

## FFT を用いた球面上の非圧縮性流体方程式の高速解法

服部 啓太<sup>†</sup> 石黒 貴之<sup>†</sup>  
須田 礼仁<sup>†</sup> 杉原 正顯<sup>†</sup>

われわれは既に, “Fornberg の方法”, すなわち, 球面上の偏微分方程式に対する Fourier 疑似スペクトル法, を球面上の圧縮性流体方程式 (浅水方程式) に適用し, 良好な結果を得ることを報告した. また, 球面上の Poisson 方程式に対する FFT を利用した高速解法, “Yee の方法” について研究し, その有効性を吟味した. 今回は, それらの研究で得られた知見をもとに非圧縮性流体方程式 (流線関数・渦度形式) に対する高精度かつ高速な数値解法を提案する. より具体的には, 流体方程式の運動方程式部分に “Fornberg の方法” を, Poisson 方程式部分に “Yee の方法” を適用する. また新しい保存スキームも考案したので紹介する.

### A FFT-based Solver for the Equations of Incompressible Fluid in Spherical Geometry

KEITA HATTORI,<sup>†</sup> TAKAYUKI ISHIGURO,<sup>†</sup> REIJI SUDA<sup>†</sup>  
and MASAAKI SUGIHARA<sup>†</sup>

We have already reported that “Fornberg’s method”, i.e., a Fourier pseudospectral method for PDE’s on a sphere, gives good results for the equations of compressible fluid on a sphere (the shallow water equations). And we have also examined thoroughly “Yee’s method”, i.e., the FFT-based fast solver of the Poisson equations on a sphere. In this note, based on the knowledge obtained through those examinations, we propose a fast and accurate solver of the equations of incompressible fluid, which consists of “Fornberg’s method” and “Yee’s method”. We also here propose a solver designed to satisfy a conservation law.

#### 1. はじめに

球面上の流体现象を表す最も基本的な方程式として, 非圧縮性流体方程式 (非発散方程式とよばれることもある) がよく知られており, 気象学や惑星物理学等の基礎研究に用いられている. この球面上の非圧縮性流体方程式の数値解法としては, 従来, 球面調和関数を用いたスペクトル法や差分法が一般に利用されて来た. しかし前者は高精度だが, 計算時間がかかる. 逆に後者は高速に計算できるが, 精度が悪い. そこで, 高精度かつ高速な数値解法が求められる.

本報告では, 我々が研究を進めてきた<sup>3),4)</sup> “Fornberg の方法”<sup>1),2)</sup> と “Yee の方法”<sup>7)</sup> に基づき, 球面上の非圧縮性流体方程式に対する高精度かつ高速な数値解法を提案する. より具体的には, 非圧縮性流体方

程式 (流線関数・渦度形式の流体方程式) は運動方程式と Poisson 方程式からなるが, 運動方程式の部分に “Fornberg の方法” を, Poisson 方程式の部分に “Yee の方法” を適用する. また, 非圧縮性流体方程式は渦度, 運動エネルギーおよびエンストロフィーの平均を保存する性質をもっており, これらの量を離散系においても保存する新しいスキームも考案したので紹介する.

本報告の構成は次の通りである. まず第 2 節において, 球面上の非圧縮性流体方程式 (流線関数・渦度形式) を説明する. 第 3 節において, 非圧縮性流体方程式 (流線関数・渦度形式) に “Fornberg の方法” および “Yee の方法” を適用する方法を述べ, 新しい保存スキームを紹介する. 第 4 節において, 数値実験結果を示し, 第 5 節において, まとめと今後の課題を述べる.

<sup>†</sup> 名古屋大学工学研究科計算理工学専攻  
Department of Computational Science and Engineering,  
Graduate School of Engineering, Nagoya University

## 2. 球面上の非圧縮性流体方程式とその保存量

### 2.1 方程式

$\lambda$  および  $\theta$  をそれぞれ経度および緯度とすると、球面座標系  $(\lambda, \theta)$  (図1) における球面上の非圧縮性流体に対する運動方程式および連続方程式は次のようになる：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{M} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{f}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{u} = (u, v)^T$  は速度ベクトル、 $p$  および  $\rho$  はそれぞれ圧力および密度、 $\mathbf{f} = f(-v, u)^T$  は Coriolis 力であり、 $\Omega$  を球面の自転角速度とすると、 $f$  は  $2\Omega \sin \theta$  で与えられる。また  $a$  を球面の半径とすると、 $\mathbf{M} = u \tan \theta / a (-v, u)^T$  は球面座標系におけるメトリック項であり、勾配演算子  $\nabla$  および発散演算子  $\nabla \cdot$  はそれぞれ次のように定義される：

$$\nabla \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^T, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a \cos \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial v \cos \theta}{\partial \theta} \right). \quad (4)$$

