

## Homotopy法を用いた固有値問題の解法

鈴木智博 樋口健 鈴木嘉彦

山梨大学工学部電子情報工学科

実非対称行列  $A$  の固有値問題,

$$Az = \lambda z$$

を大域的収束性のある非線形方程式の解法であるホモトピー法を用いて解く。ホモトピーアルゴリズムを実非対称行列の固有値問題に適用した場合、一般に行列は複素固有値を持つため、ホモトピーパスの実空間から複素空間、またはその逆への分岐現象が重要な問題となる。しかし実際にはこの分岐のメカニズムは2本のパスが重なり、そこから複素空間または実数空間へ分岐するという単純なものであり、分岐が生ずる条件も明確となっている。

またホモトピーパスのそれぞれには相互に依存性がないことから、それぞれのパスを数台のホストマシンに計算させ、計算負荷を分散させるクライアントサーバモデルによる計算方法を提案する。

**A Solution for Eigenvalue Problems  
with Homotopy Method**

Tomohiro SUZUKI, Takeshi HIGUCHI and Yoshihiko SUZUKI

Department of Electrical Engineering and Computer Science,  
Faculty of Engineering, Yamanashi University

The purpose of this paper is to solve the eigenvalue problem

$$Az = \lambda z$$

for a real nonsymmetric matrix  $A$  with the homotopy method. Because of its global convergency, the homotopy method is a convenient solution for nonlinear equations. However, in applying the method to eigenvalue problems for real nonsymmetric matrices, the bifurcation phenomenon ( a transition from real space to complex space or vice versa ) of the homotopy paths is a remarkable problem. Then, the mechanism of the bifurcation behavior is made clean in the paper. And a method using Client-Server model with more than 2 host computers is proposed for the computation of eigenvalues.

# 1. まえがき

本研究の目的は実非対称行列  $A$  の固有値問題,

$$Az = \lambda z \quad (1)$$

(ここで,  $\lambda \in \mathbb{C}$  は  $A$  の固有値,  $z \in \mathbb{C}^n$  は固有ベクトル) をホモトピー法を用いて解くことである。

固有値問題の数値解法については, ヤコビ法, ベキ乗法 (power method), QR 法, その他数多くの方法が提案されている。QR 法が比較的汎用に使われているが, QR 法が真価を發揮するのはいくつかの補助アルゴリズムを適用した場合であり, プログラミングの良否如何で性能が左右されるようなデリケートな解法であるとされている[1]。

本文で紹介するホモトピー法を用いた固有値問題の解法は基本的に行列が対称, 非対称かを問わず, 3 重対角化やヘッセンバーグ形への変換は必要でなく, 固有値が実であるか複素であるかも問題でない。

またアルゴリズムのほとんどが連立一次方程式を解く問題に帰着するため, ホモトピー法による固有値問題の解法の効率を上げるためには連立一次方程式の解法のアルゴリズムを改良すればよい。連立一次方程式の数値解法については数多くの文献があり, 最近ではベクトル計算機, 並列計算機向けの解法についての文献もある[2]ため, 今回この問題については議論しない。

ホモトピー法を用いた固有値問題の解法については最近 T.Y.Li 等により多くの成果が報告されている[3][4][5]。Li 等による実非対称行列のホモトピー法による解法では対象とする行列がヘッセンバーグ形であると仮定しているのに対し, 今回この仮定無しでもホモトピーの解の存在, 有界性等を保証することができることを示す。

そして, この解法は対象とする行列が  $n \times n$  である場合,  $n$  個の初期値から  $n$  本のホモトピーパスを追跡する問題となり, しかもこれらのパスには相互に依存性がないため  $n$  台のホストを用いた分散処理による計算方法を提案する。

## 2. ホモトピー法の概要

いま, 対象とする非線形方程式を  $f(x) = 0$  とする。ここで  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  は連続写像である。この

方程式の解を求めるために, 補助方程式  $g(x) = 0$  を導入する。  $g$  は連続で,  $g(x) = 0$  は既知な解を持つものとする。次に以下の条件を満たす連続写像  $H: \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  を導入する。

$$H(x, 0) = g(x)$$

$$H(x, 1) = f(x)$$

このような  $H$  は  $f$  と  $g$  の間のホモトピーと呼ばれる。  $H(x, t) = 0$  は  $t = 0$  の時既知な解  $g(x) = 0$  を持ち,  $t = 1$  の時対象とする方程式  $f(x) = 0$  の解を持つ。この  $H(x, t) = 0$  に対して  $t \in [0, 1]$  をパラメータとみなし,  $f(x) = 0$  の解を求めようとするのがホモトピー法である[6]。

