

GMRES 法における適応的な Augmentation

黒岩 奈保[†], 野寺 隆^{††}

[†] 慶應義塾大学理工学研究科 ^{††} 慶應義塾大学理工学部

GMRES 法は、非対称行列を係数行列に持つ大規模な連立 1 次方程式を解く場合によく用いられる反復解法である。Augmented GMRES 法とは、GMRES 法において、Arnoldi 原理により生成される Krylov 部分空間に対し、低次元空間を付加するという改良を試みた算法であり、その有効性は既に Baglama ら [3] によって示されている。しかし、彼らの手法は付加する空間の選択に明確な指標が無く、適した空間を探し出すまでのユーザーにかかる負担が大きいため実用的であるとは言いがたい。本稿では、Augmented GMRES 法における低次元空間の付加を適応的に行う手法について提案し、悪条件問題を用いた数値実験により、その有効性を示す。

Adaptive Augmented GMRES method

Nao KUROIWA[†], Takashi NODERA^{††}

[†] Graduate School of Science and Technology, Keio University

^{††} Faculty of Science and Technology, Keio University

GMRES method, one of the iterative methods, makes better solution of large linear systems of equations with a nonsymmetric coefficient matrix. We now present adaptive augmented GMRES method. The GMRES method generates a Krylov subspace for the solution, and the augmented GMRES method allows, which proposed Baglama et al. [3], augmentation of the Krylov subspaces by user-supplied subspace which represents certain known features of the desired solution. The augmented GMRES method performs well with suitable augmentation, while poorly with unsuitable augmentation. It is very important which subspace to augment the Krylov subspace. However, we are not able to choose the suitable subspace to augment when the features of the desired solution are unknown. The adaptive Augmented GMRES method automatically determines the suitable subspace to augment the Krylov subspace. We show that the method maintains performance of the augmented GMRES and lightens the burden on users. At last, extensive numerical experiments are conducted in order to compare robustness and efficiency of various heuristic strategies.

1 はじめに

GMRES 法は、大規模な非対称行列を係数行列に持つ連立 1 次方程式

$$Ax = b \quad (1)$$

を解く反復解法の 1 つである。ただし、 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x, b \in \mathbb{R}^n$ とする。通常、GMRES 法は、Krylov 部分空間から、残差ベクトルを最小にするように解 x を構成する。

Baglama ら [3] は、この Krylov 部分空間にユーザーの指定する低次元空間 \mathcal{W} を付加することで、従来の GMRES 法よりも速く高精度な近似解に到達

する Augmented GMRES 法を提案した。ここで、付加する空間によっては算法のパフォーマンスの低下を招くこともあり、どの空間を付加するかが重要になってくる。

しかし、Baglama ら [3] の提案した Augmented GMRES 法では、真の解の性質を考慮に入れた上で付加する空間を選択している。すると、未知の解に対して適用した場合に、付加するべき空間を探し出すことは困難であり、ユーザーにかかる負担も大きいことから実用的であるとは言いがたい。

本稿では、Augmented GMRES 法における低次元空間の付加を適応的に行う手法について提案し、

ユーザの負担軽減を図る。

まずは従来の GMRES 法, Augmented GMRES 法について述べ, 次に適応的な Augmented GMRES 法について述べる。さらに, 数値実験で扱う線形離散悪条件問題について述べた後, 数値実験を用いて適応的な Augmented GMRES 法の有効性を示し, 最後に結論を述べる。

2 GMRES 法

GMRES 法は, 反復目 j , 近似解 \mathbf{x}_j , 初期残差 \mathbf{r}_0 に対し, 最小二乗問題

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}_j - \mathbf{b}\|_2 = \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{x}_0 + \mathcal{K}_j(\mathbf{A}, \mathbf{r}_0)} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 \quad (2)$$

$$\mathcal{K}_j(\mathbf{A}, \mathbf{r}_0) = \text{span}\{\mathbf{r}_0, \mathbf{A}\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{A}^{j-1}\mathbf{r}_0\} \quad (3)$$

