

FFT を用いた球面上の流体方程式の高速解法

服部啓太[†] 石黒貴之[†]
須田礼仁[†] 杉原正顯[†]

気象学の分野に現れる球面上の流体方程式の数値解法として、従来、スペクトル法と差分法が一般に利用されてきた。しかし前者は高精度だが、計算時間がかかる。逆に後者は高速に計算できるが、精度が悪い。そこで、最近、Fornberg によって高速 Fourier 変換 (FFT) を利用した高精度かつ高速な Fourier 疑似スペクトル法が提案された。本報告では、この解法を球面上の浅水方程式系に適用した結果を紹介する。特に、安定に計算するためにフィルタを用いるが、Fornberg とは異なるものを考案したので、そのフィルタの性能を評価する。

A FFT-based Solver for the Hydrodynamic Equations in Spherical Geometry

KEITA HATTORI,[†] TAKAYUKI ISHIGURO,[†] REIJI SUDA[†]
and MASAOKI SUGIHARA[†]

In meteorology, the spectral and finite difference methods are commonly used as the numerical solutions of the hydrodynamic equations in spherical geometry. Nevertheless both are not entirely satisfactory. In fact, the former, being highly accurate, is slow, whereas the latter, being fast, is lowly accurate. To improve this situation, Fornberg has recently proposed a fast and highly accurate method based on the FFT, which is called Fourier pseudospectral method. In this report we examine the applicability of Fornberg's method to the shallow water equations. We compare also the performance of three filters, Fornberg's, Merrill's, and the new one, which are used for stabilizing the computation.

1. はじめに

球面上の流体方程式の数値解法として、差分法と球面調和関数を用いたスペクトル法が、これまで広く利用されてきた。

差分法は、方程式を空間方向に離散化して解く。このとき、格子点上の空間微分はその近傍の格子点データを用いて近似される。スペクトル法は、球面上の関数を球面調和関数で展開し、そのスペクトル成分に関する方程式を解く。その際、有限個数のスペクトル成分で打ち切るが、そのスペクトル範囲において正確に計算することができるので、差分法に比べて高精度に計算できる。そのため、現在はスペクトル法が利用されるケースが多い。

しかし、差分法は格子点数に比例して計算時間が増えるのに対し、スペクトル法では、切断波数を増やす

と、その3乗に比例して計算量が増大するという欠点がある^{*}。そこで、高精度かつ高速な数値解法が求められる。

これに対して、Fornberg^{2),3)}は Fourier 疑似スペクトル法という方法を提案した。この方法は精度が高く、また、FFT を用いることで高速計算を実現している。

本報告では、Fourier 疑似スペクトル法を球面上の浅水方程式系に適用し、その有効性を調べる。また、安定に計算するためにフィルタを用いるが、これまで使われてきた Fornberg のものとは異なるものを考案したので、そのフィルタの性能も評価する。

本報告の構成は次の通りである。まず、第2節において、球面上の浅水方程式系を説明する。第3節では、浅水方程式系に Fourier 疑似スペクトル法を適用する方法を説明し、第4節で、その数値実験結果を示し、フィルタの性能を評価する。第5節において、まとめと今後の課題を述べる。

[†] 名古屋大学工学研究科計算理工学専攻

Department of Computational Science and Engineering, Graduate School of Engineering, Nagoya University

^{*} いわゆる球面調和関数変換が遅いために、このような計算量になる。現在、これを高速化する研究もすすめられている(須田1)などを参照)。

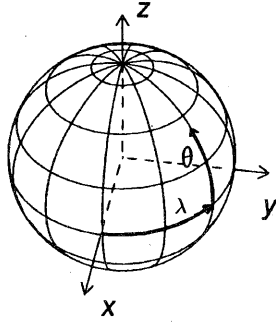


図1 球面座標系 (λ, θ)

2. 球面上の流体方程式 (浅水方程式系)