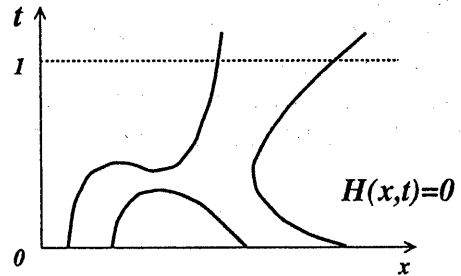


図1 ホモトピー・パス

今回, 対象とするのは実非対称行列の固有値問題であるので, 以下のように  $H$  を定義する[4]。

$$H(z, \lambda, t) = \begin{pmatrix} A(t)z - \lambda z \\ \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 - 1) \end{pmatrix} \quad (2)$$

ここで,

$$A(t) = (1-t)D + tA, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

である。また,  $D = [d_{ij}]$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) はその固有値および固有ベクトルが既知な行列である。以後この行列  $D$  を初期行列,  $A(t)$  をホモトピー行列と呼ぶ。今回は  $D$  を実対角行列とし, 重複固有値を持たないものとする。式 (2) において,

$$\frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 - 1)$$

は固有ベクトルの正規化条件である。\$t=0\$ の時、\$H\$ は既知である初期行列 \$D\$ の固有値、固有ベクトルを解に持つ。また、\$t=1\$ においては \$H\$ は \$A\$ の固有値、固有ベクトルをその解に持つ。\$t\$ をパラメータとして得られる \$H\$ の解曲線を固有パスと呼ぶ。\$H(z, \lambda, t) = 0\$ の解集合を \$t=0\$ から \$t=1\$ まで追跡することによって、\$A\$ の固有値、固有ベクトルを求めることが、ホモトピー法による固有値問題の解法の原理である。一般に \$A\$ は複素固有値を持つため、\$H\$ は \$C^n \times C \times [0, 1] \to C^{n+1}\$ で定義される。

### 3. 解析

前節の原理により \$A\$ の固有値、固有ベクトルを得るためには、\$H\$ の解集合が以下のような性質を満たしていなければならない。

1. \$H\$ の解が \$t \in [0, 1]\$ において存在する。
2. そのような解が \$t \in [0, 1]\$ において有界である。
3. そのような解が \$t \in [0, 1]\$ において連続である。

以下に上の性質が満たされていることを示す。

#### 3.1 解の存在

\$A(t) = (1-t)D + tA\$ の固有方程式を \$P(t, \lambda) = 0\$ とする。\$P(t, \lambda) = 0\$ は \$\lambda\$ の \$n\$ 次の多項式であるから、任意の \$t\$ に対して必ず解 \$\lambda\$ を持つ。

また、\$\lambda\$ をホモトピー行列 \$A(t)\$ の固有値とすると、\$\det(A(t) - \lambda I) = 0\$ より

$$A(t)z = \lambda z \quad (3)$$

を満たすような \$z \neq 0\$ が必ず存在する。

\$z' = cz\$ (\$c \in R | c \neq 0\$) とすると、\$z'\$ は式 (3) を満たす。ここで、

$$c^2 = \frac{1}{z^* z}$$

とすると、\$z'^\* z' = c^2 z^\* z = 1\$ である。(ここで、\$\*\$ は複素ベクトルの共役変換を表す) したがって、\$(z, \lambda, t) \in H^{-1}(0)\$ が必ず存在する。

#### 3.2 解の有界性

\$H^{-1}(0)\$ が非有界であるとする、\$t \in [0, 1]\$ より、\$\|z\| = \infty\$ または \$\|\lambda\| = \infty\$ であるような \$z, \lambda\$ が存在する。しかし、\$A(t)\$ の固有多項式 \$P\$ は、\$\|\lambda\| \to \infty\$ の時、\$P \neq 0\$ であるから、\$\lambda\$ は \$H\$ の解ではない。また、\$z \equiv z / \|z\|\$ とすると、

$$z_1^2 + \dots + z_n^2 = \frac{z_1^2 + \dots + z_n^2}{\|z\|^2} = \frac{1}{\|z\|^2} \neq 1$$