相対過度  $\zeta$  および絶対過度  $\eta = \zeta + f$  を導入すると、方程式 (1) および (2) は次のような過度形式によって表される：

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot (\eta \mathbf{u}) = 0, \quad (5)$$

$$\zeta = (\nabla \times \mathbf{u})_z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a \cos \theta} \left( \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{\partial u \cos \theta}{\partial \theta} \right). \quad (6)$$

(5) および (6) を 2次元非発散過度方程式と呼ぶ。

ここでさらに、流線関数  $\psi$  を導入すると、次のような流線関数・過度形式の方程式が得られる：

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = J(\eta, \psi), \quad (7)$$

$$\nabla^2 \psi = \zeta. \quad (8)$$

ここで、Jacobian  $J$  および Laplacian  $\nabla^2$  は次のように定義される：

$$J(\eta, \psi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^2 \cos \theta} \left( \frac{\partial \eta}{\partial \lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right), \quad (9)$$

$$\nabla^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (10)$$

以下、本報告ではこの流線関数・過度形式の流体方程式を考える。

### 2.2 保存量

球面上の物理量  $A$  の平均  $\bar{A}$  を

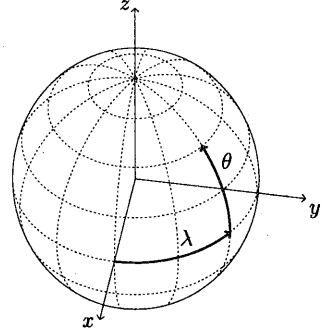


図1 球面座標系  $(\lambda, \theta)$ .

$$\bar{A} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} A(\lambda, \theta) \cos \theta d\lambda d\theta, \quad (11)$$

と定義すると、球面上の任意の関数  $\xi, \phi$  に対する Jacobian の性質

$$\overline{J(\xi, \phi)} = 0, \quad (12)$$

$$\overline{\phi J(\xi, \phi)} = 0, \quad (13)$$

$$\overline{\xi J(\xi, \phi)} = 0, \quad (14)$$

より、相対過度  $\zeta$ 、運動エネルギー  $\mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} (\nabla \psi)^2 / 2$  およびエンストロフィー  $\mathcal{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \eta^2 / 2$  の平均が保存されることが分かる：

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\zeta(\lambda, \theta, t)} = \overline{J(\eta, \psi)} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\mathcal{K}(\lambda, \theta, t)} = -\overline{\psi J(\eta, \psi)} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\mathcal{Q}(\lambda, \theta, t)} = \overline{\eta J(\eta, \psi)} = 0. \quad (17)$$

## 3. 数値解法

本報告では、流線関数・過度形式の流体方程式に対し、運動方程式 (7) の部分に“Fornbergの方法”、Poisson方程式 (8) の部分に“Yeeの方法”を適用する。以下では、それぞれの方法について説明し、また、“Fornbergの方法”を用いた保存スキームの導出を行う。

### 3.1 “Fornbergの方法”

“Fornbergの方法”すなわち Fourier 疑似スペクトル法について説明する。この方法はいわゆる“線の方法”であり、まず空間変数のみを離散化し、偏微分方程式を時間変数  $t$  の連立常微分方程式系に帰着させ、時間発展させる方法である。

#### 3.1.1 方程式の離散化

##### 1. 球面の分割

まず、図2に示すように、球面上に  $2M \times N$  個の格子点  $(\lambda_i, \theta_j)$  をとる：

$$\lambda_i = i\Delta\lambda, \Delta\lambda = \pi/M, i = 1, 2, \dots, 2M, \quad (18)$$

$$\theta_j = (j + 1/2)\Delta\theta - \pi/2, \quad \Delta\theta = \pi/N,$$

$$j = 1, 2, \dots, N. \quad (19)$$

ここで、 $\theta_j$  が極  $\theta = \pm\pi/2$  を含まないため、いわゆる“極問題”が生じないことに注意せよ。また、格子点が等間隔に配置されているので、FFTを適用できるようになっている。しかし極付近で格子点が密集するので、安定に計算するためにフィルタリングなどをする必要がある(3.1.3節)。