気象学分野において、地球上の流体運動を記述するもっとも基本的な方程式系として、プリミティブ方程式系がある。これは回転球面上の Navier-Stokes 方程式に対し、スケール解析を施して、近似したものである。これに、さらに流体の密度が一定である条件を加えて得られたものが浅水方程式系であり、球面上の流体計算法の性能評価の試金石としてよく用いられる。

具体的には、球面座標系 (図1) における浅水方程式系は次のようになる。

$$\frac{Du}{Dt} - \frac{uv \tan \theta}{a} - fv = -\frac{g}{a \cos \theta} \frac{\partial h}{\partial \lambda}, \quad (1)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{u^2 \tan \theta}{a} + fu = -\frac{g}{a} \frac{\partial h}{\partial \theta}, \quad (2)$$

$$\frac{Dh^*}{Dt} + h^* \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3)$$

ここで、 λ, θ および t はそれぞれ経度、緯度および時間であり、 $\mathbf{u} = {}^t(u, v)$ は流速 (u, v はそれぞれ経度、緯度成分)、 h, h^* はそれぞれ流体の高さと深さで、球面上の山の高さを h_S とすると $h = h^* + h_S$ となる。 f は $2\Omega \sin \theta$ で与えられ、 a, Ω, g はそれぞれ球面の半径、自転角速度および重力加速度である。 D/Dt および $\nabla \cdot$ は次のように定義される。

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} \equiv \frac{1}{a \cos \theta} \left[\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial (v \cos \theta)}{\partial \theta} \right]. \quad (5)$$

なお、(1)~(3) は移流形式の浅水方程式系とよばれる。

3. Fourier 疑似スペクトル法

ここでは、Fornberg^{2),3)} による Fourier 疑似スペクトル法について説明する。この方法は、いわゆる線の方法であり、空間変数のみを離散化し、時間変数 t の

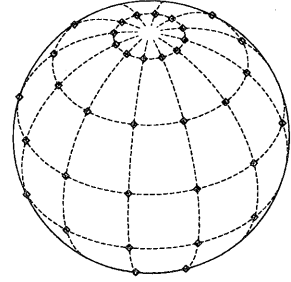


図2 格子点 (\diamond)

常微分方程式系に帰着させるものである。

3.1 空間変数の離散化

a) 球面上の格子点 (球面の分割)

λ_i, θ_j を

$$\lambda_i = i \Delta s, \quad i = 1, 2, \dots, 2N, \quad (6)$$

$$\theta_j = \left(j - \frac{N+1}{2} \right) \Delta s, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

(ここで、 $\Delta s = \pi/N$) とし、球面上に格子点 (λ_i, θ_j) ($i = 1, 2, \dots, 2N, j = 1, 2, \dots, N$) をとる (図2)。これは、図2に示すように、経度方向については $0 < \lambda \leq 2\pi$ において $2N$ 等分し、緯度方向については、 $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ において極を含まないように N 等分していることに対応している。

格子点は極を含まないので、いわゆる極問題を回避でき、また、格子点が等間隔に配置されているので、FFT を適用できるようになっている。しかし極付近で格子点が密集するので、安定に計算するためにフィルタリングなどをする必要がある (3.3 節)。

b) 離散化された方程式

浅水方程式系 (1)~(3) の空間変数を離散化すると、各格子点上で次の常微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{ij} = & -\frac{u_{ij}}{a \cos \theta_j} \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)_{ij} - \frac{v_{ij}}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)_{ij} \\ & + \left(f_j + \frac{u_{ij} \tan \theta_j}{a} \right) v_{ij} - \frac{g}{a \cos \theta_j} \left(\frac{\partial h}{\partial \lambda} \right)_{ij}, \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{ij} = & -\frac{u_{ij}}{a \cos \theta_j} \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda} \right)_{ij} - \frac{v_{ij}}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right)_{ij} \\ & - \left(f_j + \frac{u_{ij} \tan \theta_j}{a} \right) u_{ij} - \frac{g}{a} \left(\frac{\partial h}{\partial \theta} \right)_{ij}, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial h^*}{\partial t} \right)_{ij} = & -\frac{u_{ij}}{a \cos \theta_j} \left(\frac{\partial h^*}{\partial \lambda} \right)_{ij} \\ & - \frac{v_{ij}}{a} \left(\frac{\partial h^*}{\partial \theta} \right)_{ij} - \frac{h_{ij}^*}{a} \left[\frac{1}{\cos \theta_j} \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)_{ij} \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right)_{ij} - v_{ij} \tan \theta_j \right]. \quad (10) \end{aligned}$$