であるから、\$z\$ もまた \$H\$ の解ではない。したがって、\$H^{-1}(0)\$ は有界である。

#### 3.3 解の連続性

実非対称行列 \$A(t)\$ の各要素は \$t\$ の連続関数である。\$A(t)\$ の固有多項式 \$P\$ を \$\lambda\$ の多項式と考えるとその各係数は \$t\$ の連続関数であるから、\$\lambda\$ は \$t\$ の連続関数である。したがって、その固有ベクトル \$z\$ もまた \$t\$ の連続関数である。

### 4. 固有パスの追跡

ここで、固有パスの追跡方法について述べる<sup>[6]</sup>。  
\$z, \lambda, t\$ に関する \$H\$ の偏導関数をそれぞれ \$H\_z, H\_\lambda, H\_t\$ と表すと、\$DH = (H\_z, H\_\lambda, H\_t)\$ が \$(z^0, \lambda^0, t^0)\$ において full rank である時、その近傍において解集合 \$(z, \lambda, t) \in H^{-1}(0)\$ は \$(z^0, \lambda^0, t^0)\$ を通るなめらかな一次元部分多様体からなる。

以下では \$(z, \lambda, t) \in H^{-1}(0)\$ において常に上の条件が満たされている場合の固有パス追跡するアルゴリズムを示す。

step.1 \$k=0\$ とする。初期値 \$(z\_k, \lambda\_k, t\_k)\$ における接線ベクトル \$(z'\_k, \lambda'\_k, t'\_k)^T\$ を以下により求める。

$$(H_{z_k}, H_{\lambda_k}, H_{t_k}) \begin{pmatrix} z'_k \\ \lambda'_k \\ t'_k \end{pmatrix} = 0$$

$$\|(z'_k, \lambda'_k, t'_k)\| = 1$$

ただし、\$t'\_k > 0\$ とする。

step.2 きざみ幅 \$h\$ を決めて Euler 予測 を実

行する。

$$\begin{pmatrix} z_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \\ t_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_k \\ \lambda_k \\ t_k \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \dot{z}_k \\ \dot{\lambda}_k \\ \dot{t}_k \end{pmatrix}$$

step.3  $|\dot{t}_k|$  が比較的大きい場合には,  $t$  を  $t_{k+1}$  に固定し,  $z_{k+1}, \lambda_{k+1}$  を初期点として解を Newton-Raphson 法でパス上に収束させる.  $|\dot{t}_k|$  が比較的小さい場合には,  $t_{k+1}, z_{k+1}, \lambda_{k+1}$  を初期点として, 超平面

$$\dot{z}_k^T(z_k - z_{k+1}) + \dot{\lambda}_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) + \dot{t}_k(t_k - t_{k+1}) = 0$$

とパスの交点に解を Newton-Raphson 法で収束させる。

得られた解をそれぞれ,  $z_{k+1}, \lambda_{k+1}, t_{k+1}$  とする.  $t_{k+1} > 1$  ならば終了。

step.4  $k = k + 1$  とする. 接線ベクトル  $(\dot{z}_k, \dot{\lambda}_k, \dot{t}_k)^T$  を以下により求める。

$$(H_{z_k}, H_{\lambda_k}, H_{t_k}) \begin{pmatrix} \dot{z}_k \\ \dot{\lambda}_k \\ \dot{t}_k \end{pmatrix} = 0 \quad (4)$$

$$\|(\dot{z}_k, \dot{\lambda}_k, \dot{t}_k)\| = 1$$

$$(\dot{z}_{k-1}, \dot{\lambda}_{k-1}, \dot{t}_{k-1})^T (\dot{z}_k, \dot{\lambda}_k, \dot{t}_k) > 0$$

step.2 に戻る。

以上が実数パスの追跡アルゴリズムである。step.3 で  $|\dot{t}_k|$  が大きな場合と小さな場合を分けるのは,  $|\dot{t}_k|$  が大きい場合には  $(z_{k+1}, \lambda_{k+1}, t_{k+1})$  がパスに近いと考えられるので  $t$  を  $t_{k+1}$  に固定し, Newton-Raphson 法を実行しても解がパス上に収束することが期待できるが,  $|\dot{t}_k|$  が小さい場合には  $(z_{k+1}, \lambda_{k+1}, t_{k+1})$  がパスから遠いため, 上記のような超平面を導入してパスとの交点に解を収束させる必要があるためである。

