

精度評価付き MR 法による行列の前処理について

仁 科 奈々[†] 張 臨 傑[†] 野 寺 隆^{††}

科学技術計算では大型で疎な係数行列を持つ連立1次方程式の近似解を求めることは、重要な事柄の1つである。本稿では係数行列が非対称である場合に有効な GMRES(m) 法を用いて連立1次方程式の近似解法について考える。通常、GMRES 法のような反復法は、行列の前処理を施すのが一般的な手法である。行列の前処理には色々な方法があるが、フロベニウスノルムを最小にするような近似逆行列を利用する方法が近年注目を集めている。本稿では近似逆行列の計算に MR 法を用い、フロベニウスノルムと GMRES 法の収束性について考察する。

Approximate inverse preconditioning using MR Method With Validation

NANA NISHINA,[†] LINJIE ZHANG[†] and TAKASHI NODERA^{††}

The numerical solutions of large linear systems of equations are extremely demanding in term of scientific computing. In this paper, we use GMRES method which takes advantage of solving these linear systems of equations whose coefficient matrices are nonsymmetric and nonsingular. In general, preconditionings are used to get approximate solutions more quickly. There are many ways to generate approximate inverse preconditioners, which are minimized the frobenius norm. In this paper, we use MR method for computing the approximate inverse preconditioner, and we show that the relationship between the frobenius norm and the iterations of GMRES method.

1. はじめに

今日、科学技術計算は自然科学や生命工学の分野において津波や血液の流れの解析などに利用され、人々の暮らしの改善に役立っている。血液の流れなど流体問題の多くは、ナビエストークスの方程式などで表わされる偏微分方程式の境界値問題となる。通常、この方程式は有限要素法や有限差分法で離散近似すると連立1次方程式

$$Ax = b \quad (1)$$

が得られることになる。ただし、 A は $n \times n$ の大型で疎な行列である。本稿では係数行列が非対称である場合の解法として GMRES 法¹⁾ をとりあげる。GMRES 法は、近似解が求まるまでに膨大な時間やメモリを必要とする事もある。そこで、通常、周期 m でリスタートするリスタート版の GMRES(m) 法が用いられる。しかしながら GMRES 法だけでは残差ノルムがゼロに収束するまでに時間がかかるので、前処理を施すのが一般的である。現在までに、前処理についての多く

の研究が行われており、様々な方法が提案されているが、本稿では MR 法⁴⁾ を利用し、近似逆行列を計算する前処理について考える。ここでは前処理行列の近似精度をフロベニウスノルム⁵⁾ を用いて評価することとする。MR 法は計算時間の早さでは不完全行列分解に劣るが、並列化が容易なことが知られている⁴⁾。

最初に2章において GMRES 法の算法について簡単に述べる。次に、3章では近似逆行列を用いた前処理について述べる。4章では近似逆行列の近似精度と GMRES(m) 法の関係について数値実験を用いて検証する。5章では結論と今後の課題について述べる。

2. GMRES 法

この章では GMRES 法とそのリスタート版である GMRES(m) 法について述べる。

2.1 GMRES 法

GMRES 法は、1986 年に Saad ら¹⁾ によって提案された解法であり、非対称な係数行列を持つ連立1次方程式を解くのに有効なクリロフ部分空間法に属する反復解法の1つである¹⁾。ただし、クリロフ部分空間とは

$$K_n(A; r_0) = \text{span}\{r_0, Ar_0, \dots, A^{n-1}r_0\} \quad (2)$$
となる空間である。 r_0 は初期残差ベクトルのことであ

