

9 段数 7 次及び 7 段数 6 次陽的 Runge - Kutta 法の安定性について

田中正次、山下 茂、矢崎 寛、岩田 亨、
三吉広美、久保栄一、野崎雄一

山梨大学工学部電子情報工学科

陽的 Runge - Kutta 法の安定多項式が、近似的にその方法による数値解の集積誤差の次のステップへの伝播率（寄与率）となっていることに着目し、安定性のよい 9 段数 7 次および 7 段数 6 次陽的 Runge - Kutta 法を導いたもの。

O n t h e s t a b i l i t i e s o f t h e n i n e - s t a g e
s e v e n t h - o r d e r R u n g e - K u t t a m e t h o d a n d
t h e s e v e n - s t a g e s i x t h - o r d e r o n e

Masatsugu Tanaka, Shigeru Yamashita, Hiroshi Yazaki, Toru Iwata,
Hiromi Miyoshi, Eiichi Kubo and Yuichi Nozaki

Department of Electrical Engineering & Computer Science
Faculty of Engineering, Yamanashi University

The stability polynomial of an explicit Runge-Kutta Method is nearly the rate with which the global error for computed solution is propagated to the next step. Taking note of this fact we derive Runge-Kutta methods of two types, one is nine-stage seventh-order and the other seven-stage sixth-order.

1. まえがき

一般の常微分方程式 $y' = f(x, y)$ (1.1) を線形微分方程式

$$y' = \lambda y \quad (\lambda \text{ は複素定数}) \quad (1.2)$$

で近似しよう。いま q 段数 p 次陽の Runge-Kutta 法 (以下 q 段数 p 次法と略称する)

$$\begin{aligned} k_1 &= h_n f(x_n, y_n) \\ k_i &= h_n f(x_n + a_i h_n, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j) \quad (i=2, 3, \dots, q) \\ y_{n+1} &= y_n + \sum_{i=1}^q c_i k_i \end{aligned} \quad (1.3)$$

を (1.2) に適用すると、簡単な計算から

$$e_{n+1} = P_{q,p}(h\lambda, \gamma_{p+1}, \dots, \gamma_q) e_n + E_n \quad (1.4)$$

が得られる。ここで $y_n, y(x_n)$ はそれぞれ $x=x_n$ における数値解及び理論解、

$$e_n = y_n - y(x_n) \quad (1.5)$$

$$P_{q,p}(h\lambda, \gamma_{p+1}, \dots, \gamma_q) = \sum_{k=0}^p \frac{(h\lambda)^k}{k!} + \sum_{i=p+1}^q \gamma_i \cdot \frac{(h\lambda)^i}{i!} \quad (1.6)$$

また、 E_n はこのステップで発生する局所誤差である。

$P_{q,p}(h\lambda, \gamma_{p+1}, \dots, \gamma_q)$ は q 段数 p 次法の安定多項式と呼ばれる。(1.6) 式の各 γ_i は、公式の係数のみの関数である。(1.4) 式から、安定多項式は集積誤差の次のステップへの伝播率になっていることがわかる。

古典的な安定性の諸概念は、テスト方程式 (1.2) において $\text{Re}(\lambda) < 0$ であるとき、安定多項式の絶対値が 1 以下になる範囲を問題にするものであった。しかし、ここでは式 (1.4) に見られるように安定多項式の値が集積誤差の次のステップへの伝播率になっていることに着目し、7 段数 6 次及び 9 段数 7 次法について、安定性のよいすなわち誤差伝播特性のすぐれた公式を探す。