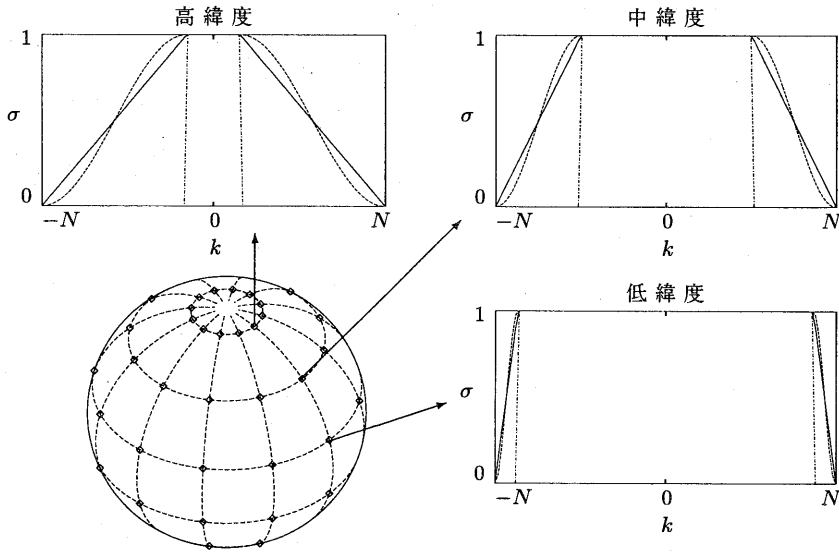


図3 フィルタ $\sigma(k, \theta_j)$: 低緯度から高緯度にかけて、除去される高次モードの個数は増加している。(一点鎖線: Fornberg フィルタ, 点線: Merrill フィルタ, 実線: 新提案フィルタ)

ここで、格子点 (λ_i, θ_j) 上の $u(\lambda, \theta)$ を、 $u_{ij} = u(\lambda_i, \theta_j)$ と記した。他も同様である。

c) 空間微分の計算

Fourier 疑似スペクトル法では、(8)~(10) の右辺に現れる $(\partial u / \partial \lambda)_{ij}$, $(\partial u / \partial \theta)_{ij}$ 等の空間微分の格子点上の値を次のように計算する。

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)_{ij} = \sum_{k=-N}^N ik \hat{u}_k(\theta_j) e^{ik\lambda_i}, \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)_{ij} = \sum_{l=-N}^N il \hat{u}_l(\lambda_i) e^{il\theta_j}. \quad (12)$$

ここで $\hat{u}_k(\theta_j)$ は、 $\theta = \theta_j$ における緯線に沿って、球面を一周する周期的格子点データ u_{ij} を離散 Fourier 変換して得られる値であり、 $\hat{u}_l(\lambda_i)$ も同様に、 $\lambda = \lambda_i$ における経線に沿って、球面を一周する周期的格子点データ u_{ij} を離散 Fourier 変換して得られる値である。

この微分の近似は、次数無限大の中心差分近似と一致し、高精度であることが Fornberg²⁾ によって示されており(付録参照)、これが Fourier 疑似スペクトル法を特徴づけている。

