

二重 Fourier 級数展開を用いた 球面上の非圧縮性流体方程式の高速解法

石黒 貴之[†] 服部 啓太[†]
須田 礼仁[†] 杉原 正顯[†]

球面上の流体現象を表す最も基本的な方程式として非発散方程式があり、気象学や惑星物理学等の基礎研究に用いられている。我々は既に、非発散方程式に”Fornberg の方法”²⁾と”Yee の方法”^{5,7)}を適用し、簡単なテストケースに対しては良好な結果を得ることを報告した^{8,9)}。本報告では、二重 Fourier 級数展開を用いた非発散方程式の数値解法を提案する。乱流モデルに対して実験を行った結果、球面調和関数法と比較して、計算時間を短縮しつつ、渦度の分布、保存量等同様な結果が得られたので報告する。また球面調和関数法で用いられる超粘性に代わるフィルターを考案したので紹介する。

A Fast Solution for Incompressible Navier-Stokes Equation on a Sphere by Truncated Double Fourier Series

TAKAYUKI ISHIGURO,[†] KEITA HATTORI,[†] REIJI SUDA[†]
and MASAOKI SUGIHARA[†]

The incompressible Navier-Stokes equation on a sphere is most fundamental and widely used as a model equation in meteorology. In our previous work, applying the combination of the Fornberg method and the Yee method to the equation, we showed that good results are obtained for a simple test case. In this note we propose a fast and accurate solver, that is to say, the spectral method based on the double Fourier series together with a new filter that is for stabilizing the computations. Through the numerical experiment on the two-dimensional decaying turbulence on a rotating sphere, we demonstrate that the proposed method is comparable to the spectral method based on spherical harmonics, which is regarded as a standard numerical method.

1. はじめに

球面上の流体現象を表す方程式として、プリミティブ方程式、浅水方程式等があるが、本報告では最も基本的な方程式である非発散方程式(非圧縮性流体方程式)を取り扱う。球面上の非発散方程式は気象学や惑星物理学等の基礎研究に用いられている。この球面上の非発散方程式の数値解法としては、従来球面調和関数を用いたスペクトル法や差分法が一般に利用されている。しかし、前者は高精度であるが計算時間がかかる。逆に後者は高速に計算できるが精度が悪い。そこで高速かつ高精度な数値解法が求められている。

我々は既に、非発散方程式に FFT に基づく数値解法、すなわち、”Fornberg の方法”²⁾と”Yee の方法”^{5,7)}を用いる方法を適用し、簡単なテストケースに対しては良好な結果を得ることを報告した^{8,9)}。

本報告では、非発散方程式、特に流線関数、渦度を用い

て表した非発散渦度方程式(運動方程式と Poisson 方程式より成る)に対する二重 Fourier 級数展開⁶⁾を用いた高速かつ高精度な数値解法を提案する。具体的には、運動方程式の計算に二重 Fourier 級数展開を用いたスペクトル法を使い、Poisson 方程式の解法に二重 Fourier 級数展開を用いたスペクトル法、すなわち”Yee の方法”^{5,7)}を用いる。計算量は、いわゆる切断波数を N とすると、1 タイムステップ当たり、FFT を用いることによって $O(N^2 \log N)$ となり、球面調和関数を用いたスペクトル法の $O(N^3)$ に比べ高速計算を可能にしている。また、数値的安定性のために球面調和関数を用いたスペクトル法で用いられる超粘性と同様な性質を持つフィルターを提案する。

本稿の構成は次の通りである。まず第 2 節において回転球面上の非発散渦度方程式および二重 Fourier 級数展開について説明する。第 3 節では運動方程式、Poisson 方程式の具体的な数値解法を説明し、さらに今回提案する新しいフィルターを紹介する。第 4 節において、数値実験として球面調和関数を用いたスペクトル法と比較した結果を示し、第 5 節で、まとめと今後の課題を述べる。

[†]名古屋大学工学研究科計算理工学専攻
Department of Computational Science and Engineering,
Graduate School of Engineering, Nagoya University

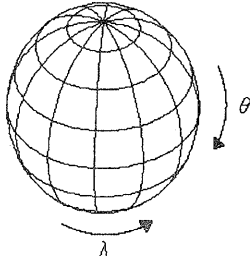


図1 極座標.