を解くことで, 残差ベクトルのノルムが最も小さくなるように解 \mathbf{x}_j を構成する。

3 Augmented GMRES 法

GMRES 法は, 反復解 \mathbf{x}_j の候補が含まれる空間として Krylov 部分空間 $\mathcal{K}_j(\mathbf{A}, \mathbf{r}_0)$ を利用していた。そこへ新たにユーザの定める空間 \mathcal{W} を付加したのが Augmented GMRES 法である。ここで定める空間 \mathcal{W} は, 1 次関数や 2 次関数といった低次元の空間である。実際には, 最小二乗問題

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}_j - \mathbf{b}\|_2 = \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{x}_0 + \mathcal{K}_j(\mathbf{A}, \mathbf{r}_0) \cup \mathcal{W}} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 \quad (4)$$

を解くことになる。

4 適応的な Augmented GMRES(m) 法

GMRES 法を用いれば, 理論的には高々 n 回の反復により真の解が求まる。しかし, 計算量や記憶容量の観点から実用的であるとは言えず, Arnoldi 原理により生成する正規直交ベクトルを $m (\ll n)$ に制限し, その時の近似解 \mathbf{x}_m を次の反復の初期近似解 \mathbf{x}_0 として用いる, リスタート版の GMRES(m) 法がよく用いられる。Augmented GMRES 法においてもリスタートを用いることが可能であり, リスタート版の Augmented GMRES 法を Augmented GMRES(m) 法と呼ぶことにする。

Augmented GMRES(m) 法を実行した際, 付加する空間ごとに各外部反復における初期残差ノルムが大きく異なる。特に, 適した空間を付加した場合に, 他の空間を付加した場合よりも各外部反復

```

01: Input  $j, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ 
02:  $\mathbf{r}_0 := \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_{p+1} := \mathbf{r}_0$ 
03: if RRGMRRES then
04:    $\mathbf{v}_{p+1} := \mathbf{A}\mathbf{r}_0$ 
05: end if
06: if  $p > 0$  then
07:    $\mathbf{A}\mathbf{W} = \mathbf{V}_p \mathbf{H}_p$ 
08:    $\mathbf{v}_{p+1} := (\mathbf{I} - \mathbf{V}_p \mathbf{V}_p^T) \mathbf{v}_{p+1}$ 
09: end if
10:  $\mathbf{v}_{p+1} := \mathbf{v}_{p+1} / \|\mathbf{v}_{p+1}\|_2, \mathbf{V}_{p+1} := [\mathbf{V}_p \mathbf{v}_{p+1}]$ 
11: for  $k = p + 1, \dots, j$  do
12:    $\mathbf{w}_k := \mathbf{A}\mathbf{v}_k$ 
13:   for  $i = 1, \dots, k$  do
14:      $h_{ik} := (\mathbf{w}_k, \mathbf{b}_i)$ 
15:      $\mathbf{w}_k := \mathbf{w}_k - h_{ik}\mathbf{v}_i$ 
16:   end for
17:    $h_{k+1,k} := \|\mathbf{w}_k\|_2$ 
18:    $\mathbf{v}_{k+1} := \mathbf{w}_k / h_{k+1,k}, \mathbf{V}_{k+1} := [\mathbf{V}_k \mathbf{v}_{k+1}]$ 
19: end for
20: Compute  $\mathbf{y}_j$  of (10),  $\mathbf{x}_j$  of (11)

```

図 1: Augmented GMRES, RRGMRRES 法

における初期残差ノルムが小さくなっていることに注目した。

以下, 具体的な算法の構成法について述べることにする。

4.1 QR 分解

まずは, 付加する空間の候補 $\mathcal{W}_i, 1 \leq i \leq l$ それぞれについて QR 分解

$$\mathbf{A}\mathbf{W}_i = \mathbf{V}_{p,i} \mathbf{R}_i \quad (5)$$

を行う。ただし, $\mathbf{W}_i \in \mathbb{R}^n \times p$: 空間 \mathcal{W}_i の基底を各列に持つ行列, $\mathbf{V}_{p,i} \in \mathbb{R}^{n \times p}$: 正規直交行列, $\mathbf{R}_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$: 上三角行列である。

4.2 付加する空間の選択

ここで, Augmented GMRES(m) 法を実行した際, 適した空間を付加した場合に他の空間を付加した

場合よりも各外部反復における初期残差ノルムが小さくなることを利用する。この初期残差と付加する空間とが接点を持つことになるのが、Arnoldi 原理の初期ベクトル $(I - V_{p,i}V_{p,i}^T)\mathbf{r}_0$ である。