## II. 空間変数の離散化

次に、運動方程式(7)の空間変数を離散化し、運動方程式を時間変数  $t$  の連立常微分方程式系に帰着させる：

$$\frac{\partial \zeta_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{a^2 \cos \theta_j} \left( \frac{\partial \eta_{ij}}{\partial \lambda} \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial \theta} - \frac{\partial \eta_{ij}}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial \lambda} \right). \quad (20)$$

ここで、格子点  $(\lambda_i, \theta_j)$  上の  $\zeta(\lambda, \theta)$  を、 $\zeta_{ij} = \zeta(\lambda_i, \theta_j)$  と記した。他も同様である。

## III. 空間微分の計算

(20)に現れる  $\partial \psi_{ij}/\partial \lambda$ ,  $\partial \psi_{ij}/\partial \theta$  等の空間微分の計算を次のように行う。まず、 $\lambda$  方向の微分を

$$\frac{\partial \psi_{ij}}{\partial \lambda} \approx \delta_\lambda \psi_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-M}^M ik \hat{\psi}_k(\theta_j) e^{ik\lambda_i}, \quad (21)$$

$$\hat{\psi}_k(\theta_j) = \frac{1}{2M} \sum_{i=1}^{2M} \psi_{ij} e^{-ik\lambda_i}. \quad (22)$$

と計算する。また、 $\theta$  方向の微分を

$$\frac{\partial \psi_{ij}}{\partial \theta} \approx \delta_\theta \psi_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l=-N}^N il \hat{\psi}_l(\lambda_i) e^{il\theta_j}, \quad (23)$$

$$\hat{\psi}_l(\lambda_i) = \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{2N} \psi_{ij} e^{-il\theta_j}. \quad (24)$$

と計算する。ここで、 $\theta$  方向の Fourier 係数  $\hat{\psi}_l(\lambda_i)$  は、経線に沿った大円上の  $\psi_{ij}$  の逆離散 Fourier 変換である。 $\eta$  の微分についても同様に計算する。

この微分近似  $\delta_\lambda$ ,  $\delta_\theta$  は、次数無限大の中心差分近似と一致し、高精度であることが<sup>5</sup> Fornberg<sup>1)</sup> に示されており、これが“Fornbergの方法”を特徴づけている。

また、球面上の任意の関数  $\xi$ ,  $\phi$  に対し、上の微分近似  $\delta_\lambda$ ,  $\delta_\theta$  は次のような性質をみだす：

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{2M} \delta_\lambda \xi_{ij} \phi_{ij} = - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{2M} \xi_{ij} \delta_\lambda \phi_{ij}, \quad (25)$$

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{2M} \delta_\theta \xi_{ij} \phi_{ij} = - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{2M} \xi_{ij} \delta_\theta \phi_{ij}. \quad (26)$$

この微分近似の性質(25), (26)から保存スキームが導かれる(3.4節)。

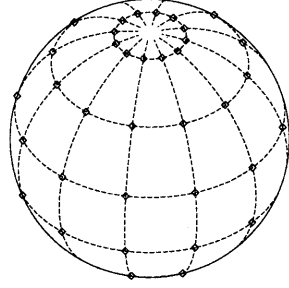


図2 格子点(◇)。

### 3.1.2 時間積分

以上のようにして、各格子点上において得られた連立常微分方程式(20)を、4次Runge-Kutta法を用いて時間積分する。

### 3.1.3 フィルタリング

極付近で格子点が密集しているため、安定に計算できないことがある。そこで、Fornberg<sup>1),2)</sup> は、各時刻で得られる近似解  $\zeta_{ij}$  の経度方向の Fourier 係数  $\hat{\zeta}_k(\theta_j)$  に、次のようにフィルタ  $\sigma(k, \theta_j)$  を掛け、安定性を確保する方法を提案した。

$$\tilde{\zeta}_{ij} = \sum_{k=-M}^M \sigma(k, \theta_j) \hat{\zeta}_k(\theta_j) e^{ik\lambda_i}. \quad (27)$$