2. 打ち切り誤差の大小とその評価

q 段数 p 次法の $x=x_{n+1}=x_n+th$ における近似解 y_{n+1} の局所打ち切り誤差は

$$T_{n+1} = \gamma_p h^{p+1} + O(h^{p+2}) \quad (2.1)$$

と表すことができる。ここで γ_p は、次式に示すように公式の係数のみの関数 a_{pj} と、(1.1) の右辺の関数に依存する関数ベクトル $g_j(x_n, y_n)$ との積和の形で表現される。

$$\gamma_p = \sum_{j=1}^{1_p} a_{pj} g_j(x_n, y_n) \quad (2.2)$$

ここで 1_p は、微分方程式 (1.1) が単一か連立かと、公式の次数 p に依存して定まる自然数である。

我々は、 q 段数 p 次法の打ち切り誤差の大小を判定するために、その有効性について十分な実績をもつ次の二つの数量 A_{p2} 及び A_{p3} を使用する。

$$A_{p2} = \sum_{j=1}^{1_p} |a_{pj}| \quad (2.3)$$

$$A_{p3} = \sum_{j=1}^{1_p} a_{pj}^2 \quad (2.4)$$

3. 安定性の優劣と丸め誤差に関する性質の評価

q 段数 p 次法 (1.3) は,

$$|P_{q,p}(h\lambda, \gamma_{p+1}, \dots, \gamma_q)| \leq 1 \quad (3.1)$$

であるとき, その $h\lambda$ に対して絶対安定であるという. また次式によって定義される領域 S を q 段数 p 次法の絶対安定領域という.

$$S = \{h\lambda \mid |P_{q,p}(h\lambda, \gamma_{p+1}, \dots, \gamma_q)| \leq 1, h\lambda \text{ は複素数}\} \quad (3.2)$$

安定性に有効な原点を含む絶対安定領域の単連結な閉部分領域 S_e を, q 段数 p 次法の有効絶対安定領域と呼ぶことにしよう. そのとき次式によって定義される閉区間 S_I を, q 段数 p 次法の絶対安定区間という.

$$S_I = R \cap S_e = [-\alpha, 0.0] \quad (3.3)$$

ただし R は実数全体の集合である.

ここでは有界な絶対安定領域をもつ q 段数 p 次法の安定性の優劣を,

- (1) 有効絶対安定領域 S_e の面積 $A(S_e)$ の大小
- (2) 絶対安定区間の長さ α
- (3) 有効絶対安定領域の包含関係
- (4) 同じ $h\lambda$ に対する安定多項式の絶対値の大小

によって評価することにしよう.

また, 公式の丸め誤差に関する性質の良否を判定するために, やや粗雑な尺度ではあるが, 次式によって定義される数量 R を使用する.

$$R = \sum_{i=1}^q |c_i| + \sum_{i=2}^q \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}| \quad (3.4)$$

4. 9 段数 7 次法

4.1 9 段数 7 次法の安定性と新公式

Fig. 1 に 9 段数 7 次法の既知公式 (Shanks, Cooper & Verner) 及び我々が導いた新公式 (L2, KN9, KN5 及び KN1) の安定多項式のグラフを示す. 我々の導いた公式 L2, KN9, KN5 及び KN1 は, 安定多項式のグラフがそれぞれ 2 組の接線 ($y=1.0, y=-1.0$), ($y=0.9, y=-0.9$), ($y=0.5, y=-0.5$) 及び ($y=0.1, y=-0.1$) をもつ公式で, 打ち切り誤差の観点から最適化したものである.

安定多項式のグラフが ($y=1.0, y=-1.0$) を接線とする公式 L2 は, 最大絶対安定区間をもつが, その区間内に安定多項式の絶対値が 1 になる個所が 2 か所あり, $h\lambda$ がそのような値をとる刻み幅 h に対しては, ステップが進んでも集積誤差が減衰していかないという欠点をもっている. これに対して, 絶対安定区間の長さを余り変えずに公式 L2 の欠点を除去したのが, 安定多項式のグラフが ($y=0.9, y=-0.9$) を接線とする公式 KN9 である. 安定多項式のグラフが ($y=0.1, y=-0.1$) を接線とする公式 KN1 は, 絶対安定区間のほぼ全域において集積誤差の伝播率である安定多項式の絶対値が 0.1 を越えず, 誤差伝播特性の極めてよい公式である. また KN5 は, 公

式KN9と公式KN1の中間の安定特性をもつ公式である。Fig.1の観察から既知公式 Shanksや Vernerの安定特性は、我々の導出した公式に比較して著しく劣っていることがわかる。表1に既知公式及び我々の導いた公式の特性値の表を掲げる。この表から我々の導出した公式は、打ち切り精度及び安定性の両面において既知公式にまさり、丸め誤差特性にも問題がないことがわかる。