3.2 時間積分

以上のようにして、各格子点上で離散化された方程式(8)~(10)(常微分方程式)を、Runge-Kutta 法を用いて時間積分する。

3.3 フィルタリング

極付近で格子点が密集しているため、安定に計算で

きないことがある。そこで、Fornberg^{2),3)} は、各時刻で得られる近似解 u_{ij} の経度方向の Fourier 係数 $\hat{u}_k(\theta_j)$ に、次のようにフィルタ $\sigma(k, \theta_j)$ を掛け、安定性を確保する方法を提案した(図3)。

$$\tilde{u}_{ij} = \sum_{k=-N}^N \sigma(k, \theta_j) \hat{u}_k(\theta_j) e^{ik\lambda_i}. \quad (13)$$

具体的には、 $\sigma(k, \theta_j)$ として、Fornberg は高波数成分を $1 - \cos \theta_j$ に比例した個数、すなわち極に近づくほどより多くの高波数成分を切断するフィルタを提案した。一方 Merrill⁴⁾ は、高周波成分を滑らかに減衰させるフィルタを提案している。しかし、Fornberg のフィルタの次に素直に思いつくのは、高周波成分を直線的に減衰させるフィルタであると思われる。本報告では、これら3つのフィルタの性能も評価する。

3.4 全体の計算の流れ

以上の Fourier 疑似スペクトル法の計算の流れを図4に示す。

時間積分の1ステップあたりの演算回数は、球面調和関数を用いたスペクトル法では、 $O(N^3)$ であるのに対し、Fourier 疑似スペクトル法では、(11), (12) の Fourier 係数や右辺の和の計算、および(13)のフィルタリングに FFT を利用することで、 $O(N^2 \log N)$ となり、高速計算を実現している。

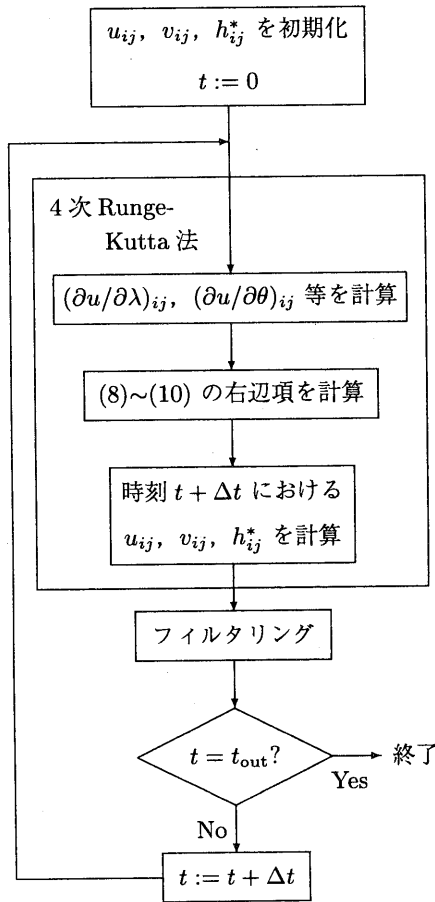


図4 Fourier 疑似スペクトル法の計算の流れの概略(時刻0から t_{out} まで, 時間刻み Δt で時間ステップさせる)

4. 数値実験

浅水方程式系(1)~(3)に Fourier 疑似スペクトル法を適用した結果を示す。

Williamson⁵⁾は球面上の浅水方程式系の数値解法に対する標準的な7つのテストケースを提案している。本研究では, 7つのうち第1, 第3および第5のケースについて数値実験を行った。

4.1 テストケース1: コサインコーンの回転

このケースはもっとも簡単なケースで, u, v を一定とし, h に関する浅水方程式系(3)のみを解く。

球面座標系 (λ, θ) を y 軸まわりに角度 α だけ回転させた座標系を (λ', θ') とする。 (λ', θ') 系において u, v を,

$$u = u_0 \cos \theta', \quad v = 0, \quad (14)$$

表1 テストケース1: 12日後の $l_2(h)$.