本稿では、以下、二重 Fourier 級数展開を用いたスペクトル法を二重 Fourier 級数展開法、球面調和関数を用いたスペクトル法を球面調和関数法と呼ぶことにする。

2. 回転球面上の非発散渦度方程式と二重 Fourier 級数展開

本節では回転球面上の非発散方程式の渦度形式について説明し、球面上の関数の展開の一つである二重 Fourier 級数展開について説明する。

2.1 非発散渦度方程式

図1に示すように経度方向を θ 、緯度方向を λ とするとき、球面座標系における回転球面上の無次元化された非発散渦度方程式は次のように与えられる。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = J(\psi, \omega) - 2\Omega \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \quad (1)$$

$$\omega = \nabla^2 \psi. \quad (2)$$

ここで、 $\omega(\theta, \lambda)$ は渦度、 $\psi(\theta, \lambda)$ は流線関数、 Ω は自転速度であり、 $J(\psi, \omega)$ 、 ∇^2 は次で与えられる。

$$J(\psi, \omega) = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \theta},$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}. \quad (3)$$

以下、本報告ではこの非発散渦度方程式について考える。又、便宜上、(1) 式を運動方程式、(2) 式を Poisson 方程式と呼ぶことにする。

2.2 二重 Fourier 級数展開

$\omega(\theta, \lambda)$ や $\psi(\theta, \lambda)$ のような球面上のスカラー関数は次のように二重 Fourier 級数展開出来ることが知られている⁶⁾。ここでは $\omega(\theta, \lambda)$ についてのみその表現を示す。 $\psi(\theta, \lambda)$ も同様である。

$$\omega(\theta, \lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \omega_m(\theta) e^{im\lambda}, \quad (4)$$

$$\omega_m(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \omega_{l,m} B_l^m(\theta). \quad (5)$$

$$\omega_{l,m} = \frac{s_l}{\pi} \int_0^\pi \omega_m(\theta) B_l^m(\theta) d\theta, \quad (6)$$

$$\omega_m(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(\theta, \lambda) e^{-im\lambda} d\lambda. \quad (7)$$

ここで s_l 、 $B_l^m(\theta)$ は次の通りである。

$$s_l = \begin{cases} 1 & l = 0 \\ 2 & l \neq 0 \end{cases},$$

$$B_l^m(\theta) = \begin{cases} \cos l\theta & m = \text{even} \\ \sin l\theta & m = \text{odd} \end{cases}$$

3. 数値解法

本節では具体的な数値解法を説明する。大雑把には $\omega(\theta, \lambda)$ 、 $\psi(\theta, \lambda)$ の二重 Fourier 級数展開を有限の範囲で切断し (具体的には l は $0 \leq l \leq T_l$ 、 m は $-T_m \leq m \leq T_m$ の範囲)、切断した展開式を (1)、(2) 式に代入して、展開係数が満たすべき方程式をたて、それを解く。まず 3.1 節では Poisson 方程式の解法について述べる。3.2 節で運動方程式の計算方法を述べる。3.3 節では、今回提案する超粘性に代わるフィルターを紹介する。

ここで、 T_m 、 T_l をそれぞれ東西、南北方向の切断波数と呼ぶ。

3.1 Poisson 方程式の解法

$\omega_{l,m}$ ($0 \leq l < +\infty$, $-\infty < m < +\infty$) が既知であるときに Poisson 方程式 (2) 式を解き、 $\psi_{l,m}$ ($0 \leq l < +\infty$, $-\infty < m < +\infty$) を求めることを考える。まず (2) 式において $\omega(\theta, \lambda)$ 、 $\psi(\theta, \lambda)$ に (4) 式を代入し、両辺で $e^{im\lambda}$ の係数を比較する。これにより

$$\omega_m''(\theta) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \omega_m'(\theta) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \omega_m(\theta) = \psi_m(\theta),$$

が得られる。さらに (5) 式を代入して、係数を比較することによって、結局次のような連立一次方程式に帰着される。

$$a_l \psi_{l-2,m} + b_{l,m} \psi_{l,m} + c_l \psi_{l+2,m} = h_{l,m}. \quad (8)$$