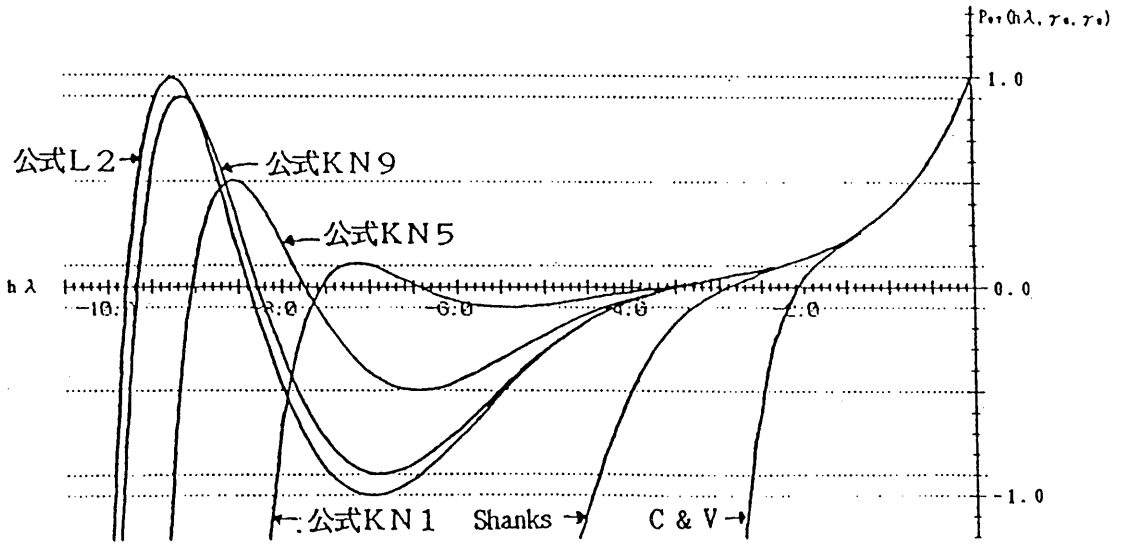


Fig.1 我々の導出した4公式と既知公式の安定多項式のグラフ

表1 各公式の特性値

公 式	A_{72}	A_{73}	α	$A(S_e)$	R
Shanks	0.149345d-02	0.167895d-06	4.4724	25.60985	0.697585d+02
C & V	0.466478d-02	0.748132d-06	2.6661	10.91974	0.218280d+02
公式L2	0.844720d-03	0.155516d-07	9.9567	42.80168	0.119528d+03
公式KN9	0.839857d-03	0.153553d-07	9.8526	46.21007	0.106993d+03
公式KN5	0.719508d-03	0.138854d-07	9.2977	49.25604	0.999913d+02
公式KN1	0.685798d-03	0.138695d-07	8.1260	51.01482	0.288230d+02

公式KN9, KN1及びKN5の係数は次の通りである.