$|\dot{t}_k|$  が比較的大きい場合と小さい場合の場合分けについては現在有効な判定方法がなく, プログラムを実行する際にしきい値を解が早く収束するように調整する必要がある。

$A$  が実固有値のみを持つ場合には上記のアルゴリズムを  $n$  個の初期値ごとに実行することによって  $n$  個の固有値, 固有ベクトルを得ることができる。

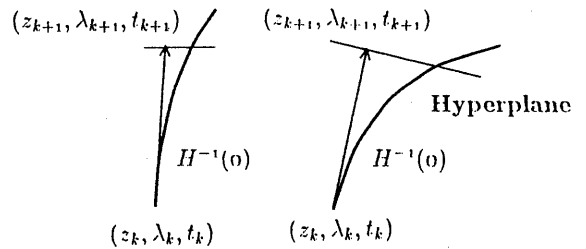


図2  $|\dot{t}|$  の大きさによる場合分け

図3に  $A$  が実固有値のみを持つ場合の固有値のパスの計算例を示す。ここで,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

とした.  $A$  の固有値は  $(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3) = (-1, -4, 4)$  である. 図3ではパスは実数平面内に限定され,  $t = 1$  まで達している。

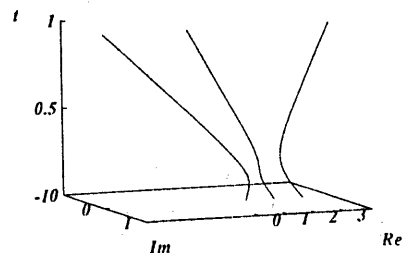


図3 実固有パス

## 5. パスの分岐現象

今回、初期行列  $D$  には、実対角行列で重複固有値を持たないという条件を設定した。対象とする行列  $A$  が複素固有値を持つ場合、 $t \in [0, 1]$  の範囲のどこかで必ずホモトピー行列  $A(t)$  は実固有値から重複固有値を経て複素固有値に変化するはずである。したがって、 $A$  が複素固有値を持つ場合には異なる初期値から出発した2つの固有パスが、 $A(t)$  が重複固有値を持つような  $t$  において一度重なり、そこから今度は複素領域に分岐していく現象が生ずる。このため、 $R^n \times [0, 1] \rightarrow R^n$  で定義されたホモトピーでは議論されなかった“複素分岐”<sup>[7]</sup>の問題が重要となる。

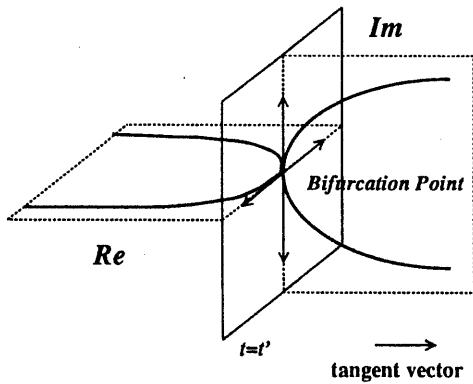


図4 複素分岐

ヤコビ行列  $(H_z, H_\lambda, H_t)$  は以下の式のように表せる。

$$(H_z, H_\lambda, H_t) = \begin{pmatrix} A(t) - \lambda I & -z & (A - D)z \\ z_1, \dots, z_n & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

上式を用いて式(4)は、

$$\begin{pmatrix} A(t) - \lambda I & -z \\ z_1, \dots, z_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (D - A)z \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

と表せる。 $A(t)$  が重根を持つような  $t$  に対して、(重複度を2とした場合)  $(H_z, H_\lambda)$  のランクは  $n$  となる。式(5)において係数行列のランクが  $n$  であることから、これが解を持つためには、 $((D - A)z, 0)^T = 0$  が必要である。いま、 $(D - A)z \neq 0$

とすると、 $i = 0$  が言える。つまり  $A(t)$  が重根を持つような  $t$  において  $i = 0$  であるような接線ベクトルが存在する。

