性質を次に列挙する。いずれも容易に証明することができる。

(2.5) $$E_0(0)=E_0(1)=\frac{1}{2},\quad E_{2l}(0)=E_{2l}(1)=0\quad(l\geq 1),$$

$$E_{2l+1}(0)=E_{2l+1},\quad E_{2l+1}(1)=-E_{2l+1}\quad(l\geqq 0)$$

(2.6) $$E_n'(x)=n\,E_{n-1}(x)\quad(n\geqq 1)$$

Darboux の公式 (2.2) において $n=2m+1$ とし, $z=a+1$, $p_n(t)=E_n(t)$ とおくと, (2.2) は次のようになる。

(2.7) $$E_n^{(n)}(0)\{u(a+1)-u(a)\}$$
$$=\sum_{r=1}^{2m+1}(-1)^{r-1}\{E_n^{(n-r)}(1)\,u^{(r)}(a+1)-E_n^{(n-r)}(0)\,u^{(r)}(a)\}$$
$$-\int_0^1 E_n(t)\,u^{(n+1)}(a+t)\,dt$$

ここで, $E_n^{(n)}(0)$, $E_n^{(n-r)}(1)$, $E_n^{(n-r)}(0)$ の値を (2.5), (2.6) を用いて求める。まず, (2.6) より

$$E_n^{(n)}(0)=n!\,E_0(0),\quad E_n^{(n-r)}(1)=n!/r!\,E_r(1),\quad E_n^{(n-r)}(0)=n!/r!\,E_r(0).$$

(2.5) を用いて

$$E_n^{(n)}(0)=\frac{1}{2}n!,\quad E_n^{(n-2l)}(1)=E_n^{(n-2l)}(0)=0,$$
$$E_n^{(n-2l-1)}(1)=-n!/(2l+1)!\,E_{2l+1},\quad E_n^{(n-2l-1)}(0)=n!/(2l+1)!\,E_{2l+1}.$$

これらの値を (2.7) に代入して整理すると, (2.7)式は次のようになる。

(2.8) $$\frac{1}{2}\{u(a)-u(a+1)\}$$
$$=\sum_{l=0}^{m}\frac{E_{2l+1}}{(2l+1)!}\{u^{(2l+1)}(a)+u^{(2l+1)}(a+1)\}+\frac{1}{(2m+1)!}\int_0^1 E_{2m+1}(t)\,u^{(2m+2)}(a+t)\,dt$$

さらに, {(2.8) で $a=0$ とした式} $-$ {(2.8) で $a=1$ とした式} …… $(-1)^{N-1}$ {(2.8) で $a=N-1$ とした式} を作り, まとめると次の目標の公式を得る。

(2.9) $$\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k u(k)=\frac{1}{2}\{u(0)-(-1)^N u(N)\}+\sum_{l=0}^{m}\frac{E_{2l+1}}{(2l+1)!}\{u^{(2l+1)}(0)-(-1)^N u^{(2l+1)}(N)\}$$
$$+\frac{1}{(2m+1)!}\int_0^1 E_{2m+1}(t)\left\{\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k u^{(2m+2)}(k+t)\right\}dt$$

《注意》 (2.9) で $m\to\infty$ とした形の公式は，次のようにして形式的に導出できる．まず，$S$ をシフト演算子 ($Sf(x)=f(x+1)$)，$D$ を微分演算子 ($Df(x)=\frac{d}{dx}f(x)$) とするとき $S=e^D$ なる関係が成立することに注意する．この関係式を用いて，次の一連の等式を得る．

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k f(k) &= \sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k S^k f(0)\\
&= \frac{I-(-S)^N}{I+S} f(0)\\
&= \frac{I-(-S)^N}{I+e^D} f(0)\\
&= (I-(-S)^N)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{n!}D^n f(0) \quad (\because\ (2.3) による)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{n!}\{D^n f(0)-(-1)^N D^n f(N)\}.
\end{aligned}
$$

最後の式は (2.9) で $m\to\infty$ としたものに他ならない．なお，関数空間

$$\mathcal{E}(\alpha)=\{\, f(z)\mid f(z):\text{整関数},\quad \sup_{z\in\mathbb{C}}(|f(z)|e^{-\alpha|z|})<+\infty\,\}$$