KN1の係数

a₁ = 0.000000000000000D+00
a₂ = 9.397955555555555D-02
a₃ = 0.140969333333333D+00
a₄ = 0.211454000000000D+00
a₅ = 0.327100000000000D+00
a₆ = -0.2009640516992889D+00
a₇ = 0.667700000000000D+00
a₈ = 0.799500000000000D+00
a₉ = 1.000000000000000D+00
b₂₁ = 9.397955555555555D-02
b₃₁ = 3.524233333333333D-02
b₃₂ = 0.105727000000000D+00
b₄₁ = 5.286350000000000D-02
b₄₂ = 0.000000000000000D+00
b₄₃ = 0.158590500000000D+00
b₅₁ = 8.59708238249657232D-02
b₅₂ = 0.000000000000000D+00
b₅₃ = -3.56031502986602573D-02
b₅₄ = 0.27673232647369453D+00
b₆₁ = -0.28833731477265689D+00
b₆₂ = 0.000000000000000D+00
b₆₃ = -0.57451531731742215D+00
b₆₄ = 0.99719348992706319D+00
b₆₅ = -0.33530490953627264D+00
b₇₁ = 1.38671569993498592D+00
b₇₂ = 0.000000000000000D+00
b₇₃ = -0.44386085551647369D+00
b₇₄ = -1.88960508093464853D+00
b₇₅ = 1.91168746334374479D+00
b₇₆ = -0.29723722682760850D+00
b₈₁ = -1.23801818184482727D+00
b₈₂ = 0.000000000000000D+00
b₈₃ = 0.50430828919461095D+00
b₈₄ = 2.10671224227709496D+00
b₈₅ = -1.30665529370005391D+00
b₈₆ = 0.29825555976703351D+00
b₈₇ = 0.43489738430614175D+00
b₉₁ = 2.36003654600789966D+00
b₉₂ = 0.000000000000000D+00
b₉₃ = -0.66598723951868114D+00
b₉₄ = -4.12381283421947477D+00
b₉₅ = 3.94588319768059753D+00
b₉₆ = -0.48762346742979490D+00
b₉₇ = -0.75849793965103373D+00
b₉₈ = 0.73000173713048736D+00
c₁ = 0.12207056808754406D+00
c₂ = 0.000000000000000D+00
c₃ = 0.000000000000000D+00
c₄ = 3.10843127346588357D-02
c₅ = 0.38726270677010394D+00
c₆ = -7.62301211419619675D-03
c₇ = 0.16281907780582516D+00
c₈ = 0.23879865345202412D+00
c₉ = 6.55876932640400982D-02

KN5係数

a₁ = 0.000000000000000D+00
a₂ = 8.861377777777777D-02
a₃ = 0.1329206666666666D+00
a₄ = 0.199381000000000D+00
a₅ = 0.251941000000000D+00
a₆ = 2.26427464684788548D-02
a₇ = 0.678300000000000D+00
a₈ = 0.766100000000000D+00
a₉ = 1.000000000000000D+00
b₂₁ = 8.861377777777777D-02
b₃₁ = 3.323016666666666D-02
b₃₂ = 9.969049999999999D-02
b₄₁ = 4.984525000000000D-02
b₄₂ = 0.000000000000000D+00
b₄₃ = 0.149535750000000D+00
b₅₁ = 5.51354477350033122D-02
b₅₂ = 0.000000000000000D+00
b₅₃ = 0.11288167993410563D+00
b₅₄ = 8.39238723308910612D-02
b₆₁ = 1.53755637180921327D-02
b₆₂ = 0.000000000000000D+00
b₆₃ = 3.20123011260832071D-02
b₆₄ = -4.25334940124845891D-02
b₆₅ = 1.77883756367881041D-02
b₇₁ = -15.2638042640280952D+00
b₇₂ = 0.000000000000000D+00
b₇₃ = -0.40871509888182464D+00
b₇₄ = -13.6111815205796471D+00
b₇₅ = 10.1167849547650783D+00
b₇₆ = 19.8452159287244885D+00
b₈₁ = 1.87504544340644529D+00
b₈₂ = 0.000000000000000D+00
b₈₃ = 7.36332792127362170D-02
b₈₄ = 0.79529422019820487D+00
b₈₅ = 1.13004307506429260D-02
b₈₆ = -2.24432798243656550D+00
b₈₇ = 0.25515460886853619D+00
b₉₁ = -5.91623885429407713D+00
b₉₂ = 0.000000000000000D+00
b₉₃ = -7.80189810121319967D-02
b₉₄ = -7.79962188733113387D+00
b₉₅ = 6.61424362987063259D+00
b₉₆ = 7.99878545498833964D+00
b₉₇ = -0.90436728267028754D+00
b₉₈ = 1.08521792044865831D+00
c₁ = -0.70530316386270289D+00
c₂ = 0.000000000000000D+00
c₃ = 0.000000000000000D+00
c₄ = -1.30425464378457086D+00
c₅ = 1.48164940638561735D+00
c₆ = 1.06917429677181998D+00
c₇ = 6.1230025803178081D-02
c₈ = 0.32702046038118771D+00
c₉ = 7.04836183054706147D-02