[†] 慶應義塾大学大学院理工学研究科
Graduate School of Science and Technology, Keio University

^{††} 慶應義塾大学理工学部
Faculty of Science and Technology, Keio University

り、初期近似解を x_0 とすると $r_0 = b - Ax_0$ となる。アーノルディ過程を用いることにより、クリロフ部分空間上の n 次元の正規直交基底

$$V_n = (v_1, v_2, \dots, v_n) \quad (3)$$

を生成する。ただし、正規直交ベクトルを v とし、 $v_1 = r_0 / \|r_0\|_2$ とする。GMRES 法は残差ノルムを反復により最小にすることにより近似解を求める方法である。即ち、 n 番目の反復における残差ベクトル r_n は近似解 x_n を用いて、 $r_n = b - Ax_n$ となり、この残差ノルム $\|r_n\|_2$ を最小にする算法である。近似解は

$$x_n = x_0 + V_n y \quad (4)$$

と表すことができる。このことから

$$\begin{aligned} \|r_n\|_2 &= \|b - Ax_n\|_2 \\ &= \|b - A(x_0 + V_n y)\|_2 \\ &= \|r_0 - AV_n y\|_2 \end{aligned} \quad (5)$$

となる。アーノルディ過程は行列表現を用いて次のように書ける。

$$AV_n = V_n \bar{H}_n \quad (6)$$

ただし、 \bar{H}_n は $(n+1) \times n$ の上ヘッセンベルグ行列である。ここで、式 (5) から

$$\begin{aligned} \min_{x_n} \|b - Ax_n\|_2 &= \min_y \|r_0 - AV_n y\|_2 \\ &= \min_y \|V_n^{-1} (r_0 - AV_n y)\|_2 \\ &= \min_y \|r_0\|_2 e_1 - \bar{H}_n y\|_2 \end{aligned} \quad (7)$$

ただし、 \bar{H}_n をギブンス回転を用いる QR 分解を利用して、最小 2 乗問題の近似解 y を求めることになる。

GMRES 法は通常、高々 n 回の反復で解が求まる。しかし、実際に計算機を用いて計算する場合には、丸め誤差や桁落ちが生じる。そのため、求まる解は厳密解ではなく、誤差を含んだ近似解となる。更に、反復回数が増えるに従い、保存しておくべき正規直交ベクトル列 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ と上ヘッセンベルグ行列 \bar{H}_n が大きくなる。即ち、計算量、記憶容量が大きくなるため、これを解くのは効率的ではない¹⁾。そこで一般には、クリロフ部分空間の次元を n よりも遥かに小さい m 次元で構成するリスタート版の GMRES 法が使われる。このアルゴリズムを図 1 に示す。このアルゴリズムの 19 行目から 21 行目までがリスタート部分である。しかし、リスタート版は正規直交ベクトルを部分的にしか保存しないため、反復法が停滞してしまう、または収束しない可能性があるため、収束を早くする前処理を必要とする。

3. 近似逆行列を用いる前処理

この章では近似逆行列を使う前処理について述べる。前処理の手法には不完全行列分解²⁾[pp. 245-278] によるものや近似逆行列²⁾[pp. 298-307] を用いたものがある。本稿では近似逆行列を用いるものを考える。

```

01: choose  $x_0$ 
02:  $r_0 := b - Ax_0$ ;
03:  $v_1 := r_0 / \|r_0\|_2$ ;
04: begin
05: for  $n = 1$  to  $m$  do
06:    $\hat{v}_{n+1} = Av_n$ ;
07:   for  $i = 1$  to  $n$  do
08:      $h_{i,n} := (\hat{v}_{n+1}, v_i)$ ;
09:    $\hat{v}_{n+1} := \hat{v}_{n+1} - \sum_{i=1}^n h_{i,n} v_i$ ;
10: end
11:  $h_{n+1,n} := \|\hat{v}_{n+1}\|_2$ ;
12:  $v_{j+1} := \hat{v}_{n+1} / h_{n+1,n}$ ;
13: end
14: compute  $y = \min_y \|r_0 - \bar{H}_n y\|_2$ ;
15:  $x_m := x_0 + V_m y_m$ ;
16: if  $\|b - Ax_m\|_2 \leq \epsilon$  then
17:   stop iteration
18: endif
19:  $x_0 := x_m$ ;
20:  $r_0 := b - Ax_0$ ;
21:  $v_1 := r_0 / \|r_0\|_2$ ;
22: goto start

