2006−HPC−107 (26)
2006／8／1

新しいマルチレベル型反復解法：陰的マルチグリッド法の概念

岩 下 武 史[†]　美 舩　 健[††]　島 崎 眞 昭[††]

マルチグリッド法において，補間・制約演算を陽的に行わない新しい方法：陰的マルチグリッド法を提案する．同手法では，マルチグリッド法における各レベルの方程式を統合し，一つの大きな連立一次方程式として主に前処理付きクリロフ部分空間反復法により解く．その結果，従来のマルチグリッド法の適用範囲を広げ，様々な前処理手法との併用が可能となる．同手法の有効性について電磁界解析における反復法の性質と本手法の類似性から説明し，数値解析により同手法がコースグリッドコレクションの効果を有することを示す．

New Multilevel Type Iterative Solver: Concept of Implicit Multigrid Method

TAKESHI IWASHITA,[†] TAKESHI MIFUNE [††] and MASAAKI SHIMASAKI[††]

This paper proposes a new multi-grid method, which is called "Implicit multi-grid method". In this method, linear systems of equations on all levels in a multi-grid method are integrated into one large linear system of equations. When this integrated linear system is solved by using preconditioned iterative solvers, effects of coarse grid correction is expected to be implicitly involved. Since any preconditioning techniques are used for the integrated linear system, the proposed method can extend application areas of conventional multi-grid solvers. Numerical tests confirm that the proposed method involves an effect of coarse grid correction.

1. はじめに

数値シミュレーションにおける重要な計算核である大規模な連立一次方程式の求解法において，マルチグリッド法やその概念を広げたマルチレベル法が注目されている[1]．マルチグリッド法は単体の連立一次方程式の求解法あるいは，反復法の前処理として用いられる．同手法は，ある物理的な解析領域を対象とした方程式，例えばポアソン方程式を離散化した場合，定常反復法において空間的に高周波な成分が効果的に除去されるのに対し，低周波な成分（スムーズな成分）が除去されにくいという性質に基づいている．同手法では，与えられた離散化グリッドに対して，それよりも粗いグリッドを新たに構築し，密なグリッド上で除去されにくい低周波な誤差成分を粗いグリッド上に写像する．粗いグリッド上からみた場合，これらの誤差成分は高周波な成分として見えるため，定常反復法により効果的に除去できる．これをコースグリッドコレクションと呼ぶ．与えられたグリッドに対して，粗いグリッドを階層的に構築し，誤差成分をその空間的な波長に応じたグリッド上で除去することにより，与えられた問題の次元数 n が増加しても収束までに必要なサイクル数をほとんど増加させることなく解を得ることができる．その結果，理想的な場合には，未知変数の自由度 n の問題に対して，$O(n)$ の計算量で解を求めることができる．

このような優れたマルチグリッド法の性質から，多くのアプリケーション分野でマルチグリッド法が導入され，数多くの成果を挙げてきた．特にクリロフ部分空間反復法の前処理としてマルチグリッド法を用いる方法は現時点でもっとも高速な連立一次方程式の解法といえる．その一方で，いくつかのアプリケーション分野ではある程度の有用性は示されるものの，未知数の自由度に比してサイクル数が増加し，$O(n)$ の計算量で解を導出できないという問題点が指摘されるようになってきた．例えば，電磁場解析等の有限要素解析においてアスペクト比の大きいメッシュを用いた場合やシェル要素を用いた構造解析ではそうした現象が報告されている．このような背景の下で，本論文では従来のマルチグリッド法の枠組みを広げた新しいマルチレベル型解法の概念を提示する．同手法により，マルチグリッド法のコースグリッドコレクションを陰的に取り込み，様々な提案がなされている各種の前処理手法と組み合わせることが可能となる[2]．また，特定の前処理手法を使用することで，従来のマルチグリッド解法を実現することができ，従来解法を包含する解法といえる．本論文では陰的マルチグリッド法の手順を示し，その有効性について電磁界有限要素解析における反復法の性質と本手法の類似性から述べる．また，数値実験により同手法の有効性について収束性の面から検討する．

2. マルチグリッド法

マルチグリッド法には，ある解析領域において偏微分方程式の問題を離散化により解く場合に用いられる幾何マ

† 京都大学学術情報メディアセンター
Academic Center for Computing and Media Studies, Kyoto University
†† 京都大学大学院工学研究科電気工学専攻
Graduate School of Engineering, Kyoto University