本報告では、服部他<sup>3)</sup> で新しく提案された、高周波成分を直線的に減衰させるフィルタ(図3)：

$$\sigma = \begin{cases} 1 & : |k| \leq M \cos \theta_j \\ \frac{1 - |k|/M}{1 - \cos \theta_j} & : |k| > M \cos \theta_j \end{cases}, \quad (28)$$

を用いる。

### 3.2 “Yeeの方法”

余緯度  $\tau = \pi/2 - \theta$  を導入し、Poisson 方程式(8)を書き直すと、次のようになる：

$$\frac{1}{a^2 \sin \tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \sin \tau \frac{\partial \psi(\lambda, \tau)}{\partial \tau} \right) + \frac{1}{a^2 \sin^2 \tau} \frac{\partial^2 \psi(\lambda, \tau)}{\partial \lambda^2} = \zeta(\lambda, \tau). \quad (29)$$

Yee<sup>6),7)</sup> は、球面上のスカラー関数  $\phi(\lambda, \tau)$  が次のような二重 Fourier 級数展開：

$$\phi(\lambda, \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \phi_l^k F_l^k(\tau) e^{ik\lambda}, \quad (30)$$

$$\phi_l^k = \frac{c}{\pi} \int_0^\pi \phi^k(\tau) F_l^k(\tau) d\tau, \quad (31)$$

$$\phi^k(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\lambda, \tau) e^{-ik\lambda} d\lambda, \quad (32)$$

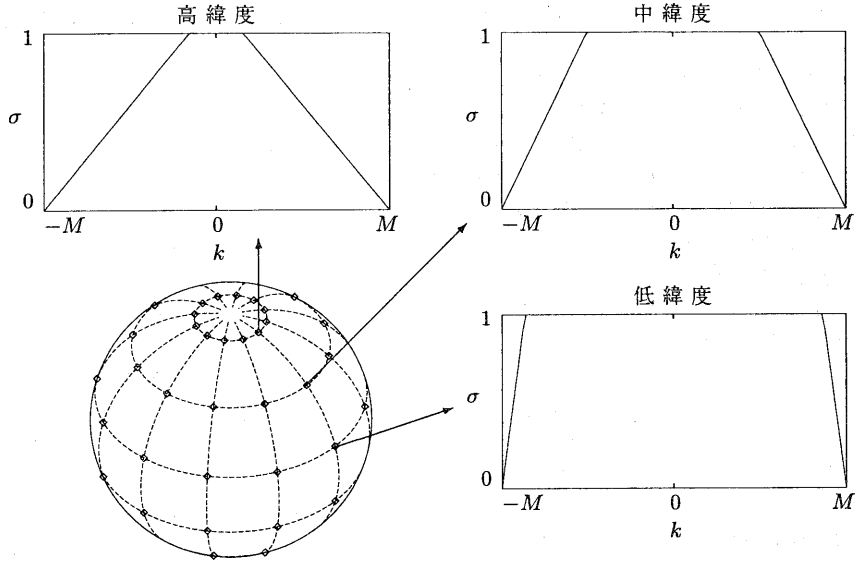


図3 フィルタ  $\sigma(k, \theta_j)$ . 低緯度から高緯度にかけて、減少させる高次モードの個数は増加している。

できることを利用して球面上の Poisson 方程式の解法を開発した。ここで、 $c$  は  $l=0$  のとき 1, それ以外は 2 であり,

$$F_l^k(\tau) = \begin{cases} \cos l\tau & : k = \text{even} \\ \sin l\tau & : k = \text{odd} \end{cases} \quad (33)$$

解法をより具体的述べるならば、まず  $\psi(\lambda, \tau)$ ,  $\zeta(\lambda, \tau)$  を二重 Fourier 級数展開し、それを Poisson 方程式 (29) に代入して、両辺で  $e^{ik\lambda}$  の係数を比較する。これにより

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} [(l+1)(l+2)\psi_{l+2}^k + (l-1)(l-2)\psi_{l-2}^k \\ & \quad - (2l^2 + 4k^2)\psi_l^k] F_l^k(\tau) - 2\psi_2^k \\ & = a^2 \left[ \sum_{l=0}^{\infty} (2\zeta_l^k - \zeta_{l-2}^k - \zeta_{l+2}^k) F_l^k(\tau) \right. \\ & \quad \left. - (-1)^k \zeta_0^k \cos 2\tau + \zeta_2^k \right], \end{aligned} \quad (34)$$