但し，ノルム $\|f\|$ は $\sup_{z\in\mathbb{C}}(|f(z)|\,e^{-\alpha|z|})$ で入れる．

において，もし $\alpha$ が $2\pi$ より小さければ上記の形式的導出が作用素解析の立場から正当化される．

次に交代級数の和の近似値を誤差評価付きで求めるのに便利な結果を与える．

$u(x)$ が次の条件を満足するとする．

(i) $u(x)$ は $C^{2m+2}([0,\infty))$ に属する．

(ii) $\lim_{N\to\infty}u(N)=0,\quad \lim_{N\to\infty}u^{(2l+1)}(N)=0 \quad (l=1,2,\cdots,m)$

(iii) $\int_0^{\infty}|u^{(2m+2)}(t)|dt<+\infty$

このとき，

$$(2.10)\qquad \sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k u(k) = C+(-1)^{N+1}\left\{\frac{1}{2}u(N)+\sum_{l=0}^{m}\frac{E_{2l+1}}{(2l+1)!}u^{(2l+1)}(N)\right\}+R_m(N),$$

ここで，

$$C=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u(k),\qquad |R_m(N)|\le\frac{E_{2m+1}}{(2m+1)!}\int_N^{\infty}|u^{(2m+2)}(t)|dt$$

（証明） まず，

$$(2.11)\qquad \int_0^1 E_{2m+1}(t)\left\{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u^{(2m+2)}(k+t)\right\}dt$$

が絶対収束することに注意する．これは次のように容易に示される．

$$
\begin{aligned}
(2.12)\qquad &\int_0^1|E_{2m+1}(t)|\left\{\sum_{k=0}^{\infty}|(-1)^k u^{(2m+2)}(k+t)|\right\}dt\\
&\le\int_0^1\sum_{k=0}^{\infty}|u^{(2m+2)}(k+t)|dt\cdot\max_{0\le t\le 1}|E_{2m+1}(t)|\\
&=\int_0^{\infty}|u^{(2m+2)}(t)|dt\cdot|E_{2m+1}|<+\infty
\end{aligned}
$$

(ここで，条件(iii)，および，$E_{2m+1}(t)$ は区間の両端点で最大最小値をとることを用いた.)

この (2.11) の絶対収束性を用いて，(2.9) の右辺を次のように変形する.

$$(2.13)\quad \sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k u(k)=\frac{1}{2}u(0)+\sum_{l=0}^{m}\frac{E_{2l+1}}{(2l+1)!}u^{(2l+1)}(0)+\frac{1}{(2m+1)!}\int_0^1 E_{2m+1}(t)\left\{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u^{(2m+2)}(k+t)\right\}dt$$

$$+(-1)^{N+1}\left\{\frac{1}{2}u(N)+\sum_{l=0}^{m}\frac{E_{2l+1}}{(2l+1)!}u^{(2l+1)}(N)\right\}$$

$$+\frac{1}{(2m+1)!}\int_0^1 E_{2m+1}(t)\left\{\sum_{k=N}^{\infty}(-1)^k u^{(2m+2)}(k+t)\right\}dt$$

ここで，(2.13) の右辺第1項，第2項，第3項の和は $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u(k)$ に等しい. 実際，(2.13) において $N\to\infty$ とすると，右辺第4項，第5項は条件(ii)(iii)よりゼロに収束し，第1項，第2項，第3項が右辺に残り，それが $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u(k)$ に等しくなる. 今その値を $C$ とおいて (2.13) を書きかえると

$$(2.14)\quad \sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k u(k)=C+(-1)^{N+1}\left\{\frac{1}{2}u(N)+\sum_{l=0}^{m}\frac{E_{2l+1}}{(2l+1)!}u^{(2l+1)}(N)\right\}+R_m(N)$$

$$R_m(N)=\frac{1}{(2m+1)!}\int_0^1 E_{2m+1}(t)\left\{\sum_{k=N}^{\infty}(-1)^k u^{(2m+2)}(k+t)\right\}dt$$

となる. 残余項 $R_m(N)$ は (2.12) と同様に評価を行うことができ，結果は次のようになる

$$|R_m(N)|\le\frac{|E_{2m+1}|}{(2m+1)!}\int_N^{\infty}|u^{(2m+2)}(t)|dt$$

∎

【例2.1】

$u(x)=1/\sqrt{x+1}$ とすると，$u^{(k)}=(-1)^k\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1\right)(x+1)^{-\left(\frac{1}{2}+k\right)}$ であるので，上記の結果の条件(i)(ii)(iii)を満たす. 得られる漸近展開は次のような形になる.

$$(2.15)\qquad \sum_{k=0}^{N-1}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}=C+(-1)^N\left\{\frac{c_1}{\sqrt{N}}+\frac{c_2}{N^{3/2}}+\frac{c_3}{N^{5/2}}+\cdots\right\}$$