ルチグリッド法と同手法を任意の係数行列に対して拡張した代数マルチグリッド（AMG）法がある．本論で提案する手法はこれらのいずれにも適用可能であるが，本節ではより基本的な幾何マルチグリッド法について述べる．

2.1 コースグリッドコレクション

解くべき N^0 元連立一次方程式を以下のように与える．

$$A^0x^0 = b^0 \tag{1}$$

但し，A^0 は N^0 次元の正方行列で，x^0 は解ベクトル，b^0 は右辺ベクトルである．また，式 (1) はある領域 Ω をメッシュもしくは格子（以下ではグリッドと呼ぶ）によって分割し，対象とする方程式を離散化して得られるものとし，このグリッドにより離散化された領域を Ω^0 と表す．係数行列 A^0 は一般に疎行列となる．式 (1) をガウス＝ザイデル法等の定常反復法で解く場合，以下のような性質が知られている．即ち，定常反復法では，Ω^0 上の誤差成分のうち空間的に高周波な成分が速く収束するのに対し，空間的に低周波な成分の収束が遅くなる．そこで，マルチグリッド法では，与えられたグリッドに対してより粗いグリッドを用意し，密なグリッド上で除去しにくい空間的に低周波な誤差成分を粗グリッド上に写像し，その上で除去することを行う．これがコースグリッドコレクションと呼ばれる操作である．密グリッド上で空間的に低周波な誤差成分は，粗グリッドに対しては空間的に高周波な成分となるため，各グリッドレベルで定常反復法を用いることにより，効果的に誤差成分を除去することが可能となる．具体的なコースグリッドコレクションの手順は以下のように与えられる．まずここで，なんらかの手段により式 (1) の近似解 $\tilde{x}^0$ を得ているとする．このとき，誤差ベクトル $e^0 = x^0 - \tilde{x}^0$ を定義すると以下の残差方程式

$$A^0e^0 = r^0 \tag{2}$$

が得られる．但し，$r^0 = b^0 - A^0\tilde{x}^0$ である．ここで，仮に式 (2) が解かれ e^0 を得たとすると，$x^0 = \tilde{x}^0 + e^0$ のように解ベクトルを修正し，解を得ることができる．しかし，これらの二つの式は同一の係数行列を持ち，本質的に両者を解くことに違いはない．そこで，マルチグリッド法では，粗いグリッド上で残差方程式を構築し，それにより得られた誤差ベクトルから解ベクトルの修正を行うことを考える．ここでは簡単のために Ω^0 と Ω^1 の二つのグリッドを考える．まず，密なグリッド上の残差 r^0 を粗いグリッド Ω^1 に写像する．この写像演算子は制約演算子と呼ばれ，I_0^1 と表記される．次に元の解くべき偏微分方程式を Ω^1 上で離散化して得られる方程式の係数行列を A^1 とする．このとき，Ω^1 の残差方程式を以下のように与える．

$$A^1e^1 = b^1 = I_0^1r^0 \tag{3}$$

Ω^1 における未知変数の自由度を N^1 とすると，係数行列 A^1 は N^1 次元正方行列で与えられ，制約演算子 I_0^1 は N^1 行 N^0 列の行列となる．式 (3) を直接法あるいは反復法で解き，e^1 あるいはその近似値 $\tilde{e}^1$ を得た後，この誤差ベクトルを Ω^0 に写像し，解ベクトルの修正値とする．このとき用いられる写像演算子は補間演算子と呼ばれ I_1^0 と表記される．写像演算子 I_1^0 により，密なグリッド Ω^0 における解ベクトルの修正は

$$\tilde{x}^0_{new} \leftarrow \tilde{x}^0 + I_1^0\tilde{e}^1 \tag{4}$$

のように表される．

2.2 マルチグリッドサイクル

実用的なマルチグリッド法では階層的に次第に粗くなる複数のグリッド $\Omega^m (m = 1, \ldots, l-1)$ を用意する．ここで l はレベル数と呼ばれる．これらの複数のグリッドに対して，Ω^0 と同様に対象とする方程式を離散化し係数行列 $A^m (m = 1, \ldots, l-1)$ を得る．各グリッドレベルで解かれる方程式を