が得られる。これは  $\tau$  に関する恒等式なので、次のような連立一次方程式系が得られる：

$$p_{l-2}\psi_{l-2}^k + q_l\psi_l^k + r_{l-2}\psi_{l+2}^k = a^2 s_l^k. \quad (35)$$

ここで、 $p_l = (l-2)(l-1)$ ,  $q_l = -2l^2 - 4k^2$ ,  $r_l = (l+1)(l+2)$ ,

$$s_l^k = -\zeta_{l-2}^k + 2\zeta_l^k - \zeta_{l+2}^k \quad (l \neq 2),$$

$$s_2^k = -(1 + (-1)^k)\zeta_0^k + 2\zeta_2^k - \zeta_4^k,$$

である。

実際の計算は、連立一次方程式系 (35) において、 $k, l$  をそれぞれ  $|k| \leq M, l < N$  で打ち切つて考える。

### 3.3 計算全体の流れ

以上の、Poisson 方程式の解法に“Yee の方法”を取り入れた“Fornberg の方法”の計算の流れを図 4 に示す。

時間積分の 1 ステップあたりの演算回数は、 $M = N$  のとき、球面調和関数を用いたスペクトル法では  $O(M^3)$  であるのに対し、“Fornberg の方法”の部分は  $O(M^2 \log_2 M)^3$ ，“Yee の方法”の部分も同様に  $O(M^2 \log_2 M)^4$  であり、全体で  $O(M^2 \log_2 M)$  となり、高速計算を実現している。

### 3.4 保存スキームの設計

ここでは、“Fornberg の方法”における空間微分近似 (21), (23) を用いて、保存則 (15)~(17) を離散系においても保持するような Jacobian の近似を考える。ただし、以下の議論においては、丸め誤差が存在しないことを仮定する。

Jacobian の近似として、次のようなものが考えられる：

$$J(\eta_{ij}, \psi_{ij}) \approx J_{ij}^{(n)}(\eta, \psi), \quad n = 1, 2, 3, \quad (36)$$

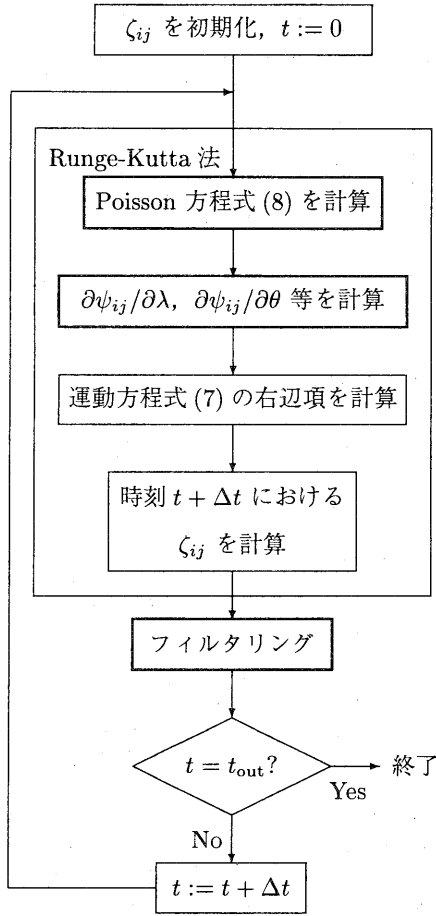


図4 計算全体の流れ。時刻0から $t_{out}$ まで、時間刻み $\Delta t$ で時間ステップさせる。また太枠の部分にFFTが使われている。

$$J_{ij}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} w_j (\delta_\lambda \eta_{ij} \delta_\theta \psi_{ij} - \delta_\theta \eta_{ij} \delta_\lambda \psi_{ij}), \quad (37)$$

$$J_{ij}^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} w_j \{ \delta_\lambda (\eta \delta_\theta \psi)_{ij} - \delta_\theta (\eta \delta_\lambda \psi)_{ij} \}, \quad (38)$$

$$J_{ij}^{(3)} \stackrel{\text{def}}{=} w_j \{ \delta_\theta (\psi \delta_\theta \eta)_{ij} - \delta_\lambda (\psi \delta_\lambda \eta)_{ij} \}. \quad (39)$$