ここで

$$a_l = (l-2)(l-1),$$

$$b_{l,m} = -2l^2 - 4m^2,$$

$$c_l = (l+2)(l+1),$$

$$h_{l,m} = -\psi_{l-2,m} + 2\psi_{l,m} - \psi_{l+2,m} \quad (l \neq 2),$$

$$h_{2,m} = -d_m \psi_{0,m} + 2\psi_{2,m} - \psi_{4,m} \quad (l = 2).$$

ただし m が偶数の時 $d_m = 2$ 、奇数の時 $d_m = 0$ 。

実際の計算は連立一次方程式 (8) 式において、 l 、 m をそれぞれ $0 \leq l \leq T_l$ 、 $-T_m \leq m \leq T_m$ でうち切つて考える。このとき、 $T_l \times T_l$ の三重対角行列を $2T_m$ 回解くことになる。 $T_l = T_m = N$ とした時、 $\omega_{l,m}$ から $\psi_{l,m}$ を求めるのに必要な計算量は $O(N^2)$ である。

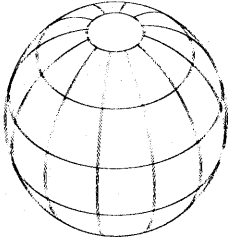


図2 球面の分割.

3.2 運動方程式の計算法

(1) 式において非線形項を $N(\theta, \lambda)$ とし, (1) 式を二重 Fourier 級数展開係数に関する方程式にすると,

$$\frac{\partial \omega_{l,m}}{\partial t} = N_{l,m} - 2im\Omega\psi_{l,m} \quad (9)$$

$(0 \leq l \leq T_l, -T_m \leq m \leq T_m),$

となる. この方程式を 4 次 Runge-Kutta 法を用いて時間積分して波数成分 $\omega_{l,m}$ を求める.

(9) 式の $N_{l,m}$ の求め方を考える. $N_{l,m}$ は非線形なので, 波数成分でそのまま計算しようとするると 1 タイムステップあたり $O(N^4)$ の計算量がかかる. そこで実空間のグリッド上で, それぞれの点の微分値

$$\frac{\partial \omega(\theta_j, \lambda_k)}{\partial \lambda}, \frac{\partial \omega(\theta_j, \lambda_k)}{\partial \theta}, \frac{\partial \psi(\theta_j, \lambda_k)}{\partial \lambda}, \frac{\partial \psi(\theta_j, \lambda_k)}{\partial \theta},$$

を計算し, 非線形項 $N(\theta_j, \lambda_k)$ を求めて波数成分 $N_{l,m}$ に戻す. この計算は FFT を用いることで高速に計算することが出来る.

具体的に説明する. 実空間での計算で, 極問題を避けるために, すなわち, グリッド上で $\sin \theta = 0$ とならないように, 図 2 のように極 ($\theta = 0, \pi$) を含まないように南北方向に L 等分, 東西方向に $2M$ 等分し, グリッドを次のよう定義する.

$$\theta_j = (j + \frac{1}{2})\pi/L \quad (0 \leq j < L),$$

$$\lambda_k = k\pi/2M \quad (0 \leq k < 2M).$$

このときグリッド点上でのそれぞれの微分値は切断された (4) 式を用いて次のように簡単に求めることが出来る³⁾.

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \omega(\theta_j, \lambda_k) = \sum_{m=-T_m}^{T_m} \sum_{l=0}^{T_l} im\omega_{l,m} B_l^m(\theta_j) e^{im\lambda_k}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \omega(\theta_j, \lambda_k) = \sum_{m=-T_m}^{T_m} \sum_{l=0}^{T_l} \omega_{l,m} (B_l^m(\theta_j))' e^{im\lambda_k}. \quad (11)$$

この値を用いて, 次の非線形項のグリッド点上の値を求める.

$$N(\theta_l, \lambda_k) = -\frac{1}{\sin \theta_j} \frac{\partial \psi(\theta_j, \lambda_k)}{\partial \lambda} \frac{\partial \omega(\theta_j, \lambda_k)}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta_j} \frac{\partial \omega(\theta_j, \lambda_k)}{\partial \lambda} \frac{\partial \psi(\theta_j, \lambda_k)}{\partial \theta}. \quad (12)$$

最後に (6), (7) 式を離散化した次の式を用いて $N_{l,m}$ を求める.

$$N_{l,m} = \frac{c}{2ML} \sum_{k=0}^{2M-1} \sum_{j=0}^{L-1} N(\theta_j, \lambda_k) B_l^m(\theta_j) e^{-im\lambda_k}. \quad (13)$$

(10), (11), (13) 式は FFT を用いて高速に計算でき, $M = L = N, T_m = T_l = 2N/3$ * とするとき, 計算量は $O(N^2 \log N)$ である.