そこで、付加する空間の候補それぞれについて Arnoldi 原理の初期ベクトルのノルム

$$\|(I - V_{p,i}V_{p,i}^T)\mathbf{r}_0\|_2 \quad (6)$$

を計算し、その値が最も小さくなる空間を V_p とし、付加することにする。

4.3 空間の付加

付加する空間が決定したので、ここからは Augmented GMRES 法と同様の演算を行う。

Arnoldi 原理により決定される列を式 5 の各行列に加えていき、 j 回の反復の後に Arnoldi 分解

$$A[WV_{p+1:p+j}] = V_{p+j+1}H \quad (7)$$

を得る。ただし、 $V_{p+1:p+j+1}$ は Krylov 部分空間 $\mathcal{K}_j(A, \mathbf{r}_0)$ の正規直交基底を各列に持つ正規直交行列、 H は上 Hessenberg 行列である。一般に GMRES 法は Arnoldi 原理の初期ベクトルに初期残差ベクトル \mathbf{r}_0 を用いる。一方、空間の付加を行なう場合には Arnoldi 原理の初期ベクトルに $(I - V_pV_p^T)\mathbf{r}_0$ を用いることで、 V_p の各列に対する $V_{p+1:p+j+1}$ の各列の直交性が保たれ、 $V_{p+j+1} = [V_pV_{p+1:p+j+1}]$ は、正規直交行列となる。

4.4 最小二乗問題を導く

空間 $\mathbf{x}_0 + \mathcal{K}_j(A, \mathbf{r}_0) \cup \mathcal{W}$ における任意のベクトルは

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + [WV_{p+1:p+j+1}]\mathbf{y} \quad (8)$$

と表されることを踏まえ、式 (5) を用いて残差ノルムを次のように変形する。

$$\begin{aligned} \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2 &= \|\mathbf{b} - A(\mathbf{x}_0 + [WV_{p+1:p+j+1}]\mathbf{y})\|_2 \\ &= \|\mathbf{r}_0 - A[WV_{p+1:p+j+1}]\mathbf{y}\|_2 \\ &= \|\mathbf{r}_0 - V_{p+j+1}H\mathbf{y}\|_2 \\ &= \|V_{p+j+1}\|_2 \|V_{p+j+1}^T\mathbf{r}_0 - H\mathbf{y}\|_2 \\ &= \|V_{p+j+1}^T\mathbf{r}_0 - H\mathbf{y}\|_2 \end{aligned} \quad (9)$$

よって、最小二乗問題

$$\min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{p+j}} \|V_{p+j+1}^T\mathbf{r}_0 - H\mathbf{y}\|_2 \quad (10)$$

```

01: Input  $j, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, W_i \in \mathbb{R}^{n \times p_i}, 1 \leq i \leq l$ 
02: for  $i = 1, \dots, l$ 
03:    $AW_i = V_{p_i}H_i$ 
04:    $\mathbf{v}_{p+1} := (I - V_{p_i}V_{p_i}^T)\mathbf{v}_{p+1}$ 
05: end for
06:  $\mathbf{r}_0 := \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_{p+1} := \mathbf{r}_0$ 
07: if RRGMRRES then
08:    $\mathbf{v}_{p+1} := A\mathbf{r}_0$ 
09: end if
10:  $\mathbf{v}_{p+1} := \min_{1 \leq i \leq l} (\|\mathbf{v}_{p+1}\|_2, \mathbf{v}_{p+1})$ 
11:  $\mathbf{v}_{p+1} := \mathbf{v}_{p+1} / \|\mathbf{v}_{p+1}\|_2, V_{p+1} := [V_p \mathbf{v}_{p+1}]$ 
12: for  $k = p + 1, \dots, j$  do
13:    $\mathbf{w}_k := A\mathbf{v}_k$ 
14:   for  $i = 1, \dots, k$  do
15:      $h_{ik} := (\mathbf{w}_k, \mathbf{b}_i)$ 
16:      $\mathbf{w}_k := \mathbf{w}_k - h_{ik}\mathbf{v}_i$ 
17:   end for
18:    $h_{k+1,k} := \|\mathbf{w}_k\|_2$ 
19:    $\mathbf{v}_{k+1} := \mathbf{w}_{k+1} / h_{k+1,k}, V_{k+1} := [V_k \mathbf{v}_{k+1}]$ 
20: end for
21: Compute  $\mathbf{y}_j$  of (10),  $\mathbf{x}_j$  of (11)