```

図 1 GMRES(m) 法のアルゴリズム

本稿ではまず最初に前処理の効果について述べ、次に制度評価について考える。これを満たす前処理として MR 法⁴⁾を用いることとする。

3.1 行列の前処理

係数行列 A の条件数は

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \quad (8)$$

である。条件数が大きいほど近似解が真の解から離れて行く可能性が生じる⁶⁾[pp. 60-63]。このため、この値が大きくなると連立 1 次方程式は解きにくくなる。式 (1) に反復法を用いても、計算に時間がかかったり、収束しないことがある。そこで、式 (1) に前処理と言われる変換を施す。 M を $n \times n$ の行列とすると

$$MAx = Mb \quad (9)$$

$$AMy = b, \quad x = My \quad (10)$$

式 (9) の前処理を左前処理、式 (10) の前処理を右前処理と呼び、 M を前処理行列と呼ぶ。

左前処理は両辺に単に前処理行列 M を左からかける事により求められる。それに対し、右前処理は近似解 x の代わりに y を求め、最終的に My を計算しなければならない。

右前処理は一見計算が左前処理より複雑に見えるが、実際には $AMy = b$ の連立 1 次方程式を解き、そこで得られた解 y を $My = x$ に代入する事により、簡単に近似解 x が得られる。また、この左前処理の場合、式 (1) の両辺に行列 M がかかるが、右前処理の場合は、近似解には前処理行列が影響をしないので、正確な残差ノルムの評価が求まると考えられる。

通常、前処理は条件数を減らす様に施す。そのため、 M を A の近似逆行列

$$M \approx A^{-1} \quad (11)$$

となるように構成する。以降、右前処理について考える。

3.2 フロベニウスノルム

近似逆行列の近似精度を評価するために次のようなフロベニウスノルムを用いて考える。

$$\|AM - I\|_F^2 = \sum_{j=1}^n \|(AM - I)e_j\|_2^2 \quad (12)$$

これは並列計算ができるため、大規模な問題を取り扱う場合に有利になる手法である。式(12)を最小にするように行列 M を選ぶ⁵⁾。すなわち

$$\min_M \|AM - I\|_F = \|AM_{\min} - I\|_F \quad (13)$$

を満足する M_{\min} を選ぶことである。本稿では式(12)の値を用いて近似逆行列の近似精度を評価する。

3.3 Minimum Residual Method (MR 法)

近似逆行列を求めるには Jacobi 法, QR 法, Newton 法などがあるが, ここでは MR (最小残差) 法⁴⁾を用いる事にする。これは式(12)を解くための解法であり, n 個の線形方程式

$$Am_j = e_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

を解く事になる。ただし, m_j は行列 M の第 j 列目, e_j は行列 I の第 j 列目を示す。これは, 降下法に基づくアルゴリズムを数ステップ行う事により求めるアルゴリズムである。降下法の k 回目の反復における m_j は, 次のようになる。

$$m_j = m_j + \alpha r_j \quad (14)$$

ただし, α は降下法におけるパラメータで $\alpha = (r_j, Ar_j)/(Ar_j, Ar_j)$ である。ここで, r_j は式(12)から得られる次の最小 2 乗問題の残差ベクトル $r_j = e_j - Am_j$ である。

$$\min_{m_j} \|e_j - Am_j\|_2^2 \quad (15)$$

次に, 初期値 M_0 の決め方には色々な手法があるが, 本稿では

$$\begin{aligned} M_0 &= 0 \\ M_0 &= I \\ M_0 &= 1/D \end{aligned}$$

の 3 通りとする。ただし, 行列 D とは係数行列 A の対角要素のことである。本稿では係数行列 A を矩形領域 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ における楕円型の偏微分方程式のディリクレ境界値問題⁷⁾を 5 点中心差分離散化した場合に得られた行列とする。このとき, ステンシルの取り方を標準ステンシル¹⁾[pp.49-50]とし, またメッシュの取り方を整合順序¹⁾[pp.51-54]として得られる係数行列は対角に 5 本あり, 3 重ブロック対角行列となる(図 2)。この条件のもと, 本稿では前処理行列 M の各列における非ゼロ要素となる構造を次のように設定する。