なお, 極付近ではグリッドが集中しているので, これが計算不安定性を起こす原因となる. そこで次のような極域フィルターを掛ける.

$$\omega_m(\theta_j) = \sigma_m(\theta_j) \omega_m(\theta_j). \quad (14)$$

ただし

$$\sigma_m(\theta_j) = \begin{cases} 1 & m \leq T_m \sin \theta_j \\ 0 & m > T_m \sin \theta_j \end{cases}$$

3.3 超粘性に代わるフィルター

(1) 式は非線形項を含むためエイリアシング誤差があり, 高周波成分にエネルギーが移る. このため時間積分を繰り返していくうちに切断周波数付近にエネルギーがたまってしまい計算が不可能になることがある.

この現象をくい止めるために, 球面調和関数法では, (1) 式に超粘性と言われる $-\nu_p \nabla^{2p} \omega(\theta, \lambda)$ ($p = 2, 4, 8, \dots$) という項を付加して考える. この超粘性項はエネルギーを出来るだけ減少させずに, 球面調和関数の高周波成分を効果的にダンプさせる効果がある.

しかし二重 Fourier 級数展開の場合には, 超粘性項を用いても (二重 Fourier 級数展開の) 高周波成分をダンプさせることは出来ない. そこで今回, 超粘性に代わるフィルターを提案する.

まず球面調和関数法の場合について超粘性の働きを考える. 簡単のために (1) 式の非線形項, Coriolis 項を省略し,

$$\frac{\partial \omega(\theta, \lambda)}{\partial t} = -\nu_p \nabla^{2p} \omega(\theta, \lambda), \quad (15)$$

を考える. 球面調和関数展開

$$\omega(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \omega_{n,m}^H Y_n^m(\theta, \lambda),$$

と $\nabla^2 Y_n^m(\theta, \lambda) = -n(n+1) Y_n^m(\theta, \lambda)$ を用いると (15) 式は

* エイリアシング誤差を少なくするためにいわゆる 3/2 則を適用した¹⁾.

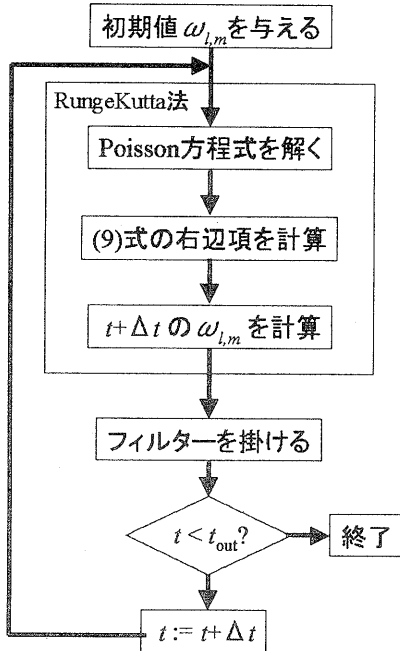


図3 計算全体の流れ.

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega_{n,m}^H = -(-n(n+1))^p \nu_p \omega_{n,m}^H.$$

この式を時間刻み h としてオイラー法で考えると,

$$\begin{aligned} \omega_{n,m}^H(t + \Delta t) &= \omega_{n,m}^H(t) - \nu_p (-n(n+1))^p h \omega_{n,m}^H(t), \\ &= (1 - \nu_p (-n(n+1))^p h) \omega_{n,m}^H(t). \end{aligned}$$

この式は毎タイムステップごとに、波数成分に $(1 - \nu_p (-n(n+1))^p h)$ というフィルターを掛けていくと考えることが出来る。

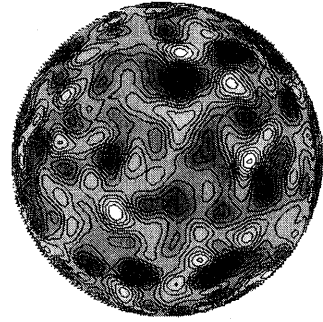
二重 Fourier 級数展開の場合も、超粘性と同様に高波数成分だけ効率的にダンプさせるためにフィルターを掛ける。ただし、二重 Fourier 級数展開の場合には、 l 方向だけにフィルターを掛けるのではなく、 m 方向にも掛けることにして、次のようなフィルターを提案する。