$$A^mx^m = b^m \ (m = 0, \ldots, l-1) \tag{5}$$

のように書くと，レベル m で解く方程式はレベル $m-1$ で解かれる方程式の残差方程式を Ω^m 上にマッピングしたものであり，制約演算子 $I_m^{m+1}, m = 0, \ldots, l-2$ を用いて右辺ベクトルは $b^{m+1} = I_m^{m+1}r^m$ で与えられる．各レベルにおいて式 (5) より x^m の近似値を得るための手段はスムーザと呼ばれ，その操作をスムージングという．スムーザには様々な提案があるが，定常反復法の数反復を用いるのが一般的である．マルチグリッド法ではどのようにレベル間を推移し，誤差を除去していくかで様々な方法があるが，最も基本的な V サイクルの場合，1 回のマルチグリッドサイクルは以下のように与えられる．レベル m における解ベクトルの更新を

$$\tilde{x}^m_{new} \leftarrow MV^m(\tilde{x}^m, b^m) \tag{6}$$

と表すと，$MV^m(\tilde{x}^m, b^m)$ は以下のように再帰的に定義される．

$MV^m(\tilde{x}^m, b^m)$:

Step 1: Pre-Smoothing: Update $\tilde{x}^m$ by smoothing operation for $A^mx^m = b^m$

Step 2: Compute r^m

Step 3: Restriction: $b^{m+1} = I_m^{m+1}r_m$, Update $\tilde{x}^{m+1} = 0$

Step 4: Coarse grid correction: $MV^{m+1}(\tilde{x}^{m+1}, b^{m+1})$

Step 5: Interpolation: Update $\tilde{x}^m \leftarrow \tilde{x}^m + I_{m+1}^m\tilde{x}^{m+1}$

Step 6: Post-Smoothing: Update $\tilde{x}^m$ by smoothing operation for $A^mx^m = b^m$

マルチグリッド法ではマルチグリッドサイクルを繰り返すことで連立一次方程式の求解を行う．また，マルチグリッド法をクリロフ部分空間反復法の前処理として使用する場合には，前処理としてマルチグリッドサイクルを数回（通常は 1 回）行う．

3. 陰的マルチグリッド法

本節では，本論で新しく提案する陰的マルチグリッド法についてその詳細を述べる．

3.1 陰的マルチグリッド法のフレームワーク

陰的マルチグリッド法における基本的な考えは，マルチグリッドの各レベルにおける方程式 $A^mx^m = b^m$ $(m = 0, \ldots, l-1)$ を連立し，一つの大きな連立一次方程式として解くことに基づく．この統合化された方程式は，粗グ

リッドにおける係数行列の作成方法によっては不定な方程式となりうるが，反復法により解を得ることが可能である．以下にどのように各レベルの方程式を連立して解くかを述べる．

まず，ここでは簡単のため 2 レベルの場合について説明する．一般的な 2 レベルのマルチグリッド法に関する書式とあわせ，レベル 0 をレベル h，レベル 1 をレベル H と表記し，各ベクトル，行列の上添え字をそれぞれ同様に対応させる．まず，連立して解くべき二つの方程式は，

$$A^h x^h = b^h \tag{7}$$

$$A^H x^H = b^H \tag{8}$$

で与えられる．このままでは，単に二つの方程式を独立に解くことに過ぎないため，これら二つを関連付ける．まず，上位レベル h の解ベクトルの修正について考えると，解ベクトル x^h は $x^h \leftarrow x^h + I_H^h x^H$ のように修正される．この誤差修正は，式 (7) における解として，x^h ではなく $x^h + I_H^h x^H$ を解として求めることに相当する．そこで，x^H を導入することにより，式 (7) を

$$A^h x^h + A^h I_H^h x^H = b^h \tag{9}$$

と書き換えることができる．次に，マルチグリッドの下位レベルの右辺ベクトルは上位レベルの残差に制約演算子を施したものであるから，式 (8) における b^h は

$$b^H = I_h^H (b^h - A^h x^h) \tag{10}$$

と書ける．これを式 (8) に代入し整理すると，

$$I_h^H A^h x^h + A^H x^H = I_h^H b^h \tag{11}$$

が得られる．式 (9)(10) を連立し，2 レベルにおける陰的マルチグリッド法の定式化が

$$\begin{pmatrix} A^h & A^h I_H^h \\ I_h^H A^h & A^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_h \\ x_H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_h \\ I_h^H b^h \end{pmatrix} \tag{12}$$