格子点数	64 × 32	128 × 64
時間刻み	518 sec	259 sec
Fornberg フィルタ	3.86×10^{-2}	5.24×10^{-3}
Merrill フィルタ	1.15×10^{-2}	1.49×10^{-3}
新提案フィルタ	1.15×10^{-2}	1.49×10^{-3}
(4次中心差分法)	6.12×10^{-1}	1.17×10^{-1}

表2 テストケース3: 5日後の $l_2(h)$.

格子点数	64 × 32	128 × 64
時間刻み	216 sec	54 sec
Fornberg フィルタ	3.13×10^{-5}	7.40×10^{-6}
Merrill フィルタ	1.34×10^{-6}	5.32×10^{-7}
新提案フィルタ	1.56×10^{-6}	3.92×10^{-7}

とすると, $h(=h^*)$ の厳密解 h_T は次のように書ける。

$$h_T(\lambda', \theta', t) = h(\lambda' - u_0 t/a, \theta', 0). \quad (15)$$

h の初期値に, 次のような $(\lambda, \theta) = (3\pi/2, 0)$ を中心とする“コサインコーン”を与える(図5の囲み)。

$$h = \begin{cases} h_0[1 + \cos(\pi r/R)]/2 & (r < R) \\ 0 & (r \geq R) \end{cases}. \quad (16)$$

ここで, r は (λ, θ) とコーンの中心との大円距離である。 $\alpha = \pi/2$, $u_0 = 2\pi/(12 \text{日})$ とする。このとき, コーンは形を保ったまま, 経線に沿って極を通過して, 球面上を12日で一周して元の位置に戻る。

h の誤差を, 次のように評価する。

$$l_2(h) = \frac{\sqrt{\sum_{ij} [h(\lambda_i, \theta_j) - h_T(\lambda_i, \theta_j)]^2}}{\sqrt{\sum_{ij} h_T(\lambda_i, \theta_j)^2}}. \quad (17)$$

12日後の h を図5に, $l_2(h)$ を表1に示す。このテストケースでは, フィルタによる差はあまり見られない。また, Fourier 疑似スペクトル法は差分法に比べて精度が良い。

4.2 テストケース3: 定常状態の局所帯状風

このケースでは, $h_S = 0$ ($h^* = h$) とし, 完全な浅水方程式系(1)~(3)を解く。

u, v の初期値は, 前節の回転させた座標系 (λ', θ') における緯度の限られた領域にのみ帯状風が吹いており, 中緯度でもっとも強く, 領域の外側ではまったく吹いていない状態であり, 解は定常となる。 $\alpha = \pi/3$ とする。このとき (λ, θ) 系では, 極を通過する帯状風が吹いている。

5日後の $l_2(h)$ を表2に示す。このテストケースでは, Fornberg フィルタが他のフィルタより, 一桁精度が悪い。Merrill フィルタと新提案フィルタでは, 差

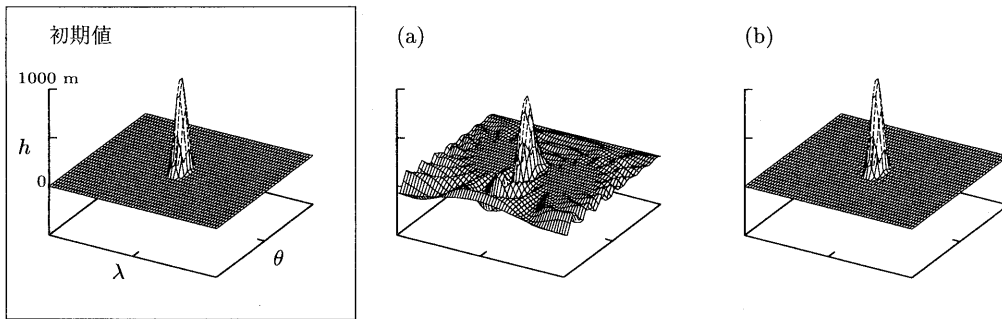


図5 テストケース1: (a) 4次中心差分法および (b) Fourier 疑似スペクトル法による12日後の h . (格子点数 64×32 , 時間刻み 518 sec)