```

図 2: 適応的な Augmented GMRES, RRGMRRES 法

の解を \mathbf{y}_j とすると、式 (4) の解は

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_0 + [WV_{p+1:p+j+1}]\mathbf{y}_j \quad (11)$$

となる。

4.5 リスタート

求まった近似解 \mathbf{x}_j を、新たに初期近似解 \mathbf{x}_0 とし、付加する空間の選択からリスタートする。反復終了条件を満たした場合は反復をやめ、 \mathbf{x}_j を最終的な近似解とする。

5 線形離散悪条件問題

連立 1 次方程式 (1) における係数行列 A が、ill-determined rank であるとする。つまり、行列 A は大きさの順序の異なる多くの微小な特異値を持ち、

悪条件であるとする。

このような行列 A を係数行列とする連立 1 次方程式は、画像修復の分野などに登場する、第 1 種 Fredholm 積分方程式といった悪条件な線形問題を離散化する際に生じる。Hansen [6] にない、こういった問題を線形離散悪条件問題と呼ぶ。

線形離散悪条件問題においては多くの場合、右辺ベクトル \mathbf{b} は離散化時に発生する打ち切り誤差を含み

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \mathbf{e} \quad (12)$$

となる。ただし、 \mathbf{e} は誤差とする。今、既知である $\hat{\mathbf{b}}$ について $A\mathbf{x}$ との等号は成立しないため、これまで考えてきた GMRES 法などを用いる場合には、最初に

$$A\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}} \quad (13)$$

を解いてから、最小 2 乗問題

$$\|\hat{\mathbf{x}}_* - \mathbf{x}\| = \min \|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| \quad (14)$$

を考え、最終的に近似解 $\hat{\mathbf{x}}_*$ を得る。

5.1 RRGMRRES 法

Calvetti ら [4] による RRGMRRES (Range Restricted GMRES) 法は、通常の GMRES 法において用いる Krylov 部分空間 $\mathcal{K}_j(A, \mathbf{r}_0)$ を、 $\mathcal{K}_j(A, A\mathbf{r}_0)$ として行う。つまり、近似解を構成するベクトルの含まれる空間を、行列 A の値域に制限する。

すなわち、これは GMRES 法における最小 2 乗問題である式 (3) を

$$\|A\mathbf{x}_j - \mathbf{b}\| = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}_0 + \mathcal{K}_j(A, A\mathbf{r}_0)} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| \quad (15)$$

$$\mathcal{K}_j(A, A\mathbf{r}_0) = A\mathcal{K}_j(A, \mathbf{r}_0) \quad (16)$$

と置き換えることになる。

5.1.1 RRGMRRES 法の有効性

$$\|A\mathbf{b}\| \ll \|\mathbf{b}\| \quad (17)$$

と仮定すると、式 (5) で求まる H_j の条件が非常に悪い場合、最小 2 乗問題 (10) も悪条件になる。

しかし RRGMRRES 法は、GMRES 法の初めのステップを

$$\mathbf{v}_1 = A(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_0)$$

として行うため、条件 (17) により、標準的な GMRES 法よりも H_j の条件が良くなると考えられる。

RRGMRRES 法は、Augmented GMRES 法、適応的な Augmented GMRES 法に対しても同様に適用が可能である。それぞれ、Augmented RRGMRRES 法、適応的な Augmented RRGMRRES 法と呼ぶことにする。また、各手法のリスタート版を Augmented RRGMRRES(m) 法、適応的な Augmented RRGMRRES(m) 法と呼ぶ

6 数値実験

適応的な Augmented GMRES 法の有効性を確かめるために、線形離散悪条件問題に対して数値実験を行った。

付加する空間の候補として、以下の 3 つを用いる。

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ \vdots \\ 1n \end{bmatrix}, W_3 = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 12 & 4 \\ \vdots & \vdots \\ 1n & n^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{W}_k = \text{range } W_k, 1 \leq k \leq 3$$