KN9の係数

a₁ = 0.000000000000000D+00
a₂ = 8.658977777777777D-02
a₃ = 0.1298846666666666D+00
a₄ = 0.194827000000000D+00
a₅ = 0.227939000000000D+00
a₆ = 5.48945943637486118D-02
a₇ = 0.706100000000000D+00
a₈ = 0.762200000000000D+00
a₉ = 1.000000000000000D+00
b₂₁ = 8.658977777777777D-02
b₃₁ = 3.247116666666666D-02
b₃₂ = 9.741350000000000D-02
b₄₁ = 4.870675000000000D-02
b₄₂ = 0.000000000000000D+00
b₄₃ = 0.146120250000000D+00
b₅₁ = 5.05918652652535934D-02
b₅₂ = 0.000000000000000D+00
b₅₃ = 0.13202353408613444D+00
b₅₄ = 4.53236006486119668D-02
b₆₁ = 3.21013894852786514D-02
b₆₂ = 0.000000000000000D+00
b₆₃ = 6.75846925976027730D-02
b₆₄ = -8.87358025665285797D-02
b₆₅ = 4.39443148473957672D-02
b₇₁ = -8.83686512397582383D+00
b₇₂ = 0.000000000000000D+00
b₇₃ = -0.30883167898352237D+00
b₇₄ = -35.3900806014227245D+00
b₇₅ = 27.1653383555641977D+00
b₇₆ = 18.0765390488178730D+00
b₈₁ = 0.72400652832269652D+00
b₈₂ = 0.000000000000000D+00
b₈₃ = 2.70167312409076095D-02
b₈₄ = -0.13496381707863433D+00
b₈₅ = 0.97237984502175643D+00
b₈₆ = -1.03657651185019402D+00
b₈₇ = 0.21033722434346779D+00
b₉₁ = 0.14461733622086803D+00
b₉₂ = 0.000000000000000D+00
b₉₃ = 1.97566288172997400D-02
b₉₄ = -1.73408506985851014D+00
b₉₅ = 2.17173702181044117D+00
b₉₆ = 1.24381110555589462D-03
b₉₇ = -0.67380567447740364D+00
b₉₈ = 1.07053644638174894D+00
c₁ = -0.31121921673474726D+00
c₂ = 0.000000000000000D+00
c₃ = 0.000000000000000D+00
c₄ = -3.05548235680096575D+00
c₅ = 2.99139793662766678D+00
c₆ = 0.91625946126984690D+00
c₇ = 6.63270902641481410D-02
c₈ = 0.32133779821881100D+00
c₉ = 7.13792871552401947D-02

4.2 数値例と考察

数値実験は, non-stiff問題16例(単一微分方程式10例, 連立微分方程式6例), 弱stiff問題7例(単一微分方程式5例, 連立微分方程式2例)について固定刻み幅で行われた. non-stiff問題の数値実験では, ほとんどの場合について我々によって導出された公式が既知公式より高精

度であることが確認された。この結果は、表1に示した各公式の特性値（特に打ち切り精度判定基準）によく対応している。

また安定性検証のために行われた弱stiff問題に対する数値実験では、刻み幅を細かく変えて計算を行うことにより、表1に示された各公式の絶対安定区間に誤りがないことが確認された。さらに刻み幅の変動に伴う各公式による数値解の誤差が、そのときの各公式の安定多項式の変化に対応していることが観察された。参考までに一つの弱stiff問題の数値例を示そう。Fig.2は、

[例題] $y' = 100(\sin(x)-y) \quad y(0) = 0$

理論解	$y = \frac{\sin(x) - 0.01\cos(x) + 0.01e^{-100x}}{1.0001}$
-----	--

を、 $x = 0.0 \sim 5.0$ まで刻み幅 h を変えて積分したときの、 $x = 5.0$ における数値解の相対誤差の常用対数を縦軸にとり、横軸に $h\lambda$ をとってその相互関係を図示したものである。