## §3. Euler変換 vs Aitken加速

交代級数にEuler変換を応用する場合，初めの項 $a_0$ からEuler変換を用いるより，初めの $n+1$ 項をもとの交代級数の和のまま計算し，$n+2$ 項からEuler変換を用いる方が有効であることが知られている. 初めの $n+1$ 項をそのまま計算し，$n+2$ 項から $i$ 項分Euler変換を施して得られる量を $T_n^{(i)}$ とする.

$$(2.16)\qquad T_n^{(i)}=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p a_p+(-1)^{n+1}\frac{1}{2}\sum_{g=0}^{i-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^g\Delta^g a_{n+1}$$

この量は次のような計算規則によって容易に得ることが出来る [8], [9], [11]?.

$$(2.17)\qquad \begin{aligned}&T_{-1}^{(0)}=0\ ,\quad T_n^{(0)}=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p a_p\\ &T_n^{(i)}=\frac{1}{2}\left(T_n^{(i-1)}+T_{n-1}^{(i-1)}\right)\qquad i=1,2,\cdots,\quad n=i-1,i,i+1,\cdots\end{aligned}$$

これらの量は次のような三角形 array の形に表現しておくと，計算規則等理解しやすくてよい. (array において，$i-1$ 列の上下に隣接する量の平均をとるという単純操作が上記の計算規則 (2.17) である)

$$
\begin{array}{lllll}
T_{-1}^{(0)} & & & & \\
T_{0}^{(0)} & T_{0}^{(1)} & & & \\
T_{1}^{(0)} & T_{1}^{(1)} & T_{1}^{(2)} & & \\
T_{2}^{(0)} & T_{2}^{(1)} & T_{2}^{(2)} & T_{2}^{(3)} & \\
T_{3}^{(0)} & T_{3}^{(1)} & T_{3}^{(2)} & T_{3}^{(3)} & T_{3}^{(4)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

今ここで，交代級数の部分和

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p a_p$$

が，(2.15）を一般化した型の漸近展開

(2.18) $$S_n = S + (-1)^n (c_1 n^{-\alpha_1} + c_2 n^{-\alpha_2} + \cdots) \quad (n \to \infty)$$

$$(c_1 \neq 0 \quad 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots)$$

を許す場合を考える。この場合，(2.17)から容易に分かるように，$T_n^{(i)}$ は次のような漸近展開をもつ。

(2.19) $$T_n^{(i)} = S + (-1)^{n+i} \frac{c_1 \alpha_1 (\alpha_1+1)(\alpha_1+2) \cdots (\alpha_1+i-1)}{2^i} n^{-\alpha_1 - i} + o(n^{-\alpha_1 - i})$$

(2.18)のような漸近展開を許す数列 $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対しては，Aitken加速法の適用（繰り返し）が考えられる。この場合のAitken加速適用後の数列の漸近的振舞いについては，[7]に完全なる記述があり，結果は次の通りである。

| |
|---|
| 繰り返し型のAitken加速法<br>(2.20) $A_n^{(0)} = S_n \quad n=0,1,\cdots$<br>$A_n^{(i)} = A_n^{(i-1)} - \frac{(A_n^{(i-1)} - A_{n-1}^{(i-1)})^2}{A_n^{(i-1)} - 2A_{n-1}^{(i-1)} + A_{n-2}^{(i-1)}} \quad i=1,2,\cdots, \quad n=2i, 2i+1, \cdots$<br>によって得られる数列 $\{A_n^{(i)}\}_{n=2i}^{\infty}$ は次の漸近展開をもつ。<br>(2.21) $A_n^{(i)} = S + (-1)^n \frac{c_1 \alpha_1 (\alpha_1+2) \cdots (\alpha_1+2i-2)}{2^{2i}} n^{-\alpha_1 - 2i} + o(n^{-\alpha_1 - 2i})$ |

$A_n^{(i)}$ は，数列の項 $S_n, S_{n-1}, \cdots, S_{n-2i}$ から決定され，$T_n^{(i)}$ は $S_n, S_{n-1}, \cdots, S_{n-i}$ から決定されるので，両者の収束性は $A_n^{(i)}$ と $T_n^{(2i)}$ を比較すべきである。(2.19), (2.21) から分かるように，$A_n^{(i)} - S$，$T_n^{(2i)} - S$ の漸近展開の主要項の比は次で与えられる。