$i = 0$  のとき式(5)を満たすような  $(z, \lambda)^T$  が存在するならば、この時  $(zi, \lambda i)^T$  もまた解である。

したがって、 $A(t)$  が重根を持つような  $t$  において  $i = 0$  ならば、この点において接線ベクトルは正と負、実数と純虚数の4つの方向に解を持つ。(図4)

先の固有パスの追跡アルゴリズムが実数パスの追跡にしか用いることができない理由は  $i = 0$  となるような点において、接線ベクトルを複素平面の方向にセットできないからである。実際に複素固有値を持つ行列を先の追跡アルゴリズムで解いた場合、異なる初期値から出発したパスが  $A(t)$  が重複固有値を持つような  $t$  で重なり、 $t = 1$  から速さがるようにお互いのパスをトレースして行く。(図5)

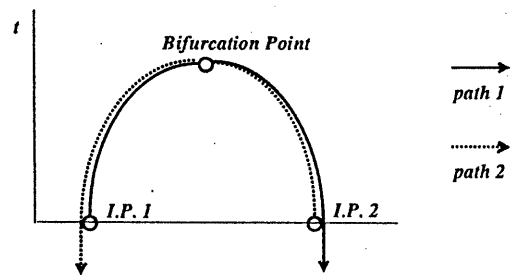


図5 互いに重なるパス

実固有パスの追跡アルゴリズムの複素領域への拡張と、分岐点を見つけるアルゴリズムを次に示す。

## 6. 分岐を考慮した複素固有パスの追跡

複素数演算を実数計算のみで行なうため、固有値、固有ベクトルをそれぞれ実部、虚部分ける。

$$\begin{cases} x = \operatorname{Re} z, & y = \operatorname{Im} z, \\ \alpha = \operatorname{Re} \lambda, & \beta = \operatorname{Im} \lambda \end{cases}$$

上式より、ヤコビ行列 ( $H_z, H_\lambda, H_t$ ) は以下の式となる。

$$\begin{pmatrix} A(t) - \alpha I & \beta I & -x & y & (A-D)x \\ -\beta I & A(t) - \alpha I & -y & -x & (A-D)y \\ x_1, \dots, x_n & -y_1, \dots, -y_n & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

4 のアルゴリズムを複素数に拡張するには、変数ベクトルに  $(x, y, \alpha, \beta, t)$ 、接線ベクトルに  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{t})^T$ 、ヤコビ行列に式 (6) を用いればよい。

また、分岐点において複素パスに分岐させるために、4 の step.4 の最後の行を「 $t_k < 0$  ならば step.5 へ、そうでなければ step.2 に戻る。」とする。step.5 は以下の通り。

**step.5** 分岐点を見極め、接線ベクトル  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{t})^T$  を  $(\dot{y}, \dot{x}, \dot{\beta}, \dot{\alpha}, \dot{t})^T$  として step.2 に戻る。

分岐点の判定アルゴリズムに現在有効なものはないが、今回は以下のようなアルゴリズムを用いた。また以下で、 $(x^i, y^i, \alpha^i, \beta^i, t^i)$ 、 $(x^j, y^j, \alpha^j, \beta^j, t^j)$  はそれぞれ step.4 で  $t_k < 0$  の条件が真になった  $i$  番目のパスと  $j$  番目のパスの状態ベクトルであり、明らかに複素分岐の生ずるパス同士であるとする。

#### 分岐点アルゴリズム

**step.1** 接線ベクトル  $(\dot{x}^i, \dot{y}^i, \dot{\alpha}^i, \dot{\beta}^i, \dot{t}^i)^T$  を  $(-\dot{x}^i, -\dot{y}^i, -\dot{\alpha}^i, -\dot{\beta}^i, -\dot{t}^i)^T$ 、 $(\dot{x}^j, \dot{y}^j, \dot{\alpha}^j, \dot{\beta}^j, \dot{t}^j)^T$  を  $(-\dot{x}^j, -\dot{y}^j, -\dot{\alpha}^j, -\dot{\beta}^j, -\dot{t}^j)^T$  とする。

