社団法人 情報処理学会　研究報告
IPSJ SIG Technical Report
2008－HPC－116　(25)
2008／8／6

並列線形計算ライブラリ Lis 上への固有値解法群の実装と特性評価

西　田　　晃 †

大規模疎行列の少数の固有値を数値的に求める場合, Krylov 部分空間法は最も有力な手法として知られている. Krylov 部分空間法には複数の手法があり, 一部の解法は適切な前処理手法と組み合わせることによってより高速に固有値を計算することができるが, 評価に際してはこれらのライブラリを用意する必要がある. 本研究では, 疎行列向けの代表的な固有値解法について. 並列線形計算ライブラリ Lis 上に実装を行うとともに, 各固有値解法の並列環境上での特性について報告する.

Implementation and Evaluation of Eigensolvers using Parallel Linear Algebra Library Lis

AKIRA NISHIDA †

When we need to compute some eigenvalues of a large sparse matrix numerically, the Krylov subspace method is known to be the optimal choice. Combining appropriate preconditioners with the some Krylov subspace method, you can compute the eigensolutions more efficiently, although the evaluation of the such solvers needs pre-built linear algebra libraries. This study implements the existing major eigensolvers for sparse matrices on parallel linear algebra library Lis and reports the results of the parallel implementation of eigensolvers using Lis.

1. 背　　景

大規模疎行列の固有値を数値的に求める場合, いくつかの解法を考えることができ, 冪乗法, 逆反復法, Lanczos 法, (Jacobi-) Davidson 法, 共役勾配法等の Krylov 部分空間法が提案されている. 多くの場合, 最大または最小のものから数個の固有値 (及び固有ベクトル) を求めればよいため, 疎行列性を保存するこれらの解法は, 実アプリケーションにおいて広く用いられている.

本研究では, これらの解法について並列線形計算ライブラリ Lis ☆ 上への実装を行い, 多くの計算機環境で大規模な固有値問題を容易に扱えるようにすることを目的としている. 本稿では, 現時点での実装の状況と各解法の評価結果について報告する.

冪乗法・逆反復法

冪乗法, 逆反復法は, Krylov 部分空間法に属する最も単純な解法である. これらの方法では, サイズ n の大規模行列 A (逆反復法の場合は A^{-1}. 以下冪乗法の場合について説明する.) の固有値を絶対値最大のものから☆☆ 求めるため, これを次元 $\nu \ll n$ のベクトル部分空間 G_l 上への直交射影に関する固有値問題に近似する. 射影を表す行列を π_l とすれば, 問題は G_l において

$$\pi_l(Ax_l - \lambda_l x_l) = 0 \tag{1}$$

を満たす近似固有対

$$\lambda_l \in C, \quad 0 \neq x_l \in G_l \tag{2}$$

の計算に帰着される. 部分空間 S を生成する r 個の独立なベクトルを

$$U = [u_1, ..., u_r], \quad 1 \leq r < n \tag{3}$$

とすると, G_l 内の正規直交基底の選び方によって,

$$S_l = A^l S, \quad l = 1, 2, ... \tag{4}$$

とすれば $r = 1$ の場合は冪乗法, また $r > 1$ ならば部分空間反復法となる. なお冪乗法, 逆反復法は今回 Lis 上に実装済みである.

Lanczos 法

$\{u_1, ..., u_r\}$ によって生成される Krylov 部分空間を

$$\mathcal{K}_l = \mathrm{lin}(S, AS, ..., A^{l-1}S) \tag{5}$$

とすると, A が Hermite 行列ならば Lanczos 法 ($r = 1$) , ブロック Lanczos 法 ($r > 1$) が得られる. これらの方法では, 写像が三重対角行列 H_l で表される $\mathcal{K}_l$

† 九州大学情報基盤研究開発センター
Research Institute for Information Technology, Kyushu University

☆ http://www.ssisc.org/lis/

☆☆ 以下単に最大固有値と書く.

の正規直交基底 $\{v_i\}_1^l$ を求め, H_l の固有対を元の問題の近似解として計算する. なお Lanczos 法は今回 Lis 上に実装済みである.