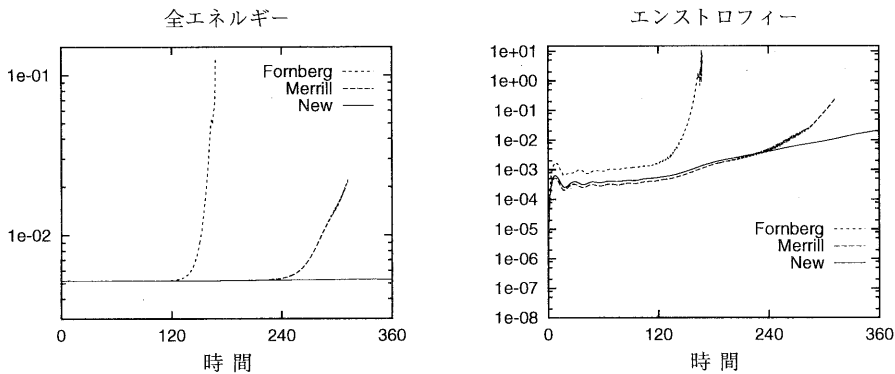


図6 テストケース5: 全エネルギーおよびエンストロフィーの時間変化。(格子点数 64×32 , 時間刻み 43.2 sec)

は見られない。

4.3 テストケース5: 山を通る帯状風

このケースはより複雑で、球面上に、次のように山を配置する。

$$h_s = \begin{cases} h_{s0}(1-r/R) & (r < R) \\ 0 & (r \geq R) \end{cases} \quad (18)$$

ここで、 $r = \sqrt{(\lambda - \lambda_c)^2 + (\theta - \theta_c)^2}$ である。 u, v の初期値は、全球面規模の帯状風とする。このケースは、山の影響で非定常になる。

このケースは厳密解が知られていないので、解法の性能を次のような積分保存量、

全エネルギー:

$$\int \left[\frac{1}{2} h^* \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2} g (h^2 - h_s^2) \right] dS, \quad (19)$$

エンストロフィー:

$$\int \frac{\eta^2}{2h^*} dS, \quad (20)$$

(ここで、 $\int dS$ は全球面での積分を表す) が保存するかどうかでチェックをすることにした。

格子点数 64×32 , 時間刻み 43.2 sec で実行し、各フィルタを比較した。Fornberg フィルタはで5日以降、Merrill フィルタは10日以降、近似解が発散し、安定に計算できなくなり、図6に示すように、保存量も急激に増大している。新提案フィルタは、15日目まで安定に計算することができ、保存量もほとんど変化しなかった。

5. まとめ

浅水方程式系に Fourier 疑似スペクトル法を適用することによって、Williamson のテストケース1, 3について、精度よく計算することができた。

フィルタの性能については、テストケース1, 3のような簡単な場合ではフィルタによる差はあまり見られなかったが、より複雑な場合のテストケース5では、違いがはっきりと現れ、新しく導入したフィルタ

によって、従来のものより安定に解くことができた。今後、フィルタの有効性に対する理論的説明について考えていきたい。

参考文献

- 1) 須田礼仁: 「高速球面調和関数変換法」, 情報処理学会研究報告, 98-HPC-73, pp. 37-42 (1998).
- 2) Fornberg, B.: *A Practical Guide to Pseudospectral Methods*, Cambridge University Press (1996).
- 3) Fornberg, B. and Merrill, D.: Comparison of Finite Difference- and Pseudospectral Methods for Convective Flow over a Sphere, *Geophysical Research Letters*, Vol. 24, pp. 3245-3248 (1997).
- 4) Merrill, D.: Finite Difference and Pseudospectral Methods applied to the Shallow Water Equations in Spherical Coordinates, Master's thesis, University of Colorado (1997).
- 5) Williamson, D. et al.: A Standard Test Set for Numerical Approximations to the Shallow Water Equations in Spherical Geometry, *Journal of Computational Physics*, Vol. 102, pp. 211-224 (1992).