$$(1 - \alpha(l(l+1))^p h)(1 - \alpha(m(m+1))^p h). \quad (16)$$

3.4 計算全体の流れと計算量

計算全体の流れを図3に示す。

球面の分割数を南北方向に N 、東西方向に $2N$ とすると切断波数 $T_m = T_l = T$ は $T = 2N/3$ となる。1タイムステップあたりの演算回数は、球面調和関数法は $O(N^3)$ である。対して二重 Fourier 級数展開を用いた場合には、Poisson 方程式を解くのに $O(N^2)$ 、運動方程式の時間発展に $O(N^2 \log N)$ 、フィルターを掛けるのに $O(N^2)$ であり、全体で $O(N^2 \log N)$ となり高速計算を実現している。



-8.8260E+001 7.1218E+001

図4 相対温度の初期値.

4. 数値実験

本節では数値実験として、球面調和関数法による温度分布の変化、保存量の変化、計算時間を比較する。なお、(1)式は無次元化されており、単位時間は約1週間に相当し、地球の自転速度は $\Omega = 50$ 程度となる。

4.1 実験方法

実行環境は OS は RedHat6.0, CPU は Alpha533Mhz を用いた。

球面調和関数法の実験では $p = 2, \nu_p = 1 \times 10^{-6}, \Delta t = 1 \times 10^{-3}$ 、プログラム言語は FORTRAN77, コンパイラは GNU f77, 最適化オプションは -O5 を用いた。二重 Fourier 級数展開法は $p = 2, \alpha = 1 \times 10^{-6}, \Delta t = 1 \times 10^{-3}$ とした。プログラム言語は C, コンパイラは gcc, 最適化オプションは -O5 を用いた。

4.2 初期値

本報告では、4) に従い、相対温度の初期値を乱数を用いて与えた。図4に例を示す。

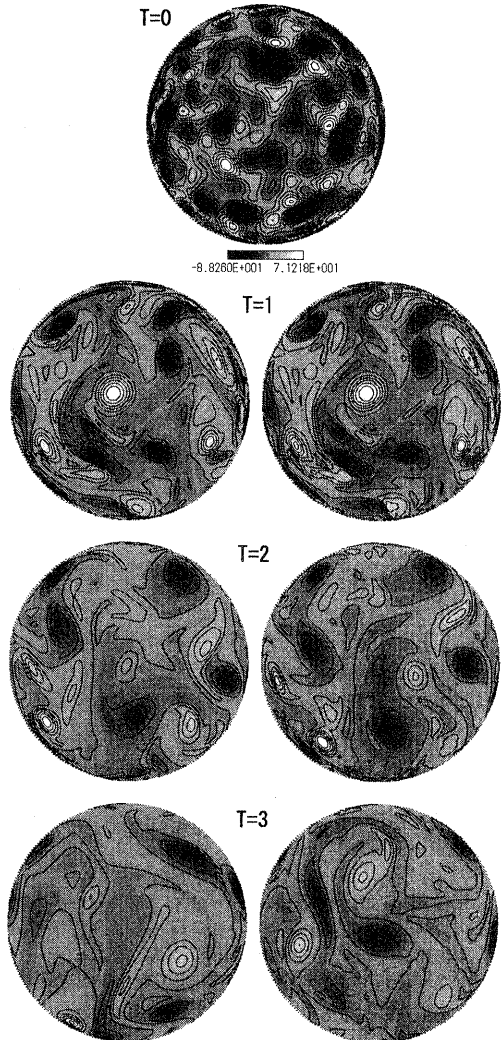
4.3 温度分布の変化

ここでは球面調和関数法と二重 Fourier 級数展開法の温度の時間発展を見てみる。

$\Omega = 0$ とした時の時間発展の様子を図5に示す。地球の自転速度に相当する $\Omega = 50$ の時の“絶対”温度の時間発展を図6に示す。ただし絶対温度は $|\omega| = \omega + 2\Omega \sin \theta$ である。

図5,6において、左が球面調和関数法、右が二重 Fourier 級数展開法による実験結果である。上から順に $T=1,2,3(1,2,3$ 週目)となっている。スケールはすべて $T=0$ と同じである。また、グリッド数はどちらも 128×256 、切断波数は85とした。

図5,6より、 $T=2$ くらいまでは球面調和関数法と二重 Fourier 級数展開法はほぼ同様な結果が得られることがわかる。しかし、 $T=3$ あたりから徐々に異なった分布になっていく。