(Jacobi-) Davidson 法

Davidson 法では, 正規直交基底 $\{v_i\}_1^k$ で張られる部分空間 $\mathcal{K} = \mathrm{span}\{v_1, ..., v_k\}$ 上で行列 A の Ritz 値 θ_k 及び Ritz ベクトル u_k を計算する際に, 残差 $r = Au_k - \theta_k u_k$ に関する修正方程式

$$M_k t = r, \quad M_k = D_A - \theta_k I \tag{6}$$

を解いて u_k を更新し, $\mathcal{K}$ の次元を拡張する. D_A は A の対角成分である. 具体的には, t を $\mathcal{K}$ と直交化して v_{k+1} を得る. $V_{k+1} = [v_1, ..., v_{k+1}]$ と置けば, 新しい Ritz 対 (θ_{k+1}, u_{k+1}) は行列

$$H_{k+1} = V_{k+1}^* A V_{k+1} \tag{7}$$

の固有対として計算されることになる. $M_k = I$ の場合には Lanczos 法と同一になるので, Davidson 法は加速付 Lanczos 法の一種と考えることができる. なお,

$$M_k^{-1} \approx (A - \theta_k I)^{-1} \tag{8}$$

を残差ベクトル r に対する前処理行列と考えると, この方法では θ_k に対応する近似固有ベクトル u_k の方向の成分を増幅させることになり, 対角優位な行列の最大固有値を求める場合にしか顕著な効果が得られないことが分かっている[1]. このため, Jacobi-Davidson 法では u_k の直交補空間から更新のための成分を取り出すことによってこの問題点を解消している[2]. これらの解法は, 固有ベクトルが必要な場合には得られた固有値をもとに逆反復法等により計算することになるため, 余分な計算量を要する. Davidson 法については現時点では実装を行っていない.

共役勾配法

実対称行列 A, B に関する一般化固有値問題

$$Ax = \lambda Bx \tag{9}$$

の最小固有値, またはこれと同値な問題

$$Bx = \mu Ax, \quad \mu = 1/\lambda \tag{10}$$

の最大固有値の計算を
Rayleigh 商

$$\mu(x) = \frac{x^T Bx}{x^T Ax} \tag{11}$$

の極値問題に帰着し, 最急勾配方向が

$$\nabla\mu(x) \equiv g(x) = \frac{2(Bx - \mu Ax)}{x^T Ax} \tag{12}$$

であることから, 適当な係数 α_i を用いて

$$x_{i+1} = x_i + \alpha_i p_i, \tag{13}$$

から最急上昇法を, また, 修正方向 p として

$$p_i = -g_i + \beta_{i-1} p_{i-1}, \ \beta_{i-1} = \frac{g_i^T g_i}{g_{i-1}^T g_{i-1}} \tag{14}$$

などを用いることにより, 共役勾配法を導くことができる[3]. これは1951年に Hestenes らにより提案され, Fletcher らが発展させた手法であるが[4],[5], 1980年代以降の Knyazev らの研究[6]~[8] により, 適切な前処理と組み合わせることによって高速に固有値を計算できることが明らかになった.

前処理付固有値解法のアルゴリズムは, 前処理行列 $T \approx A^{-1}$, TA, TB に関する m_k 次多項式 $P_{m_k}(TA, TB)$ を用いて以下のように書くことができる.

(1) 初期ベクトル $x^{(0)}$ を選択する
(2) m_k 回の反復により $x^{(k)} = P_{m_k}(TA, TB)x^{(0)}$ を計算する
(3) $\mu^{(k)} = (x^{(k)}, Bx^{(k)})/(x^{(k)}, Ax^{(k)})$ を計算する

前処理付共役勾配法の反復は, 適当な初期ベクトル $x^{(0)}$ と対応する修正ベクトル $p^{(0)} = 0$ を用いて,

$$\mu^{(i)} = (x^{(i)}, Bx^{(i)})/(x^{(i)}, Ax^{(i)}) \tag{15}$$

$$r = Bx^{(i)} - \mu^{(i)} Ax^{(i)} \tag{16}$$

$$w^{(i)} = Tr \tag{17}$$

$$x^{(i+1)} = w^{(i)} + \tau^{(i)} x^{(i)} + \gamma^{(i)} p^{(i)} \tag{18}$$

$$p^{(i+1)} = w^{(i)} + \gamma^{(i)} p^{(i)} \tag{19}$$

と書くことができる. ここでは行列束 $Bx^{(i)} - \mu^{(i)} Ax^{(i)}$ に関する $\mathrm{span}\{w, x^{(i)}, p^{(i)}\}$ 上の Ritz 値, Ritz ベクトルを Rayleigh-Ritz 法を用いて計算し, 最大 Ritz 値に対応する Ritz ベクトルを $x^{(i+1)}$ とする. すなわち, 係数 $\tau^{(i)}$, $\gamma^{(i)}$ の値は, $\mathrm{span}\{w, x^{(i)}, p^{(i)}\}$ 上での局所的な最適解をもとに決められる. これによって, ベクトル間の直交性をもとに各係数を明に計算する必要のある従来の方法と比較して, 少ない計算量で更新値を求めることができる.