のように得られる．係数行列が A^h が対称で，

$$I_h^H = (I_H^h)^T \tag{13}$$

$$A^H = I_h^H A^h I_H^h \tag{14}$$

が成り立つ場合には，式 (12) の係数行列は対称となる．なお，AMG 法では式 (13)(14) が成り立つように制約演算子・補間演算子を定めるのが一般的である．

次に 2 以上のグリッドの場合における陰的マルチグリッド法の定式化について考える．これは帰納的な方法で構築することができる．今，m レベルまでのグリッドを利用した場合の定式化を

$$\begin{pmatrix} M^{0,0} & \cdots & M^{0,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M^{m,0} & \cdots & M^{m,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^0 \\ \vdots \\ f^m \end{pmatrix} \tag{15}$$

のように表す．ここで，式 (15) の上添え字はマルチグリッドにおけるレベルを表す．2 レベルにおける定式化より，式 (15) において，

$$M^{i,i} = A^i \tag{16}$$

$$M^{i,j} = A^i I_{i+1}^i I_{i+2}^{i+1} \cdots I_j^{j-1} (i < j) \tag{17}$$

$$M^{i,j} = I_{i-1}^i I_{i-2}^{i-1} \cdots I_{j-1}^{j+1} A^j (i > j) \tag{18}$$

$$f^i = I_{i-1}^i I_{i-2}^{i-1} \cdots I_0^1 b^0 \tag{19}$$

と仮定する．このとき，レベル $m+1$ のグリッドが追加された場合を考える．この場合，係数行列に $M^{m+1,m+1}$，$M^{i,m+1}$ および $M^{m+1,i}$，但し $i = 0, 1, \ldots, m$ が追加され，右辺ベクトルに f^{m+1} の項が追加される．まず，$m+1$ レベルで解く方程式について考えると，係数行列は A^{m+1} で与えられ，右辺ベクトルは m レベルの方程式の残差に制約演算子 I_m^{m+1} を施したものとなる．従って，

$$f^{m+1} = I_m^{m+1}(f^m - M^{m,0}x^0 - M^{m,1}x^1 \cdots - M^{m,m}x^m) \tag{20}$$

となり，右辺の括弧内第二項以降を左辺に移項し，式 (17)(19) の仮定を使うと，$m+1$ レベルについて

$$M^{m+1,m+1} = A^{m+1} \tag{21}$$

$$f^{m+1} = I_m^{m+1} f_m = I_m^{m+1} I_{m-1}^m \cdots I_0^1 b^0 \tag{22}$$

$$M^{m+1,j} = I_m^{m+1} M^{m,j} = I_m^{m+1} I_{m-1}^m \cdots I_{j-1}^{j+1} A^j \quad (j = 0, \ldots, m) \tag{23}$$

が得られる．次に $m+1$ レベルの結果による各レベルの誤差修正について考えると，レベル i における解の探索空間が $x_i \leftarrow x_i + I_{i+1}^i I_{i+2}^{i+1} \cdots I_{m+1}^m x^{m+1}$ のように修正されることになる．従って，

$$M^{i,m+1} = A^i I_{i+1}^i I_{i+2}^{i+1} \cdots I_{m+1}^m \; (i = 0, \ldots, m) \tag{24}$$

が得られる．式 (21)(22)(23)(24) は式 (16)(17)(18)(19) において $i = m+1$ としたものに等しく，$m = 0$ または $m = 1$ とした場合に式 (16)(17)(18)(19) が成り立つのは式 (12) より明らかであるので，帰納的に m レベル陰的マルチグリッド法の定式化が式 (15)(16)(17)(18)(19) により与えられる．従って，陰的マルチグリッド法の手順は，制約・補間演算子，各レベルでの係数行列に基づいて式 (16)(17)(18)(19) の各々を計算し，統合化された連立一次方程式 (15) を構築した後，これを前処理付き反復法により解くことにより与えられる．