- 行列 A と同じ構造となる対角を 5 本とする (フィルインをしない)。すなわち, 前処理行列 M の第

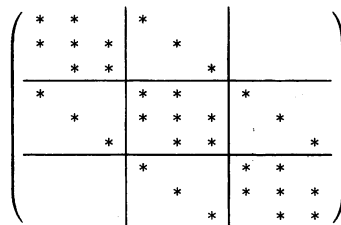


図 2 正方形領域のグリッドポイントを 9 とし, 整合順序に番号付けをした場合の行列 A の構造

表 1 Compaq DS10L の仕様

OS	Kondara MNU/Linux SP2
CPU	600MHz Alpha x30
Memory	30GB

i 行 j 列目において, $|i-j| < 2$ または $|i-j| = w$ である場合に非ゼロ要素とする。

- 閾値を設け, その値より大きいものだけを非ゼロ要素とする。

MR 法の欠点として演算時間の長さが挙げられる。MR 法の各反復において 2 回の内積計算と 2 回の行列ベクトル積を計算する必要があるからである。しかしながら係数行列 A は疎な行列であるので, 行列ベクトル積を行う際に必要となる要素は限定され, 得られるベクトルも疎なベクトルになると考えられる。そこでここでは係数行列 A を 1 ブロックのサイズがメッシュサイズと等しいブロック行列で考えることとする。前処理行列 M の初期値は係数行列 A と同じ大きさのブロックサイズで考えると非ゼロ要素が多くとも 1 ブロックのベクトルである。係数行列 A にこのベクトルをかけると, 非ゼロ要素が 3 ブロックのベクトルを得る事が出来る。この考えを繰り返す事により, 行列ベクトル積の計算を行う際に非ゼロを考慮した行列ベクトル積が可能となる。また, 内積計算においても同様にブロック構造の非ゼロ部分を考え, 非ゼロブロック部分のみの乗算を行う事が可能となる。この方法を用いることにより非ゼロを考慮しない内積, 行列ベクトル積を用いた場合の MR 法と比べ, 前処理にかかる時間を減少させる事が可能となる。

ステップ数を τ とした時の MR 法のアルゴリズムを図 3 に示す。通常, 閾値は小さな値を取る。

4. 数値実験

前処理なしと前処理付きの GMRES(m) 法を比較した数値実験について述べる。

4.1 実装について

数値実験で用いた計算機 Compaq DS10L x 30 ノードの仕様について表 1 に示す。

```

01:  $M := M_0$ 
02: for each column  $j := 1$  to  $n$  do
03: begin
04:    $m_j := Me_j$ ;
05:   for  $i = 1$  to  $\tau$ ;
06:      $r_j := e_j - Am_j$ ;
07:      $\alpha_j := (r_j, Ar_j) / (Ar_j, Ar_j)$ ;
08:      $m_j := m_j + \alpha_j r_j$ ;
09:     apply dropping to  $m_j$ ;
10:   end
11: end

```

図 3 MR 法のアルゴリズム

```

01:  $M := M_0$ 
02: for each column  $j := 1$  to  $n$  do
03: begin
04:    $m_j := Me_j$ ;
05:   for  $i = 1$  to  $\tau$ ;
06:      $r_j := e_j - Am_j$ ;
07:      $\alpha_j := (r_j, Ar_j) / (Ar_j, Ar_j)$ ;
08:      $m_j := m_j + \alpha_j r_j$ ;
09:     apply dropping to  $m_j$ ;
10:   end
11: end
12: choose  $x_0$ 
13:  $r_0 := b - Ax_0$ ;
14:  $v_1 := r_0 / \|r_0\|_2$ ;
15: begin
16: for  $n = 1$  to  $m$  do
17:    $\hat{v}_{n+1} = AMv_n$ ;
18:   for  $i = 1$  to  $n$  do
19:      $h_{i,n} := (\hat{v}_{n+1}, v_i)$ ;
20:      $\hat{v}_{n+1} := \hat{v}_{n+1} - h_{i,n}v_i$ ;
21:   end
22:    $h_{n+1,n} := \|\hat{v}_{n+1}\|_2$ ;
23:    $v_{j+1} := \hat{v}_{n+1}/h_{n+1,n}$ ;
24: end
25: compute  $y = \min_y \|\| r_0 \| e_1 - \bar{H}_n y \|_2$ ;
26:  $x_m := x_0 + MV_m y_m$ ;
27: if  $\|b - Ax_m\|_2 \leq \epsilon$  then
28:   stop iteration
29: endif
30:  $x_0 := x_m$ ;
31:  $r_0 := b - Ax_0$ ;
32:  $v_1 := r_0 / \|r_0\|_2$ ;
33: goto start