一般に、悪条件問題を扱う際に残差ノルムを精度の指標として用いるのは適当でないと考えられるため、相対誤差ノルム $\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ の変移から、最も良く近似されていると考えられる解 $\hat{\mathbf{x}}_*$ を最終的な近似解とする。さらに、最終的な近似解 $\hat{\mathbf{x}}_*$ と真の解 \mathbf{x} とを図示する。

6.1 実験環境

実験は、次の環境で行った。

OS: Fedora Core 4

CPU: HP Compaq ProLiant DL145

メモリ: 4.0GB

計算精度: 倍精度

プログラム言語: C 言語

マシン C プシロン: 2.220446×10^{-16}

最大反復回数: 100

表 1: 数値例 1 : 相対誤差ノルムが最小値をとるまでの反復回数と残差ノルム

算法	反復回数	相対誤差ノルム
RRGMRES(5)	100	4.59×10^{-1}
Augmented RRGMRRES(5) with \mathcal{W}_3	1	9.55×10^{-3}
適応的な Augmented RRGMRRES(5)	1	9.57×10^{-3}

6.2 数値例 1

Hansen [5] による Regularization Tools のテスト問題より, Matlab 関数 deriv2 を使い, 係数行列 A と真の解 x を作成した.

Matlab 関数 deriv2 は, 第 1 種 Fredholm 積分方程式

$$\int_0^1 K(s, t)x(t)dt = e^s + (1 - e)s - 1, 0 \leq s \leq 1,$$

$$K(s, t) = \begin{cases} s(t-1) & s < t \\ t(s-1) & s \geq t \end{cases}$$

を Galerkin 法を用いて離散化する関数である. ただし, $x(t) = e^t$, $\|A\| \|A^{-1}\| = 4.9 \times 10^4$ である.

ここでは $n = 200$ とし, $A \in \mathbb{R}^{200 \times 200}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{200}$ を得る. 右辺ベクトル \mathbf{b} に含まれる誤差 \mathbf{e} の要素には, ノルムが 3.56×10^{-4} となるように正規乱数を与えた.

比較のため, 標準的な RRGMRRES 法, 従来の Augmented RRGMRRES(5) 法で最も良い振る舞いをした空間 \mathcal{W}_3 を付加した場合と, 適応的な Augmented RRGMRRES(5) 法とを適用した.

図 3, 図 4 より, 標準的な RRGMRRES(5) 法に比べて Augmented GMRES(5) 法, 適応的な Augmented GMRES(5) 法が近似の精度が良いことがわかる. 更に, 図 3 を見ると Augmented GMRES(5) 法を適用した場合と適応的な Augmented GMRES(5) 法を適用した場合の相対誤差ノルムの振る舞いはほぼ一致している.

また, 表 1 からは Augmented GMRES(5) 法を適用した場合と適応的な Augmented GMRES(5) 法を適用した場合の誤差ノルムの最小値がほぼ一致していることがわかる.

よって, 適応的な Augmented RRGMRRES 法を適用した場合にも Augmented RRGMRRES(5) 法と同程度の近似精度が得られることがわかった.

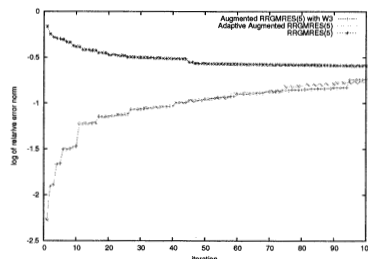


図 3: 数値例 1 : 残差ノルム vs. 反復回数

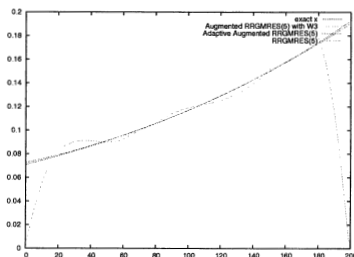


図 4: 数値例 1 : 真の解と近似解

6.3 数値例 2

Hansen [5] による Regularization Tools のテスト問題より, Matlab 関数 baart を使い, 係数行列 A と真の解 x を作成した.