ここで、 $w_j = 1/(a^2 \cos \theta_j)$ である。これらと、微分近似 $\delta_\lambda$ 、 $\delta_\theta$ の性質(25)および(26)から、次のような関係が導かれる：

$$I[J^{(1)}] = I[J^{(2)}] = I[J^{(3)}] = 0, \quad (40)$$

$$I[\psi J^{(2)}] = 0, \quad I[\psi J^{(3)}] = -I[\psi J^{(1)}], \quad (41)$$

$$I[\eta J^{(3)}] = 0, \quad I[\eta J^{(1)}] = I[\eta J^{(2)}]. \quad (42)$$

ここで、 $I[\xi]$ は、次のような、球面上の平均 $\bar{\xi}$ の近似である：

$$I[\xi] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{2M} \xi_{ij} \cos \theta_j \Delta \lambda \Delta \theta. \quad (43)$$

したがって、Jacobianの近似を改めて、

$$J(\eta_{ij}, \psi_{ij}) \approx \bar{J}_{ij}(\eta, \psi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{J_{ij}^{(1)} + J_{ij}^{(2)} + J_{ij}^{(3)}}{3} \quad (44)$$

とすると、これに対応する相対渦度、運動エネルギーおよびエンストロフィーの平均 $I[\zeta]$ 、 $I[\mathcal{K}]$ および $I[\mathcal{Q}]$ をとともに保存することが分かる：

$$\frac{\partial}{\partial t} I[\zeta] = I[\bar{J}(\eta, \psi)] = 0, \quad (45)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} I[\mathcal{K}] = -I[\psi \bar{J}(\eta, \psi)] = 0, \quad (46)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} I[\mathcal{Q}] = -I[\eta \bar{J}(\eta, \psi)] = 0. \quad (47)$$

#### 4. 数値実験

本報告では、厳密解が分かっており、数値解法の性能評価としてよく使われる Rossby-Haurwitz 波<sup>5)</sup> に対する数値実験を行う。

初期値は次のように与えられる：

$$\zeta(\lambda, \theta, 0) = 2\omega \sin \theta - (1+R)(2+R)K \sin \theta \cos^R \theta \cos R\theta. \quad (48)$$

ここで、 $R$ は東西方向の波数を表し、 $\omega$ および $K$ はともに定数である。このとき渦度方程式(7)、(8)は次のような厳密解 $\zeta_*$ をもつ：