```

図 4 MR 法の前処理付き GMRES(m) 法のアルゴリズム

数値実験における各数値例の環境を以下に示す。

- 収束判定条件: $\|r_m\|_2 / \|r_0\|_2 \leq 1.0 \times 10^{-12}$
- 最大反復回数: 10000
- 初期近似解: $x_0 = (0, \dots, 0)^T$
- 真の解: $x = (1, \dots, 1)^T$
- GMRES(m) 法のリスタート周期: $m = 20$
- プログラム言語: C 言語
- 計算精度: 倍精度
- コンパイラ: MPI1.2.1
- 使用した CPU の数: 2

4.2 数値例 1

矩形領域 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ における 2 階の偏微分方程式のディリクレ境界値問題を考える⁷⁾。

$$-u_{xx} - u_{yy} + D(u_x + u_y) = G(x, y)$$

$$u(x, y)|_{\partial\Omega} = 1.0$$

ここで、グリッドサイズ h を $1/129$, $Dh = 2^{-7}$, リスタート周期 m を $m = 20$ とした。前処理は MR 法を用いて計算する。そこで、初期値を 3 つ設定し、以下それぞれ mrI を $M_0 = I$, mrD を $M_0 = 1/D$, $mr0$ を $M_0 = 0$ と表記する。また前処理行列の非ゼロの構造を係数行列と同じ構造に定めたものを s , 閾値により非ゼロの構造を決めたものを $d(\tau)$ と表記する。ただし、 $1.0^{-\tau}$ を閾値とする。

4.2.1 結果と考察

数値例 1 の数値結果を表 2, 3, および図 5~図 13 に示す。表 2 および表 3 において " T_p " は MR 法にかかった計算時間 (秒), "Time" は全体の計算時間 (秒), "frob" は $\|AM - I\|_F^2$, "iter" は GMRES の反復回数, " I_p " は MR 法の反復回数を示している。また、表中の "—" は GMRES 法が収束しなかった事を表すことにする。表 2 より初期値と前処理行列の決め方によりフロベニウスノルムの値が大きく異なっていることが分かる。表 3 及び図 5~図 7 より MR 法の反復回数を多くすると、ほとんどの場合で、フロベニウスノルムが小さくなる事が分かる。閾値が 1.0^{-5} と 1.0^{-3} の場合でフロベニウスノルムの値がほとんど同じことがわかる。また、 A と同じ構造に限定する場合と閾値を 0.1 とする場合を比較すると多くの場合 A と同じ構造を持つ方がフロベニウスノルムの値が小さいことがわかる。このことから、閾値の値が大きすぎる場合には前処理の効果を減らしていることがわかる。また、図 8~図 10 からフロベニウスノルムの値が小さくなると GMRES 法の反復回数も減少していることが分かる。フロベニウスノルムの値が 1000 以下である場合には、GMRES の反復回数も顕著に減っている。しかしながら閾値が 0.1 の場合には MR 法の前処理の反復回数を増やしても同じ結果となった。これは閾値の値が大きいためと考えられる。図 11~図 12 により MR 法の反復回数にフロベニウスノルムの大きさ及び GMRES 法の反復回数が影響する事が分かった。特に初期値を係数行列 A の対角要素の逆行列と