Matlab 関数 baart は, 第 1 種 Fredholm 積分方程式

$$\int_0^\pi \exp(s \cos(t))x(t)dt = b(s), 0 \leq s \leq \frac{\pi}{2} \quad (18)$$

$$b(s) = 2 \frac{\sinh(s)}{s}$$

を Galerkin 法を用いて離散化する関数である. ただし, $x(t) = \sin(t)$ である.

ここでは $n = 1000$ とし, $A \in \mathbb{R}^{1000 \times 1000}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{1000}$ を得る. 右辺ベクトル \mathbf{b} に含まれる誤差 \mathbf{e} の要素には, ノルムが 3.04×10^{-5} となるように正規乱数

表 2: 数値例 2 : 相対誤差ノルムが最小値をとる際の反復回数と誤差ノルム

算法	反復回数	誤差ノルム
RRGMRES(5)	4	6.20×10^{-1}
Augmented RRGMRRES(5) with \mathcal{W}_3	6	5.90×10^{-1}
適応的な Augmented RRGMRRES(5)	12	3.09×10^{-2}

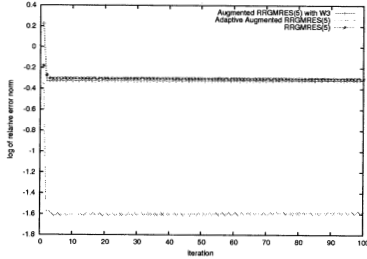


図 5: 数値例 2 : 残差ノルム vs. 反復回数

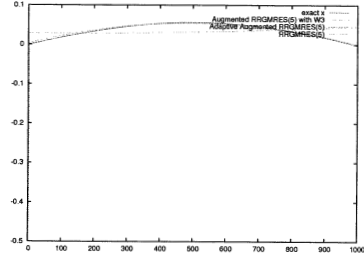


図 6: 数値例 2 : 真の解と近似解

を与えた.

比較のため, 標準的な RRGMRRES 法, 従来の Augmented RRGMRRES(5) 法で最も良い振る舞いをした空間 \mathcal{W}_3 を付加した場合と, 適応的な Augmented RRGMRRES(5) 法とを適用した.

図 5, 図 6 より, 標準的な RRGMRRES(5) 法に比べて Augmented GMRES(5) 法の方が, 更に適応的な Augmented GMRES(5) 法を適用した場合の近似精度が良いことがわかる. 更に, 図 3 を見ると Augmented GMRES(5) 法を適用した場合と適応的な Augmented GMRES(5) 法を適用した場合では相対誤差ノルムが大幅に減少していることがわかる.

また, 表 2 からは Augmented GMRES(5) 法を適用した場合と適応的な Augmented GMRES(5) 法を適用した場合では誤差ノルムの最小値がほぼ 1/10 になっていることがわかる.

よって, 適応的な Augmented RRGMRRES 法を適用した場合, Augmented RRGMRRES(5) 法よりも近似精度が高くなることがわかった.

7 おわりに

数値実験により, GMRES 法における適応的な Augmentation は, 従来の Augmented GMRES 法と同等かそれ以上の効果を得られることがわかった.

今後の課題としては, 他の悪条件問題への適用, 大規模な問題への適用などでも効果が得られるか

を確かめることがあげられる.

参考文献

- [1] Saad, Y. and Schultz, M. H.: “GMRES: A generalized minimal residual method for solving non-symmetric linear systems,” *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 1986; **7**: 856–869.
- [2] Saad, Y.: “Iterative Methods for Sparse Linear Systems, 2nd ed,” SIAM, Philadelphia, 2003.
- [3] Baglama, J. and Reichel, L.: “Augmented GMRES-type method,” *Numerical Linear Algebra with Applications*, 2007; **14**: 337–350.
- [4] Calvetti, D., Lewis, B. and Reichel, L.: “GMRES-type method for inconsistent systems,” *Linear Algebra and its Applications*, 2000; **316**: 157–169.
- [5] Hansen, P. C.: “Regularization tools: A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems,” *Numerical Algorithms*, 1994; **6**: 1–35.
- [6] Hansen, P. C.: “Rank Deficient and Discrete Ill-Posed Problems”, SIAM: Philadelphia, 1998.