$$\zeta_*(\lambda, \theta, t) = \zeta(\lambda - \nu t, \theta, 0). \quad (49)$$

ここで、角速度 $\nu$ は次のようになる：

$$\nu = \frac{R(3+R)\omega - 2\Omega}{(1+R)(2+R)}.$$

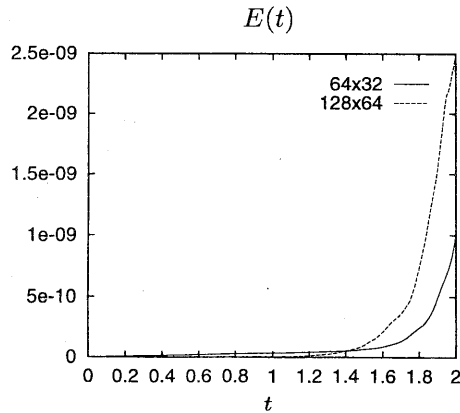


図5 格子点数 $64 \times 32$ および $128 \times 64$ の場合の誤差評価。

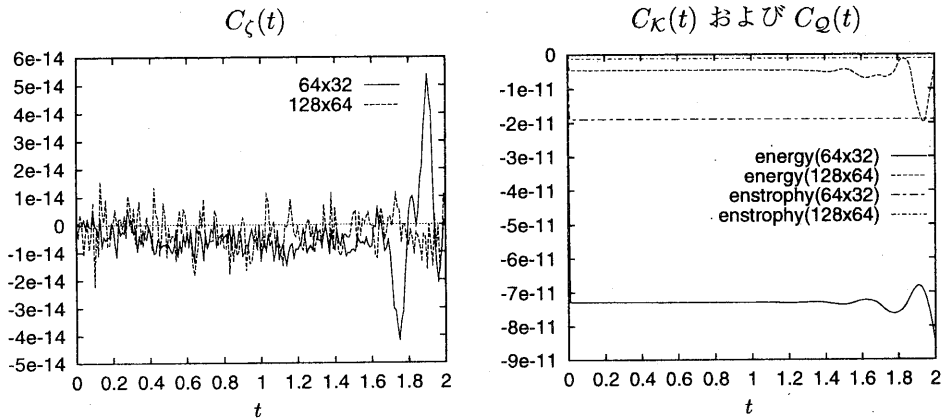


図6 格子点数  $64 \times 32$  および  $128 \times 64$  の場合の渦度、運動エネルギーおよびエンストロフィーに対する保存量評価。

本報告では  $a = 1$ ,  $\Omega = 50$ ,  $R = 4$ ,  $\omega = K = 5$  とする。

誤差については次のような量を評価する：

$$E(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sqrt{I[\{\zeta(\lambda, \theta, t) - \zeta_*(\lambda, \theta, t)\}^2]}}{\sqrt{I[\zeta_*(\lambda, \theta, t)]^2}}. \quad (50)$$

また、保存量評価については次のような量を評価する：

$$C_\zeta(t) \stackrel{\text{def}}{=} I[\zeta(\lambda, \theta, t)], \quad (51)$$

$$C_K(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{I[\mathcal{K}(\lambda, \theta, t)] - I[\mathcal{K}(\lambda, \theta, 0)]}{I[\mathcal{K}(\lambda, \theta, 0)]}, \quad (52)$$

$$C_Q(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{I[\mathcal{Q}(\lambda, \theta, t)] - I[\mathcal{Q}(\lambda, \theta, 0)]}{I[\mathcal{Q}(\lambda, \theta, 0)]}. \quad (53)$$

ただし、相対渦度  $\zeta$  の平均  $\bar{\zeta}$  は常にゼロであるため、(51) では規格化を行っていない。

Jacobian の近似に  $J^{(1)}$  (37) を用いて、格子点数  $64 \times 32$  ( $M = N = 32$ ) および  $128 \times 64$  ( $M = N = 64$ ) に対し、それぞれ時間刻み  $0.001$  および  $0.0005$  で時間積分を行った。誤差評価 (50) を図 5、保存量評価 (51)~(53) を図 6 に示す。

なお保存スキーム (44) に対する数値実験は、本報告の執筆の時点で間に合わなかったため、次の機会に譲る。

## 5. まとめ

“Fornberg の方法” と “Yee の方法” を組み合わせることで、球面上の非圧縮性流体方程式（流線関数・渦度形式）を高精度かつ高速に解くことができた。今後は乱流などのより複雑なケースにも適用し、その有効性を検証していきたい。

## 謝 辞

本報告の一部は日本学術振興会未来開拓学術研究推進事業による。

## 参 考 文 献

- 1) Fornberg, B.: *A Practical Guide to Pseudospectral Methods*, Cambridge University Press (1996).
- 2) Fornberg, B. and Merrill, D.: Comparison of Finite Difference- and Pseudospectral Methods for Convective Flow over a Sphere, *Geophysical Research Letters*, Vol. 24, pp. 3245–3248 (1997).
- 3) 服部啓太, 石黒貴之, 須田礼仁, 杉原正顯: FFT を用いた球面上の流体方程式の高速解法, 情報処理学会研究報告, Vol. 99-HPC-76, pp. 31–36 (1999).
- 4) 石黒貴之, 服部啓太, 須田礼仁, 杉原正顯: 球面上の Poisson 方程式の高速解法, 情報処理学会研究報告, Vol. 98-HPC-77, pp. 1–6 (1999).
- 5) Williamson, D. et al.: A Standard Test Set for Numerical Approximations to the Shallow Water Equations in Spherical Geometry, *Journal of Computational Physics*, Vol. 102, pp. 211–224 (1992).
- 6) Yee, S. Y. K.: Studies on Fourier Series on Spheres, *Monthly Weather Review*, Vol. 108, pp. 676–678 (1980).
- 7) Yee, S. Y. K.: Solution of Poisson's Equation on a Sphere by Truncated Double Fourier Series, *Monthly Weather Review*, Vol. 109, pp. 501–504 (1981).