表 2 MR 法 2 回行った場合の数値例 1 の結果

method	frob	Iter	T_p	Time
GMRES(20)		3803	0	64.1
s-mrI+GMRES(20)	6950	-	20.74	247.23
s-mrD+GMRES(20)	1541	1083	19.85	44.15
s-mr0+GMRES(20)	1512	1242	19.41	53.21
d(01)-mrI+GMRES(20)	5180	-	286.00	515.63
d(01)-mrD+GMRES(20)	4064	3803	294.97	374.08
d(01)-mr0+GMRES(20)	3852	3805	288.51	367.77
d(03)-mrI+GMRES(20)	1965	821	270.634	292.02
d(03)-mrD+GMRES(20)	898	1034	288.35	319.17
d(03)-mr0+GMRES(20)	1571	1242	284.72	312.49
d(05)-mrI+GMRES(20)	1571	1242	301.98	330.08
d(05)-mrD+GMRES(20)	898	1034	282.86	309.85
d(05)-mr0+GMRES(20)	1571	1242	301.98	330.08

表 3 初期値 D における数値例 1 の結果

method	I_p	frob	Iter	T_p	Time
GMRES(20)	0	-	3803	0	64.1
s-mrD+GMRES(20)	2	1541	1083	19.85	44.15
s-mrD+GMRES(20)	3	1635	1071	28.69	52.69
s-mrD+GMRES(20)	4	1741	1061	34.19	58.00
s-mrD+GMRES(20)	5	1821	1055	60.71	84.28
d(01)-mrD+GMRES(20)	2	4064	3803	294.97	374.08
d(01)-mrD+GMRES(20)	3	4064	3803	393.27	474.93
d(01)-mrD+GMRES(20)	4	4064	3803	535.17	614.96
d(01)-mrD+GMRES(20)	5	4064	3803	570.65	648.87
d(03)-mrD+GMRES(20)	2	898	1034	288.35	319.17
d(03)-mrD+GMRES(20)	3	655	626	398.94	419.04
d(03)-mrD+GMRES(20)	4	510	606	496.12	519.19
d(03)-mrD+GMRES(20)	5	418	429	596.36	613.90
d(05)-mrD+GMRES(20)	2	898	1034	282.86	309.85
d(05)-mrD+GMRES(20)	3	655	626	404.29	425.19
d(05)-mrD+GMRES(20)	4	512	616	509.30	533.98
d(05)-mrD+GMRES(20)	5	419	423	609.54	630.15

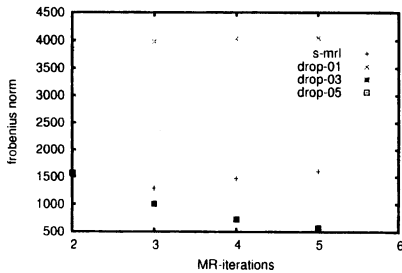


図 5 初期値 0 におけるフロベニウスノルムと MR 反復回数

した場合に顕著に見られる。しかしながら表 3 の計算時間より MR 法の反復回数を増やせば全体の計算時間が増える傾向にあり、GMRES の反復回数が減ったとしても全体の計算時間は MR 法の反復回数を増やす前に比べ増える事がある。