3.2 陰的マルチグリッド法の効果

陰的マルチグリッド法では，マルチグリッド法において各レベルで解かれる方程式を統合化し，その統合化した連立一次方程式に対して反復法を適用することにより解を得る．通常のマルチグリッド法では明示的にコースグリッドコレクションを行うが，提案手法では統合化された方程式に対する反復法の残差収束の作用がマルチグリッド法におけるコースグリッドの効果を陰的に含むことを期待している．著者らのグループでは，まず予備的な数値実験により，提案手法により得られた統合化された係数行列の条件数が元の係数行列と比べて改善されていることを確認した．また，陰的マルチグリッド法において得られる方程式を対称ガウス＝ザイデル法で解く事は，手順としてマルチグリッド法においてプリスムージングとして前進ガウス＝ザイデル法を使用し，ポストス

ムージングとして後退ガウス＝ザイデル法を使用した V サイクルと同一で，解法として全く同じになる．従って，陰的マルチグリッド法において定常反復法や定常反復前処理を利用した場合には，マルチグリッド法やマルチグリッド前処理と同様の効果が得られると考えられる．

次に，本手法の提案の契機となった電磁場解析と陰的マルチグリッド法の関係について述べる．現在，電磁場解析における主流の解析方法として，磁気ベクトルポテンシャルあるいは電場を未知数とした辺要素有限要素法が挙げられる．特に低周波の電磁場解析では磁気ベクトルポテンシャルを未知変数とした解析が多く用いられる．同解析では，定式化の手法として，磁気ポテンシャルだけを用いる方法（A 法），磁気ベクトルポテンシャルと電気スカラポテンシャルを用いる方法（A-ϕ 法）があり，解の一意性のためにはゲージ条件が必要である．また，後者の解法では辺要素と節点要素が併用される．こうした各種の方法の中で，多くの数値解析結果の蓄積から，有限要素法において生ずる連立一次方程式の解法として ICCG 法を利用した場合，A-ϕ 法による定式化をゲージ条件を科さずに行った場合が最も収束性がよいことが分かってきた[3]．そこで，A-ϕ 定式化が反復法の収束性において有利となる理由についてこれまでに研究が行われてきた．Igarashi らは固有値分布，条件数の分析から本現象の説明を与えている[4),5]．一方，これらの研究と独立に，(高周波) 電磁場解析におけるマルチグリッド法において特殊なスムーザを用いる必要性が示され，具体的にいくつかのスムーザが提案された．例えば，Hiptmair のハイブリッドスムーザ[6] や Arnold[7] らの特殊なシュワルツスムーザがその例である．これらのスムーザは辺要素が作る関数空間中において，その（離散的な）回転が 0 となるような誤差成分についてなんらかの対処をする点に特徴がある．一方，この辺要素が作る空間における回転の Kernel 空間は，電気スカラポテンシャルを節点要素により離散化し，grad を作用させた空間に一致している．つまり，ハイブリッドスムーザや Arnold らのスムーザは grad ϕ の空間に属する誤差成分に対してその修正を行う方法であるとみなすことができる．そこで，これらの方法の有効性を鑑みると，A-ϕ 定式化は ϕ を導入することで，ベクトルポテンシャルの回転が 0 となるような誤差成分を除去する効果を内包し，そのことにより収束性の改善を得たのではないかという考えが示された[8]．即ち，A-ϕ 法の場合には未知変数 ϕ を含む連立一次方程式が構築されるが，係数行列のうち ϕ に対応する部分が反復法において grad ϕ で表現される誤差成分の除去になんらかの寄与をしているという考えである．こうした考えは現時点で著者らの一部が提唱している段階で未だ定量的な検証に至っていないが，高周波電磁場解析における A-ϕ 法の優位性も近年示されてきており，妥当性があると考えられる[9]．

これらの電磁場解析における背景を下に，本論文で提案している陰的マルチグリッド法の有効性について言及する．上記において，ベクトルポテンシャルのみを用いて定式化した場合の電磁場解析では，電気スカラポテンシャルの grad 成分に属する誤差が収束しづらく，この成分に対しては別の係数行列を用いることで全体の収束を加速することができることを述べた．ここで，同手法で用いられる収束しにくい誤差を別の係数行列により収束させるという概念について考えると，この概念はマルチグリッド法におけるコースグリッドコレクションに類似している．つまり，マルチグリッド法では密なグリッド（元の解くべきグリッド）において除去しにくい誤差成分を粗いグリッド，即ち別途生成した係数行列により除去しており，類似性を持っている．通常のマルチグリッド法では，レベル間における誤差の補間，修正を明示的に行うので，上記の考えに沿って電磁場解析に置き換えるとハイブリッドスムーザに相当する．そこで，マルチグリッド法において，電磁場解析における A-ϕ 定式化と同様の定式化を試みるのが本論で提案する陰的マルチグリッド法であり，電磁場解析における A-ϕ 定式化の有効性から，同手法もコースグリッドコレクションの効果を内包することが期待される．