**step.2** きざみ幅  $h$  を次第に小さくさせながらパスを追跡し、

$$\| (x^i - x^j, y^i - y^j, \alpha^i - \alpha^j, \beta^i - \beta^j, t^i - t^j) \| < \varepsilon$$

(ここで、 $\varepsilon$  は正の定数) ならば、

$$(x^i, y^i, \alpha^i, \beta^i, t^i) = (x^j, y^j, \alpha^j, \beta^j, t^j)$$

を分岐点とする。

以上のアルゴリズムを用いて複素固有値を持つ行列を計算した場合の例を図 6、図 7 示す。図 6 では、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

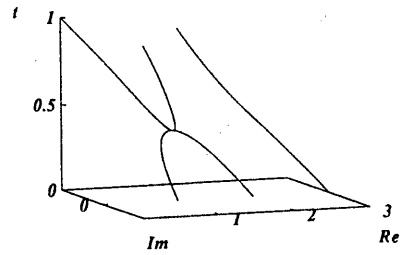


図 6 複素固有パス 1

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

とした。A の固有値は  $(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3) = (1, i, -i)$  である。図 6 で初期値 1 と 2 から出発したパスが  $t = 3.7$  付近で複素領域に分岐している。初期値 3 から出発したパスは分岐することなく、実固有値 1 に到達している。

図 7 では、

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

とした。この場合 A の固有値は  $(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5) = (1, 1.76, -1.53, -0.62 + 1.61i, -0.62 - 1.61i)$  である。図 7 では実固有値から出発したパスのすべてが複素パスへ分岐しており、また複素パスから実数パスに戻る現象も観測される。このような場合でも複素固有パスの追跡アルゴリズムが正しく実行されている。

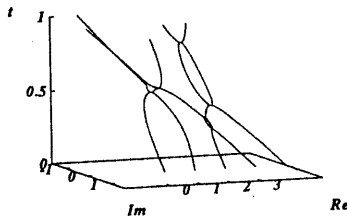


図 7 複素固有パス 2

## 7. クライアントサーバーモデルを用いた数値解法

対象とする行列  $A$  のサイズが  $n \times n$  である時に  $n$  個の固有値, 固有ベクトルを求めるために, 初期行列  $D$  の  $n$  個の固有値, 固有ベクトルを初期値として,  $n$  本の固有パスを追跡する. これら  $n$  本のパスは相互に依存関係がないのでそれぞれ独立して計算することが可能である.

今回, 以下のようなクライアントサーバーモデルを用いた計算システムを提案する.

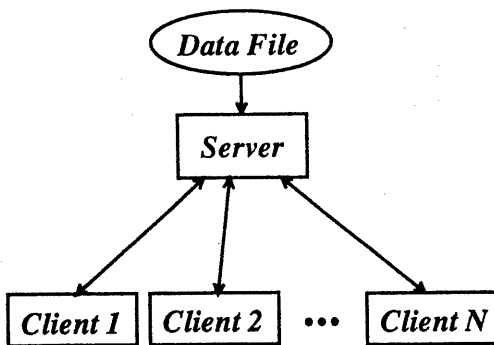


図 8 クライアントサーバーモデル

用いるデータ構造は以下の通り.

```
#define N (行列のサイズ)
```

```
typedef struct {
    int    終了フラグ [N];
    double 状態ベクトル [N];
    double 接線ベクトル [N];
} Dat;
```

サーバーはデータファイルから行列  $A$ ,  $D$  のデータを読み込み, 初期の接線ベクトルを計算した後, メモリ上に状態ベクトル  $(x, y, \alpha, \beta, t)$ , 接線ベクトル  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{t})^T$  のデータを書き込む. 次に  $n$  台のクライアントに  $n$  個の初期値を送信した後, それぞれから計算結果を受信し, メモリ上のデータを更新する.

クライアントはサーバーからデータを受信した後, パスの追跡アルゴリズムを実行し,  $t > 1$  または  $i < 0$  となったらデータをサーバーに送信する. この時,  $t > 1$  ならばデータの「終了フラグ」を立てる.

またサーバーはクライアントから受け取ったデータのうち終了フラグが立っていないものの接線ベクトルのみを変更し (step.5 の操作), 再びデータをクライアントに送り返す.

以上の操作がすべてのデータに終了フラグが立つまで続けられる.