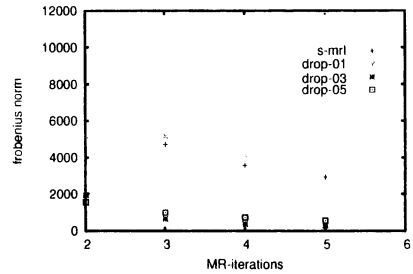


図 6 初期値 1 におけるフロベニウスノルムと MR 反復回数

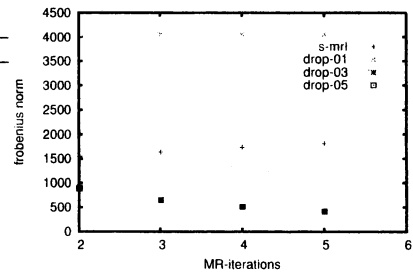


図 7 初期値 D におけるフロベニウスノルムと MR 反復回数

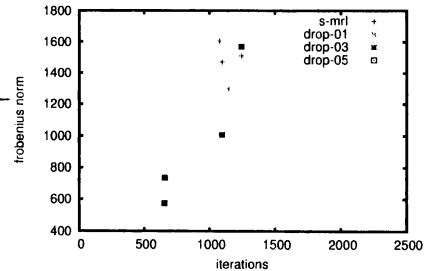


図 8 初期値 0 におけるフロベニウスノルムと GMRES 反復回数

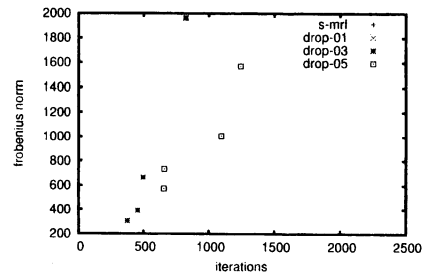


図 9 初期値 1 におけるフロベニウスノルムと GMRES 反復回数

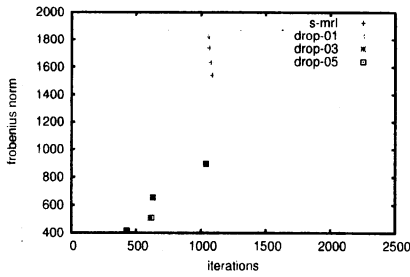


図 10 初期値 D におけるフロベニウスノルムと GMRES 反復回数

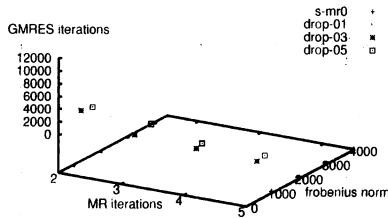


図 11 初期値 1 におけるフロベニウスノルムと反復回数

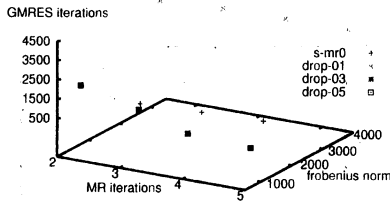


図 12 初期値 0 におけるフロベニウスノルムと反復回数

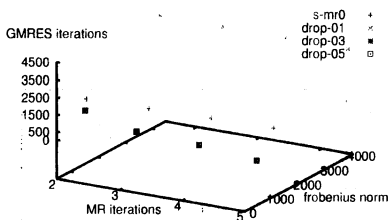


図 13 初期値 D におけるフロベニウスノルムと反復回数

5. 結論と今後の課題

5.1 結論

近似逆行列の近似精度をフロベニウスノルムを評価する事により GMRES 法で解く前に収束するかしないか、初期値毎にある程度予測する事が可能である事が分かった。MR 法の回数を増やし閾値を設けると GMRES 法の残差ノルムがゼロに収束するまでにかかる反復回数が減る事が予測できる。

5.2 今後の課題

近似逆行列の近似精度評価を利用し、フロベニウスノルムの値が大きい場合に再度 MR 法を行う様なリスタート版の実装など、フロベニウスノルムの活用をしたい。また、各初期値ごとに MR 法の計算時間およびトータルの計算時間を細小にするようなフロベニウスノルムの基準値を探す。

参考文献

- 1) Saad, Y. and M. Schultz, GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. 7, pp856-869 (1986)
- 2) Saad, Y., Iterative methods sparse linear systems, *PWS Publishing, Boston, MA* (1996).
- 3) R. Barrett, et al., Templates for the solution of linear systems : building blocks for iterative methods, *SIAM*, 1994. (『反復法 Templates』, 長谷川, その他 訳 朝倉書店 (1996).)
- 4) Chow, E. and Saad, Y., Approximate inverse preconditioners via sparse-sparse iterations, *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. 19, No. 3, pp. 995-1023 (1998).
- 5) Montero, G. et al., Approximate inverse computing using frobenius inner product, *Numer. Linear Algebra Appl.* Vol. 9, pp. 239-247 (2002).
- 6) 山本哲朗: 『数値解析入門 [増訂版]』, サイエンス社 (2003).
- 7) Joubert, W., Lanczos Methods for the solution of non-symmetric system of Linear Wquations, *SIAM J. Matrix Anal.*, Vol 13, No.3 pp.926-943(1992).