次に陰的マルチグリッド法を導入した場合に期待される効果について考える．従来，マルチグリッド法は単独の線形ソルバあるいは反復法（主にクリロフ部分空間反復法）の前処理として用いられ効果をあげてきた．特にマルチグリッド法を前処理とする反復法は高速性の点で他の方法を大きく凌駕しているといえる．一方，第 1 節で述べたように，これらのマルチグリッド法やマルチグリッド前処理を用いても十分な収束性が得られない場合がある．こうした問題に対して，制約・補間演算子，スムーザ，基本反復法，サイクル形状などに関して多くの選択肢があり，また新たな提案も行われているが十分な成果を挙げていないのが現状である．一方，反復法の前処理技術では，近似逆行列分解前処理，領域分割型前処理など，近年新しい提案が行われているが，マルチグリッド前処理とこれらの前処理を併用することはできない．こうした背景に対して，コースグリッドコレクションを陰的に行う陰的マルチグリッド法では，各グリッドレベルを統合した連立一次方程式を解くため，反復法において提案されているあらゆる前処理手法を適用することが可能となる．即ち，陰的マルチグリッド法の利点は，従来のマルチグリッド法の枠を広げ，数多く提案されている他の前処理手法[2] とコースグリッドコレクションの併用を可能にする点にある．

4. 数値実験結果

4.1 テスト問題

本論文では，次式で与えられる 2 次元ポアソン方程式の境界値問題の差分解析を例に提案手法の有効性について主に収束性について検証する．

$$
\begin{aligned}
-\nabla\cdot(\kappa\nabla u(x,y)) &= f \; in \; \Omega(0,1)\times(0,1) \quad (25)\\
u(x,y) &= 0 \; on \; \delta\Omega\\
if \; (\frac{1}{4}\le x\le\frac{3}{4} \;\;\&\;\; &\frac{1}{4}\le y\le\frac{3}{4}) \; then\\
\kappa=\kappa_0 \quad else \quad \kappa=1
\end{aligned}
$$

式 (25) を 5 点差分公式により離散化し，得られる連立一次方程式を解く．解析プログラムは MATLAB により記述され，パーソナルコンピュータ上で解析を行った．

4.2 解析結果

図 1 - 6 に解くべき 2 次元差分格子のサイズと解析対象の一部の領域内の拡散係数 κ_0 を変化させた場合の収束性の比較を示す．図中において，CG，ICCG は解くべき差分格子上で得られた連立一次方程式を CG（共役勾配）法および ICCG（不完全コレスキー分解前処理付き共役勾配）法で解いた場合を示す．次に，MGCG は解くべき差分格子に対して，階層的なグリッドを作成し，それによるマルチグリッド法を前処理とした CG 法による場合を示す．他の iMG と示されている場合はすべて陰的マルチグリッド定式化を用いた場合である．このうち，iMG-SGS は統合化された方程式を対称ガウス＝ザイデル法で解くもので，解法としてマルチグリッド法による単体ソルバと同一である．次に，iMG-FGS，iMG-CG，iMG-ICCG はそれぞれ統合化された方程式をガウス＝ザイデル法，CG 法，ICCG 法で解いた場合である．最後に，iMG-SGSCG は統合化された方程式を対称ガウス＝ザイデル前処理付き CG 法で解く場合を表しており，アルゴリズムの手順から MGCG 法と等価な方法である．