付 録

ここでは、Fourier 疑似スペクトル法で用いる空間微分の近似が、次数無限大の中心差分近似と厳密に一致することを示しておく (Fornberg²⁾ による)。

簡単のため、 $u(x)$ を周期 2π の滑らかな関数とし、 N を奇数 ($2n+1$) とし、格子間隔 $2\pi/N$ の格子点 $x_i = \pi i / (n+1/2)$ (i : 整数) 上でのデータ $u(x_i)$ が与えられているとする。ここで、 $u(x)$ の周期性より、

$$u(x_j) = u(x_j + N_m), \quad m \text{ は整数}, \quad (21)$$

が成立していることに注意せよ。

Fourier 疑似スペクトル法においては、格子点 x_i 上の微分 $u'(x_i)$ を次のように近似した。

$$u'(x_i) \approx \sum_{k=-n}^n i k \hat{u}_k e^{i k x_i}, \quad (22)$$

$$\hat{u}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=-n}^n u(x_j) e^{-i k x_j}. \quad (23)$$

これが、 $u'(x_i)$ の次数無限大の中心差分近似と一致することを示す。

まず、(22) と (23) は、次のように書けることに注意する。

$$u'(x_i) \approx \sum_{j=-n}^n D_{ij} u(x_j), \quad (24)$$

$$D_{ij} = \begin{cases} 0 & (i=j) \\ \frac{(-1)^{i-j}}{2 \sin(\pi(i-j)/N)} & (i \neq j) \end{cases}. \quad (25)$$

一方、格子点 x_0 上の微分 $u'(x_0)$ の次数 p の中心差分近似は、

$$u'(x_0) \approx \sum_{j=-p/2}^{p/2} c_j^p u(x_j), \quad (26)$$

$$c_j^p = \begin{cases} 0 & (j=0) \\ \frac{N}{2\pi} \frac{(-1)^{j+1} (p/2)!^2}{j(p/2+j)!(p/2-j)!} & (j \neq 0) \end{cases}, \quad (27)$$

となるから、(26)、(27) において、 $p \rightarrow \infty$ とすると、次数無限大の中心差分近似が、次のように得られる。

$$u'(x_0) \approx \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j^\infty u(x_j), \quad (28)$$

$$c_j^\infty = \begin{cases} 0 & (j=0) \\ \frac{N}{2\pi} \frac{(-1)^{j+1}}{j} & (j \neq 0) \end{cases}. \quad (29)$$

ここで、周期性 (21) に注意すると、(28)、(29) は次のように書ける。

$$u'(x_0) \approx \sum_{j=-n}^n d_j^\infty u(x_j). \quad (30)$$

ここで、 d_j^∞ は、(21) より、

$$d_j^\infty = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{j+N_m}^\infty,$$

となるから、結局次のようになる。

$$d_j^\infty = \begin{cases} 0 & (j=0) \\ \frac{(-1)^{j+1}}{2 \sin(\pi j/N)} & (j \neq 0) \end{cases}. \quad (31)$$

以上により、周期的格子点上の任意の格子点 x_i における次数無限大の中心差分近似は次のようになることが分かる。

$$u'(x_i) \approx \sum_{j=-n}^n d_{i-j}^\infty u(x_j). \quad (32)$$

$$d_{i-j}^\infty = \begin{cases} 0 & (i=j) \\ \frac{(-1)^{i-j}}{2 \sin(\pi(i-j)/N)} & (i \neq j) \end{cases}. \quad (33)$$

これは、(24)、(25) と一致する。