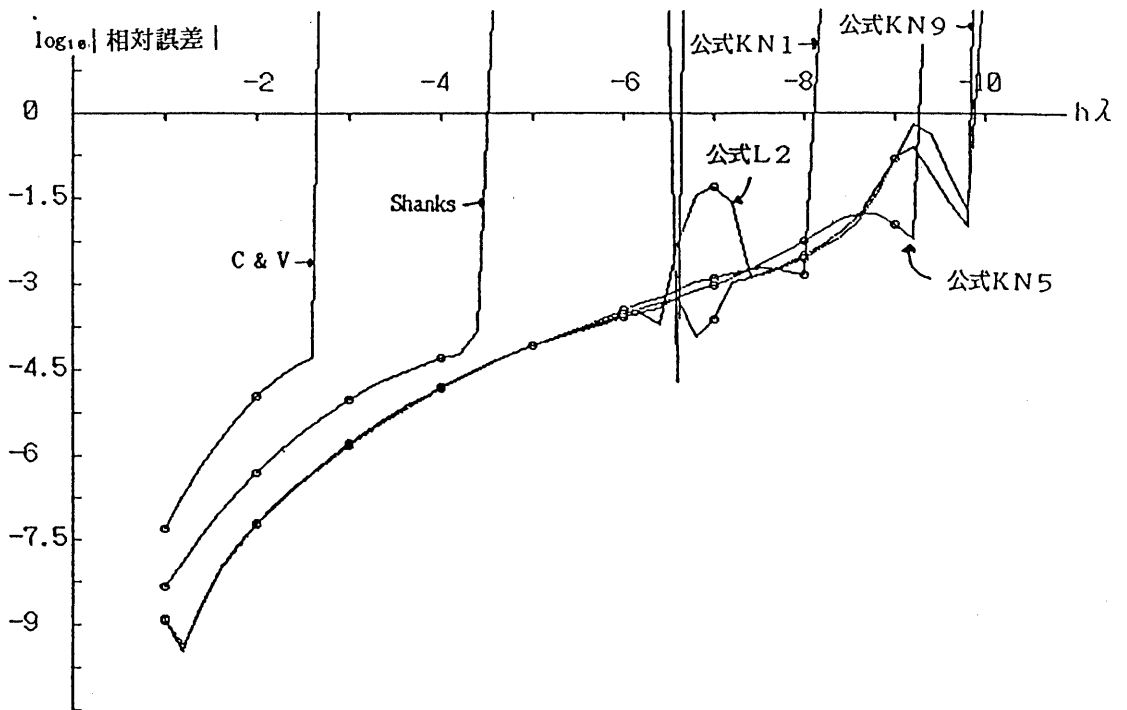


Fig.2 $y' = 100(\sin(x)-y)$, $y(0) = 0$ の $x=5.0$ における数値解の相対誤差と刻み幅 h の関係 ($\lambda = -100$ の場合)

以上の考察により、我々の導出した公式KN9、KN1及びKN5は、既知公式より打ち切り精度と安定性の両面においてまさり、丸め誤差についても問題がないので既知公式の代わりに用いて有利である。

5. 7段数6次法（紙面の関係で結論のみ示す）

9段数7次法と同様な考え方により、打ち切り精度がほぼ最良で、その安定多項式のグラフがそれぞれ $y=0.9$ 、 $y=0.5$ 及び $y=0.1$ 接する次の3公式IM9、IM5及びIM1を導いた。