まず，陰的マルチグリッド法によりコースグリッドコレクションの効果が内包できるかどうかについて検証する．図 1，2，3，6 において，CG，ICCG と iMG-CG，iMG-ICCG を比較する．図中において，解くべきグリッドのサイズが増加するにつれて，CG，ICCG の場合には大幅に収束性が悪化している．一方，iMG-CG，iMG-ICCG の場合には，反復回数は多少増加しているものの，CG，ICCG の場合と比較すると収束性はほとんど変わらないといえ，マルチグリッド法における最も重要な性質であるグリッドサイズによらない収束性を実現している．特に，iMG-CG の場合には，統合化された方程式を CG 法で解いているだけであり，その解法手順として，マルチグリッド法のコースグリッドコレクションに相当する部分が全くない．従って，この iMG-CG の有効性から，陰的マルチグリッド法による定式化で各レベルの方程式を連立して解くことによりコースグリッドコレクションの効果が取り入れられていることが分かる．

次に，解くべき領域の一部の拡散係数を変化させた場合について考える．図 3，4，5 において，本解析の場合，κ_0 を増加させることにより，領域内の拡散係数の不連続性が増し，離散化の結果得られる方程式がより悪条件な問題になっている．その結果，CG，ICCG の場合だけでなく，元の係数行列を対象とした単体マルチグリッドソルバ (iMG-SGS と同一) も収束性が悪化しており，iMG-FGS，

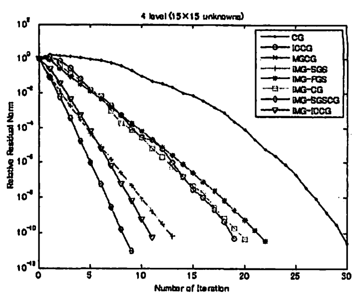

図 1　グリッドサイズ (15 × 15)，κ_0=1 の場合の収束性の比較
Fig. 1　Comparison of convergence behavior when 2-d grid size is 15 × 15 and κ_0=1.

iMG-CG も同様な結果を示している．一方，κ_0 を増加した場合においても，iMG-ICCG は高い収束性を維持している．その結果，図 3 では同程度の収束性を示した単体のマルチグリッドソルバと iMG-ICCG は，解くべき問題が困難になるに従い，iMG-ICCG の優位性が増す．従って，様々な前処理手法との併用が可能な陰的マルチグリッド法は悪条件な問題では単体のマルチグリッドソルバよりも高い性能を得ることが可能であることが分かる．

次に，解析結果を通じて最も優れた収束性を有しているのは，MGCG と iMG-SGSCG であった．両解析手法はその手順がほぼ同一であるため，図中の収束性の振る舞いもほとんど重なっている．MGCG 法は現在，最も高速な連立一次方程式の解法の一つとして知られているが，本解析での検証では陰的マルチグリッド法による定式化を用いた場合においてこれを上回る収束性を得る結果は得られなかった．しかし，前処理手法として近似逆表列前処理や ILU(l) といったより高度な前処理手法を用いることでより高い収束性を得ることは可能であると考えられる．また，実装面において陰的マルチグリッド法には以下のような利点がある．陰的マルチグリッド法では，一旦統合化された方程式を構築すれば，これの方程式に対して様々な反復法を柔軟に適用することができる[2]．現在，反復法のライブラリ，テンプレートが商用／フリーソフトウェアとして利用可能であり，簡単にこれらのリソースを活用することができる．一方，従来のマルチグリッド法では，例えばスムーザの変更は容易ではない．実際，現在利用可能なマルチグリッドソフトウェアではせいぜいいくつかのスムーザのうちから選択できるという機能があるのみで，より高度なスムーザを実装するのはユーザにとって容易でない．即ち，陰的マルチグリッド法ではコースグリッドコレクションを連立一次方程式を統合化するという形で取り込み，解法部分と分離できるという点が実用上において大きなメリットとなる．

5. おわりに

本論文では，マルチグリッド法における各レベルの方程式を統合化して解く陰的マルチグリッド法を提案した．同手法は様々な前処理手法との併用が可能であり，従来

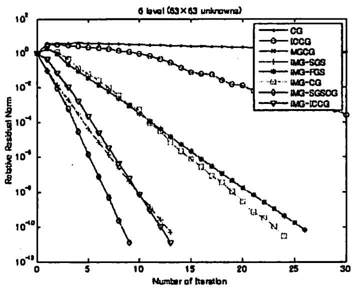

図 2 グリッドサイズ (63 × 63), κ_0=1 の場合の収束性の比較
Fig. 2 Comparison of convergence behavior when 2-d grid size is 63 × 63 and κ_0=1.