(2.22) $$\frac{T_n^{(2i)} - S}{A_n^{(i)} - S} \sim (\alpha_1+1)(\alpha_1+3) \cdots (\alpha_1+2i-1)$$

従って，"漸近的に"は，Aitken加速法が有効（特に，繰り返しが多くなればなるほど）であることがわかる。

【例3.1】

例2.1で扱った例

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1}} \to S = 0.60489864342 1630 \quad (n \to \infty)$$

を考える。Euler変換，Aitken加速を施した時の加速効果を表1，表2に示し，表3には，$(T_n^{(2i)} - S)/(A_n^{(i)} - S)$ の値を示す。表3より，(2.22)が漸近的に成立していることが見てとれる。表1，表2から，Aitken加速が $n$ が小さい場合でもEuler変換に優っていることがわかるが，この理由は理論的には今のところ説明出来ない。

## 表1. Euler 変換の加速効果 $\{T_n^{(i)}-S\}_n$

**The Euler Transformation**

| $n$ | $T_n^{(0)}-S$ | $T_n^{(1)}-S$ | $T_n^{(2)}-S$ | $T_n^{(3)}-S$ | $T_n^{(4)}-S$ | $T_n^{(5)}-S$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -1 | -.605 | | | | | |
| 0 | 0.395 | -.105 | | | | |
| 1 | -.312 | 0.415e-1 | -.317e-1 | | | |
| 2 | 0.265 | -.233e-1 | 0.911e-2 | -.113e-1 | | |
| 3 | -.235 | 0.153e-1 | -.399e-2 | 0.256e-2 | -.436e-2 | |
| 4 | 0.213 | -.110e-1 | 0.215e-2 | -.922e-3 | 0.818e-3 | -.177e-2 |
| 5 | -.196 | 0.843e-2 | -.131e-2 | 0.421e-3 | -.251e-3 | 0.284e-3 |
| 6 | 0.182 | -.671e-2 | 0.863e-3 | -.222e-3 | 0.994e-4 | -.757e-4 |
| 7 | -.171 | 0.550e-2 | -.605e-3 | 0.129e-3 | -.463e-4 | 0.265e-4 |
| 8 | 0.162 | -.461e-2 | 0.443e-3 | -.810e-4 | 0.241e-4 | -.111e-4 |
| 9 | -.154 | 0.394e-2 | -.336e-3 | 0.536e-4 | -.137e-4 | 0.523e-5 |
| 10 | 0.147 | -.342e-2 | 0.262e-3 | -.371e-4 | 0.827e-5 | -.271e-5 |

| $n$ | $T_n^{(6)}-S$ | $T_n^{(7)}-S$ | $T_n^{(8)}-S$ | $T_n^{(9)}-S$ | $T_n^{(10)}-S$ | $T_n^{(11)}-S$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | -.744e-3 | | | | | |
| 6 | 0.104e-3 | -.320e-3 | | | | |
| 7 | -.246e-4 | 0.397e-4 | -.140e-3 | | | |
| 8 | 0.773e-5 | -.843e-5 | 0.156e-4 | -.623e-4 | | |
| 9 | -.292e-5 | 0.240e-5 | -.301e-5 | 0.630e-5 | -.280e-4 | |
| 10 | 0.126e-5 | -.831e-6 | 0.786e-6 | -.111e-5 | 0.259e-5 | -.127e-4 |

S=0.604898643421630, double precision

## 表2 Aitken 加速の加速効果 $\{A_n^{(i)}-S\}_n$

**The Aitken $\delta^2$-Process**

| $n$ | $A_n^{(0)}-S$ | $A_n^{(1)}-S$ | $A_n^{(2)}-S$ | $A_n^{(3)}-S$ | $A_n^{(4)}-S$ | $A_n^{(5)}-S$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.395 | | | | | |
| 1 | -.312 | | | | | |
| 2 | 0.265 | 0.583e-2 | | | | |
| 3 | -.235 | -.260e-2 | | | | |
| 4 | 0.213 | 0.141e-2 | 0.117e-3 | | | |
| 5 | -.196 | -.863e-3 | -.401e-4 | | | |
| 6 | 0.182 | 0.572e-3 | 0.168e-4 | 0.168e-5 | | |
| 7 | -.171 | -.401e-3 | -.810e-5 | -.512e-6 | | |
| 8 | 0.162 | 0.294e-3 | 0.431e-5 | 0.186e-6 | 0.173e-7 | |
| 9 | -.154 | -.223e-3 | -.248e-5 | -.769e-7 | -.504e-8 | |
| 10 | 0.147 | 0.174e-3 | 0.151e-5 | 0.352e-7 | 0.169e-8 | 0.135e-9 |