IM9の係数	IM5の係数	IM1の係数
$a_1 = 0.000000000000000000D+00$	$a_1 = 0.000000000000000000D+00$	$a_1 = 0.000000000000000000D+00$
$a_2 = 0.250000000000000000D+00$	$a_2 = 0.250000000000000000D+00$	$a_2 = 0.260000000000000000D+00$
$a_3 = 0.30332456780100474998D+00$	$a_3 = 0.30190625320259716971D+00$	$a_3 = 0.29746919059398092299D+00$
$a_4 = 0.87453436120075110223D+00$	$a_4 = 0.8671772725929634374D+00$	$a_4 = 0.84358057708080945002D+00$
$a_5 = 0.663440000000000000D+00$	$a_5 = 0.662640000000000000D+00$	$a_5 = 0.894990000000000000D+00$
$a_6 = 0.571540000000000000D+00$	$a_6 = 0.576390000000000000D+00$	$a_6 = 0.933220000000000000D+00$
$a_7 = 0.100000000000000000D+01$	$a_7 = 0.100000000000000000D+01$	$a_7 = 0.100000000000000000D+01$
$b_{21} = 0.250000000000000000D+00$	$b_{21} = 0.250000000000000000D+00$	$b_{21} = 0.260000000000000000D+00$
$b_{31} = 0.11931298093767209489D+00$	$b_{31} = 0.11961148175693574213D+00$	$b_{31} = 0.12730011491583063755D+00$
$b_{32} = 0.18401158686333265510D+00$	$b_{32} = 0.18229477144566142759D+00$	$b_{32} = 0.17016907567815028544D+00$
$b_{41} = 0.35770869284827793311D+00$	$b_{41} = 0.33148000998165829402D+00$	$b_{41} = 0.10798852300575427481D+00$
$b_{42} = -0.42314314261478557001D+01$	$b_{42} = -0.41279777372626092373D+01$	$b_{42} = -0.36562872031437132728D+01$
$b_{43} = 0.47482570945003288692D+01$	$b_{43} = 0.46636749998739472870D+01$	$b_{43} = 0.43918792572187684480D+01$
$b_{51} = -0.13481614416021969832D-01$	$b_{51} = -0.13687897073649569947D-01$	$b_{51} = 0.16648572176854051065D+00$
$b_{52} = 0.82805695484239373665D+00$	$b_{52} = 0.87573250629793487554D+00$	$b_{52} = -0.60435892367299513472D+01$
$b_{53} = -0.25425881727205895072D+00$	$b_{53} = -0.30698885568597681295D+00$	$b_{53} = 0.68501955761488120049D+01$
$b_{54} = 0.10312347684568718390D+00$	$b_{54} = 0.10758424646169150736D+00$	$b_{54} = -0.78102061187401168267D-01$
$b_{61} = -0.36861707197151540163D-01$	$b_{61} = -0.36911942375994874697D-01$	$b_{61} = 0.24097569488666207120D+00$
$b_{62} = 0.13748562336635249966D+01$	$b_{62} = 0.14286504063170479921D+01$	$b_{62} = -0.81837879725928053218D+01$
$b_{63} = -0.84852113507092759655D+00$	$b_{63} = -0.90384546993784680669D+00$	$b_{63} = 0.90032804326576143503D+01$
$b_{64} = 0.10680514159011187143D+00$	$b_{64} = 0.11335370529866216883D+00$	$b_{64} = 0.20970080151161916662D-01$
$b_{65} = -0.24738532985557731355D-01$	$b_{65} = -0.24856699301868479511D-01$	$b_{65} = -0.14821823510263301638D+00$
$b_{71} = 0.19137297249581593109D+00$	$b_{71} = 0.19145500910979875621D+00$	$b_{71} = 0.76904410503040394724D-01$
$b_{72} = -0.36418397485908692270D+00$	$b_{72} = -0.36674806956124799927D+00$	$b_{72} = -0.10228076892189388451D+01$
$b_{73} = 0.90684837511659528476D+00$	$b_{73} = 0.88338279467716834403D+00$	$b_{73} = 0.15980896370339463277D+01$
$b_{74} = -0.32936286407769765771D+00$	$b_{74} = -0.33473544188062488917D+00$	$b_{74} = 0.86340970393459319940D+00$
$b_{75} = 0.28700783188182134502D+01$	$b_{75} = 0.29457492846461390537D+01$	$b_{75} = -0.11340954560528921365D+01$
$b_{76} = -0.22747428274938400857D+01$	$b_{76} = -0.23191035769912332655D+01$	$b_{76} = 0.61849939380025105974D+00$
$c_1 = 0.88184824445509818049D-01$	$c_1 = 0.87973605987063759894D-01$	$c_1 = 0.89311200561983057193D-01$
$c_2 = 0.40342966120220907273D-34$	$c_2 = 0.10344350287236130070D-35$	$c_2 = -0.10412058761843493831D-32$
$c_3 = 0.49825781330009160898D+00$	$c_3 = 0.49269948583503648526D+00$	$c_3 = 0.45125543464813881201D+00$
$c_4 = 0.15981666949280061165D-01$	$c_4 = 0.17831896089677451288D-01$	$c_4 = 0.16926840212043824678D+01$
$c_5 = 0.76929790907546664442D+00$	$c_5 = 0.78697515025982585167D+00$	$c_5 = -0.21630500348154793644D+01$
$c_6 = -0.45798640760907609476D+00$	$c_6 = -0.47162827568735953892D+00$	$c_6 = 0.83919107607733033783D+00$
$c_7 = 0.86264193838727962140D-01$	$c_7 = 0.86148137515765990803D-01$	$c_7 = 0.90608302323644689502D-01$