球面調和関数法 二重Fourier級数展開法

図5 $\Omega = 0$ の時の、球面調和関数法 (左) と二重 Fourier 級数展開法 (右) による渦度の時間発展。上から順に $T=1, 2, 3$ (1, 2, 3 週目) を表している。

4.4 保存量

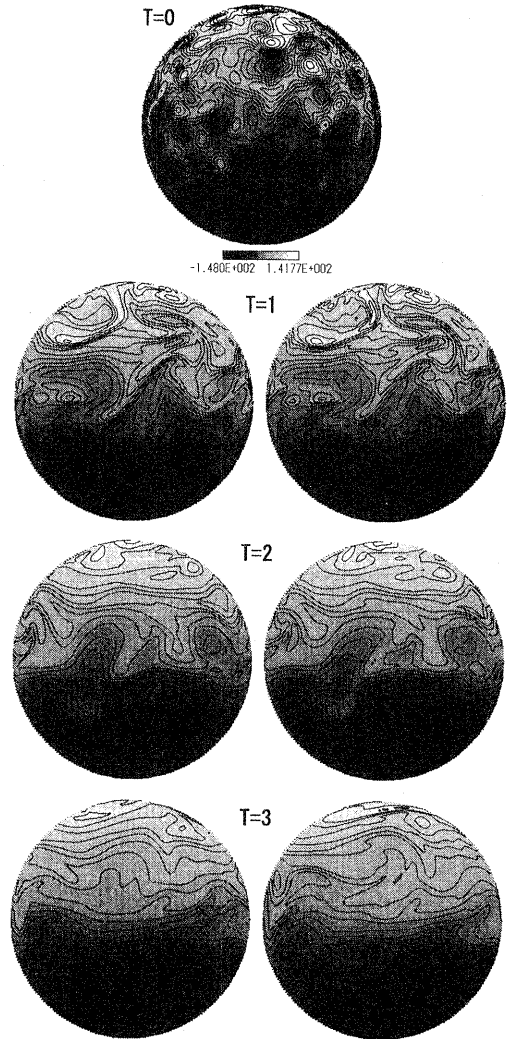
本報告で扱う実験では厳密解が求まらないので、保存量がどの程度保存するかを見てスキームの善し悪しを議論する。

(1) 式は次の保存量を持つ。

- 全エネルギー： $\frac{1}{2} \int |\nabla\psi|^2 dS$
- 全エントロピー： $\frac{1}{2} \int |\omega|^2 dS$

グリッド数を 128×256 、切断波数を 85 とし、時間発展させたときのエネルギー、エントロピーの変化を図 7, 8 に示す。

このグラフから球面調和関数法とほぼ同様な結果が、



球面調和関数法 二重Fourier級数展開法

図6 $\Omega = 50$ の時の、球面調和関数法 (左) と二重 Fourier 級数展開法 (右) の渦度の時間発展。

二重 Fourier 級数展開法でも得られることがわかる。ここでエネルギー、エントロピーともに減少しているが、これは粘性項やフィルターを用いているためである。

4.5 計算時間

球面調和関数法と二重 Fourier 級数展開法の 1 タイムステップに必要な計算時間を図 9 に示す。ただし切断波数 $T=21$ はグリッド数 32×64 、 $T=42$ は 64×128 、 $T=85$ は 128×256 である。

グラフよりわかるように、球面調和関数法と場合と比べて二重 Fourier 級数展開法の方が 1 タイムステップの計算時間の増加割合が小さい。よって時間刻み Δt が同

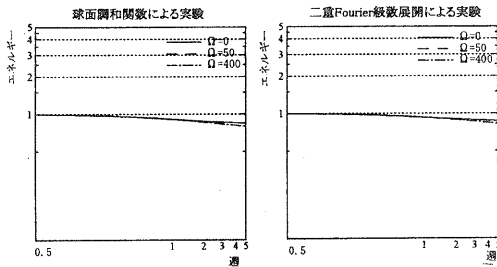


図7 エネルギー.

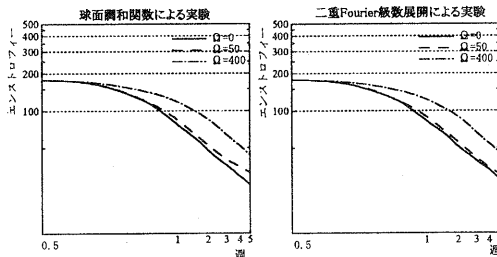


図8 エンストロフィー.