## 8. あとがき

ホモトピー法は大域的収束性のある非線形方程式の解法として近年盛んな研究がなされている<sup>[8]</sup> <sup>[9]</sup> <sup>[10]</sup>. もともと非線形素子を含む電気回路網の動作点解析, 非線形計画法等の目的で発展した解法であるが固有値問題の解法としても盛んな研究がなされていることはすでに述べた<sup>[3]</sup> <sup>[4]</sup> <sup>[5]</sup>.

今回 T.Y.Li 等の成果をもとに実非対称行列の固有値問題に対するホモトピー関数の解析を行ない, 解法の改善を試みた. 対称が実非対称行列であることから代数的な方法によって極めて容易にホモトピー関数の性質を明らかにした.

実非対称行列の固有値問題に対するホモトピー法で最も重要な点はパスの分岐現象である. この分岐は 2 本のパスが  $i = 0$  となるような  $t$  で実数から複素数またはその逆に分岐するというシンプルなメカニズムであるが, 数値的に厳密な分岐点を

見つけるアルゴリズムを提案するにはいたっていない。

Li 等はホモトピーを用いた計算方法で、EISPACK の QR アルゴリズムを用いた場合との比較を行ない、行列のサイズが大きくなるほどホモトピーを用いる方が有利であることを示した<sup>[4]</sup>。Li 等は一台のホストによって計算を行なったが、異なる初期値から出発した固有パスにはお互いに依存性がないということを利用して、それぞれのパスを数台のホストに分散させて計算させることによってさらに計算効率が向上することが予想される。しかし同時に、複素数演算を実数計算に置き換えたためにアルゴリズム中で扱う行列のサイズが大きくなったことの影響、また対称とする行列のサイズが大きくなるとパスが分岐する回数が増えることが予想されるので、これに伴うホスト間の通信のオーバーヘッドの影響も予想される。今回実際にクライアントサーバーモデルを用いた計算結果を示すことができなかつたため、この方法による効果を実証することはできなかつた。

また、ホモトピー法を用いた解法のプロファイルを解析すると、その実に 8 割近くが接線ベクトルの計算や Newton-Raphson 法のなかで用いている連立一次方程式の解法のルーチンに費やされていることが分かる。そのためこの部分に効率の良いアルゴリズムを用いれば、全体の効率が大幅に向上することが予想される。

そしてホモトピー法を用いた解法の効率を左右する重要な問題は初期行列の選び方にある。今回は全体のアルゴリズムを簡単にするために実対角行列で重複固有値をもたない、という条件を設定した。しかし、初期行列が対象とする行列に近ければ、パス自体の長さが短くなり、分岐の回数も減少する。初期行列の選び方についての理論的な考察が望まれる。

以上課題、問題点、今回提案した計算方法の効果等は稿を改め論じたい。

## 参考文献

- [1] 戸川隼人：“マトリクスの数値解法”，オーム社（昭和 46）
- [2] 小国力：“コンピュータによる連立一次方程

式の解法”，丸善（平成 5）

- [3] T. Y. Li and N. H. Rhee：“Homotopy Algorithm for Symmetric Eigenvalue Problems”，Numer. Math., 55 (1989), pp. 265-280
- [4] T. Y. Li, Zhonggang Zeng and Luan Cong：“Solving Eigenvalue Problems of Real Nonsymmetric Matrices with Real Homotopies”，SIAM J. Numer. Anal., 29 (1992), pp. 229-248
- [5] M. T. Chu：“A Note on the Homotopy Method for Linear Algebraic Eigenvalue Problems”，Linear Algebra and its App., 105 (1988), pp. 225-236
- [6] 小島政和：“相補性と不動点”，産業図書（昭和 56）
- [7] M. E. Henderson and H. B. Keller：“Complex Bifurcation from Real Paths”，SIAM J. Math., 50 (1990), pp. 460-482
- [8] 牧野，大石，柏木，堀内：“ホモトピー法と大域的収束性”，信学技法 NLP89-42, pp. 39-44 (1989)
- [9] 牧野光則，大石進一：“ホモトピー法の無限次元への拡張”，信学論 J73-A, 3, pp. 470-477 (1990)
- [10] 鈴木嘉彦，上野敏：“幾何学的観点による非線形方程式の数値計算法”，信学論 J69-A, 1, pp. 9-16 (1986)