新公式と既知公式の特性値が表2に示される.

表2 7段6次法の公式の特性値

公 式	A_{62}	A_{63}	α	$A(s_e)$	R
Butcher (1)	8.883973D-3	5.626540D-6	2.8656	12.295	11.91
Butcher (2)	5.323707D-3	3.087794D-6	4.2061	25.110	31.73
Butcher (3)	6.758209D-3	2.255901D-6	2.8561	12.217	13.52
Butcher (4)	1.619681D-1	4.448444D-3	2.8561	12.217	80.53
Butcher (5)	1.513051D-2	2.444330D-5	2.8561	12.217	15.38
Lawson	1.966941D-2	1.936299D-4	6.4628	28.033	208.13
Shanks	1.804269D-4	2.108041D-8	2.7732	11.783	2355.30
IM9	3.471552D-3	6.537026D-7	6.4367	28.192	22.25
IM5	3.393962D-3	6.262851D-7	6.0611	29.553	22.38
IM1	3.079618D-3	4.891644D-7	5.2736	29.359	50.00

公式の誘導が正しく行われたことや、特性値に誤りがないことを立証するために、既知公式と新公式を用いて、単一微分方程式10例、連立微分方程式4例及びStiff問題1例を解き、第1ステップと最終ステップの誤差及び最大誤差を調査した。その結果、丸め誤差に問題点を持つShanksの公式を除く全ての既知公式と比べて、大半の問題において我々の新公式の方が高精度であることが確認された。この数値例の観察と表2から、新公式は既知公式に比べて安定性において著しくまさり、また打ち切り精度も良いので、既知公式の代わりに用いて有利である。本論文では、7段数6次法において、安定性を支配するパラメータ γ_7 が正の値をとる場合の最適化のみについて考慮した。その理由は、 γ_7 が負の場合 $h\lambda > 0$ の領域に小さい安定区間が生ずるが、この場合 $h\lambda < 0$ の領域の安定区間が小さく実用に耐えない。7段数6次法については別に著者達による最適化の研究があり、Lawsonの公式を安定性を変えずに打ち切り誤差の観点から最適化した公式や、打ち切り精度が最良の公式が得られていることを付記しておく。

《参考文献》

1. Butcher, J.C. : The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons (1986)
2. Butcher, J.C. : On Runge-Kutta processes of high order, J. Austral Math. Soc. Vol. 4 pp.179~194 (1964)
3. Cooper, G.J. and Verner, J.H. : Some explicit Runge-Kutta methods of high order, SIAM J. on Numerical Analysis, Vol.9, PP.389~405 (1972)
4. 村松 茂 : 9段数7次陽的Runge-Kutta法について, 山梨大学計算機科学科修士論文 (1988)
5. 篠原 由美, 田辺 博 : 9段数7次陽的Runge-Kutta法の安定性に関する研究, 山梨大学計算機科学科卒業論文 (1989)
6. 田中 正次, 山下 茂, 山下 忠志, 三村 和正 : 高次陽的Runge-Kutta法の安定性について, 京都大学数理解析研究所講究録 No.551, pp.87~115 (1985)
7. 高山 尚文 : 7段数6次陽的Runge-Kutta法について, 山梨大学計算機科学科修士論文 (1987)