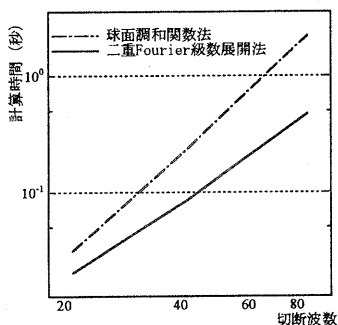


図9 1タイムステップあたりの計算時間の比較.

じにできる場合、二重 Fourier 級数展開法の方が高速に計算できる。しかし球面調和関数法の場合、 $T=85$ の時、タイムステップ幅を $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ としても安定に計算できるのに対して、二重 Fourier 級数展開を用いた場合は、タイムステップ幅を $\Delta t = 1 \times 10^{-3}$ 程度にしなくては安定に計算できなかった。二重 Fourier 級数展開法は $T=85$ の時、1 タイムステップの計算時間は球面調和関数法に比べて $1/5$ 程度であったが、タイムステップ幅を $1/5$ にしなくてはならないので、結局、計算の高速化は出来なかった。

しかし二重 Fourier 級数展開法の場合においても、 Δt とフィルタパラメータ α などの関係がちょうど良いところを見ることが出来れば、球面調和関数法と同等なタイムステップ幅でも計算できる可能性がある。タイムステップ幅の問題がクリアされれば、二重 Fourier 級数展開法の計算時間は球面調和関数法に比べて圧倒的に高

速になることが期待される。

5. まとめと今後の課題

回転球面上の非発散渦度方程式に対する二重 Fourier 級数展開を用いた数値解法を提案した。数値実験の結果、渦度の分布、保存量など、球面調和関数法と同様な結果が得られた。1 タイムステップ当たりの計算時間は、比較的小さな問題 ($T=85$ 等) でも、(タイムステップ幅を同一にした時) 球面調和関数法に比べて高速に解くことが出来た。しかし、二重 Fourier 級数展開法ではタイムステップ幅を、球面調和関数法で安定に動作するタイムステップ幅ほど大きくできないため、計算の高速化は出来なかった。

今後は浅水方程式など、さらに複雑な方程式に適用し、二重 Fourier 級数展開を用いた数値解法の有効性を検証していきたい。

謝辞

本報告の一部は日本学術振興会未来開拓学術研究推進事業による。

球面調和関数を用いたスペクトル法のプログラムを提供して下さった京都大学理学研究科 余田成男先生、東京大学数理科学研究科 石岡圭一先生に感謝いたします。

参考文献

- 1) C.Canuto, M.Y.Hussaini, A.Quarteroni, T.A.Zang.: *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer-Verlag Berlin(1986).
- 2) Fornberg, B.: *A Practical Guide to Pseudospectral Methods*, Cambridge University Press(1996).
- 3) Orszag, S.A.: Fourier series on spheres. *Monthly Weather Review*, Vol.102, pp.56-75(1970).
- 4) Yoden, S., and Yamada, M.: A Numerical Experiment on Two-Dimensional Decaying Turbulence on a Roating Sphere, *Journal of the atmospheric sciences*, Vol.50, No.4, pp.631-644.
- 5) Yee, S.Y.K.: Solution of Poisson's Equation on a Sphere by Truncated Double Fourier Series, *Monthly Weather Review*, Vol.109, pp.501-504(1981).
- 6) Yee, S.Y.K.: Studies on Fourier Series on Spheres, *Monthly Weather Review*, Vol.108, pp.676-678(1980).
- 7) 石黒貴之, 服部啓太, 須田礼仁, 杉原正顯: 球面上の Poisson 方程式の高速解法, 情報処理学会研究報告, Vol.98-HPC-77, pp.1-6(1999).
- 8) 服部啓太, 石黒貴之, 須田礼仁, 杉原正顯: FFT を用いた球面上の流体方程式の高速解法, 情報処理学会研究報告, Vol.99-HPC-76, pp.31-36(1999).
- 9) 服部啓太, 石黒貴之, 須田礼仁, 杉原正顯: FFT を用いた球面上の非圧縮性流体方程式の高速解法, 情報処理学会研究報告, Vol.99-HPC-79-3, pp.13-18(1999).