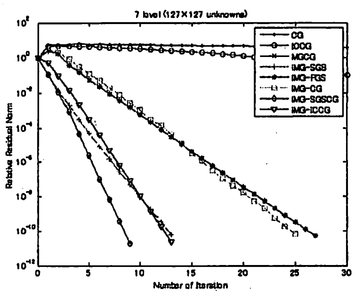

図 3 グリッドサイズ (127 × 127), κ_0=1 の場合の収束性の比較
Fig. 3 Comparison of convergence behavior when 2-d grid size is 127 × 127 and κ_0=1.

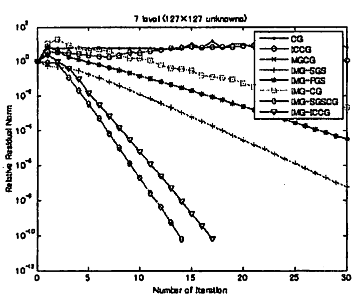

図 4 グリッドサイズ (127 × 127), κ_0=10 の場合の収束性の比較
Fig. 4 Comparison of convergence behavior when 2-d grid size is 127 × 127 and κ_0=10.

のマルチグリッド解法の枠組みを大きく広げることができる．同手法の有効性について，電磁場解析における反復法の性質との類似性から述べた．また，数値解析結果により，提案手法がコースグリッドコレクションの効果を取り入れることが可能であり，マルチグリッド型解法としての性質を有することを示した．陰的マルチグリッド法においてより高度な前処理手法を用いた反復法を使用した場合における収束性の調査が今後の検討課題である．

本研究の一部は，日本学術振興会 科学研究費補助金（若手研究 (B)，課題番号 18700045）の助成を受けている．

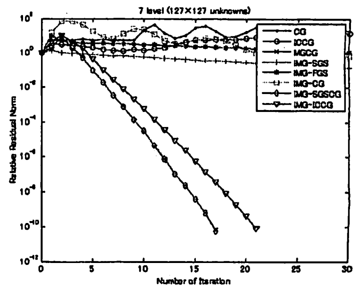

図 5 グリッドサイズ (127 × 127), κ_0=100 の場合の収束性の比較
Fig. 5 Comparison of convergence behavior when 2-d grid size is 127 × 127 and κ_0=100.

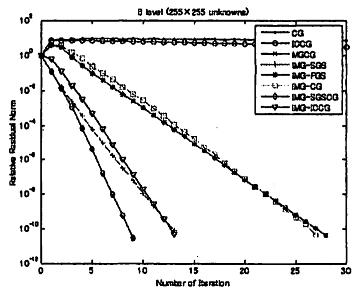

図 6 グリッドサイズ (255 × 255), κ_0=1 の場合の収束性の比較
Fig. 6 Comparison of convergence behavior when 2-d grid size is 255 × 255 and κ_0=1.

参考文献

1) W. Briggs, V. Henson, and S. McCormick, "A Multigrid Tutorial Second Edition", SIAM, Philadelphia, (2000).
2) Y. Saad, "Iterative Methods for Sparse Linear Systems", Second ed., SIAM, Philadelphia, PA, 2003.
3) K. Fujiwara, T. Nakata and H. Ohashi, "Improvement of convergence characteristic of ICCG method for the A-ϕ method using edge elements," IEEE Trans. Magn., Vol.32, pp.804-807, (1996).
4) H. Igarashi, "On the property of the curl-curl matrix in finite element analysis with edge elements ", IEEE Trans. Magn., Vol. 37, pp.3129-3132, (2001).
5) H. Igarashi and T. Homa, "On convergence of ICCG applied to finite-element equation for quasi-static fields", IEEE Trans. Magn., Vol.38, pp.565-568, (2002).
6) R. Hiptmair, "Multigrid method for Maxwell's equations", SIAM J. Numer. Anal., vol.36, no.1, pp.204-225, (1998).
7) D. Arnold, R. Falk, and R. Winther, "Multigird in H(div) and H(curl)", Numer. Math., vol.85, pp.197-218, (2000).
8) 森，用水，岩下，小林，阿部，"高周波電磁界辺要素有限要素解析のための前処理付き反復法"，電子情報通信学会論文誌 C，採録決定．
9) R.D. Edlinger, and O. Biro, "A joint vector and scalar potential formulation for driven high frequency problems using hybrid edge and nodal finite element," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol.44, pp.15-23, (1996).