## 表3 $(T_n^{(2i)}-S)/(A_n^{(i)}-S)$ の値

| $n$ | $\frac{T_n^{(2)}-S}{A_n^{(1)}-S}$ | $\frac{T_n^{(4)}-S}{A_n^{(2)}-S}$ | $\frac{T_n^{(6)}-S}{A_n^{(3)}-S}$ | $\frac{T_n^{(8)}-S}{A_n^{(4)}-S}$ | $\frac{T_n^{(10)}-S}{A_n^{(5)}-S}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1.56 | | | | |
| 3 | 1.53 | | | | |
| 4 | 1.52 | 6.99 | | | |
| 5 | 1.51 | 6.26 | | | |
| 6 | 1.51 | 5.91 | 61.9 | | |
| 7 | 1.51 | 5.72 | 48.0 | | |
| 8 | 1.51 | 5.60 | 41.6 | 903. | |
| 9 | 1.50 | 5.52 | 38.0 | 598. | |
| 10 | 1.50 | 5.47 | 35.8 | 465. | 0.193e+5 |
| $\infty$ | 1.50 | 5.25 | 28.9 | 217. | 0.206e+4 |

## §4 交代級数に対する普遍的加速法の非存在

「交代級数全体に効果のある加速法などできるわけない」という直観を数学的に定式化し，定式化された命題を証明するのがこの節の目標である．以下は本質的に[1]に負う．まず，加速法とは何か？を定義する必要がある．次の定義が妥当であろう．

加速法の定義

加速法とは，まず，次のようにして，与えられた収束数列 $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して，新しい数列 $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ を作り出す操作であり，さらに条件(*)を満足するものをいう．

($t_0$の生成)

まず，$\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ の中から，$C(0)+1$ 個の項 $S_0, S_1, \ldots, S_{C(0)}$ を取り出し，$t_0 = f_0(S_0, S_1, \ldots, S_{C(0)})$ を計算する．

⋮

($t_i$の生成)

$\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ の中から，$t_{i-1}$ の生成までに使用したデータ $S_0, S_1, \ldots, S_{C(i-1)}$ によって決まる $C(i)+1$ 個の項 $S_0, S_1, \ldots, S_{C(i)}$ を取り出し，$t_i = f_i(S_0, S_1, \ldots, S_{C(i)})$ を計算する．

⋮

【条件(*)】 $\displaystyle \lim_{i\to\infty} \frac{t_i - S_\infty}{S_{C(i)} - S_\infty} = 0$ 　ここで $\displaystyle \lim_{n\to\infty} S_n = S_\infty$

「交代級数に対する普遍的加速法の非存在」は次のような型で述べることができる．

> 任意の加速法，および，$0 \leq \lambda < 1$ なる実数 $\lambda$ に対して，ある交代級数 $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots$ が存在して，任意の $i$ について，
> $$\left| t_i - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \Big/ \left| \sum_{k=0}^{C(i)} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \geq \lambda$$

参考文献


[1] J-P. Delahaye: "Sequence Transformations," Springer-Verlag, 1988.

[2] 国重博史，中島勝也：振動的関数の数値積分法，日本数学会秋季応用数学分科会講演アブストラクト (1983), pp.135-138.

[3] K. Knopp: "Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 5-Auflage," Springer-Verlag, 1964.

[4] I.M. Longman: Note on a method for computing infinite integrals of oscillatory functions, Proc. Camb. Philos. Soc., Vol. 52(1956), pp.764-768.

[5] J.N. Lyness: Integrating some infinite oscillatory tails, J. Comput. Applied Math., Vol. 12/13 (1985), pp.109-117.

[6] 森正武："数値解析"，共立出版，1973.

[7] 室田一雄，杉原正顕： Aitken 加速に関する一つの注意，情報処理学会論文誌，Vol.25(1984), pp. 892-894.

[8] K. Nickel: Das Prae-Eulersche Limitierungsverfahren, Z. Angew. Math. Mech., Vol.63(1983), pp.465-478.

[9] 高橋秀俊：振動的関数の積分法，数理解析研究所講究録，No.483 (1983), pp.238-248.

[10] J. Wimp: "Sequence Transformations and Their Applications," Academic Press, 1981.

[11] P. Wynn: A note on the generalized Euler transformation, Comput. J., Vol.14(1971), pp.437-441.

[12] 柳原二郎："級数"，朝倉書店，1962.