なお共役勾配法は既に Lis 上に実装済みである.

2. 非対称問題への適用

非対称問題への適用に関しては, 3つの系統の手法が提案されている.

Arnoldi 法

$\{u_1, ..., u_r\}$ によって生成される Krylov 部分空間を

$$\mathcal{K}_l = \mathrm{lin}(S, AS, ..., A^{l-1}S) \tag{20}$$

とすると, A が 非 Hermite 行列ならば Arnoldi 法, ブロック Arnoldi 法が得られる. これらの方法では, 写像が Hessenberg 行列 H_l で表される $\mathcal{K}_l$ の正規直交基底 $\{v_i\}_1^l$ を求め, H_l の固有対を元の問題の近似解として計算する.

(Jacobi-) Davidson 法

Davidson 法では, 正規直交基底 $\{v_i\}_1^k$ で張られる部分空間 $\mathcal{K} = \mathrm{span}\{v_1, ..., v_k\}$ 上で行列 A の Ritz

値 θ_k 及び Ritz ベクトル u_k を計算する際に, 残差 $r = Au_k - \theta_k u_k$ に関する修正方程式

$$M_k t = r, \quad M_k = D_A - \theta_k I \tag{21}$$

を解いて u_k を更新し, $\mathcal{K}$ の次元を拡張する. D_A は A の対角成分である. 具体的には, t を $\mathcal{K}$ と直交化して v_{k+1} を得る. $V_{k+1} = [v_1, ..., v_{k+1}]$ と置けば, 新しい Ritz 対 (θ_{k+1}, u_{k+1}) は行列

$$H_{k+1} = V_{k+1}^* A V_{k+1} \tag{22}$$

の固有対として計算されることになる. $M_k = I$ の場合には Arnoldi 法と同一になるので, Davidson 法は加速付 Arnoldi 法の一種と考えることができる.

共役残差法による方法

行列 A, B が非対称な場合には, 共役勾配法の代わりに Rayleigh 商以外の汎関数に対して共役残差法を適用する方法が提案されている[9),10)]. ここでは, 固有値問題の残差を

$$r = \lambda Bx - Ax, \tag{23}$$

$$\lambda = (Ax, Bx)/(Bx, Bx) \tag{24}$$

で定義する. x が固有値ベクトルに等しければ, λ は対応する固有値に一致する. ここでは最小化すべき関数として残差 r の内積

$$F(r) = (r, r) \tag{25}$$

を選び, 共役残差法 (Orthomin(1)) を適用する. すなわち, 初期値 x_0 から

$$\lambda^{(0)} = (Ax^{(0)}, Bx^{(0)})/(Bx^{(0)}, Bx^{(0)}), \tag{26}$$

$$r^{(0)} = \lambda^{(0)} Bx^{(0)} - Ax^{(0)}, \tag{27}$$

$$p^{(0)} = r^{(0)} \tag{28}$$

を求め, 以下の反復

$$\begin{aligned}\alpha^{(i)} &= [(r^{(i)}, Ap^{(i)}) - \lambda^{(i)}(r^{(i)}, Bp^{(i)})] \\ &\quad / \ [(Ap^{(i)}, Ap^{(i)}) - 2\lambda^{(i)}(Ap^{(i)}, Bp^{(i)}) \\ &\quad +(\lambda^{(i)})^2(Bp^{(i)}, Bp^{(i)})],\end{aligned} \tag{29}$$

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + \alpha^{(i)} p^{(i)}, \tag{30}$$

$$\lambda^{(i+1)} = (Ax^{(i+1)}, Bx^{(i+1)})/(Bx^{(i+1)}, Bx^{(i+1)}), \tag{31}$$

$$r^{(i+1)} = \lambda^{(i+1)} Bx^{(i+1)} - Ax^{(i+1)}, \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\beta^{(i)} &= -[(Ar^{(i+1)}, Ap^{(i)}) \\ &\quad -\lambda^{(i+1)}\{(Ar^{(i+1)}, Bp^{(i)}) \\ &\quad +(Ap^{(i)}, Br^{(i+1)})\} \\ &\quad +(\lambda^{(i+1)})^2(Br^{(i+1)}, Bp^{(i)})] \\ &\quad / \ [(Ap^{(i)}, Ap^{(i)}) - 2\lambda^{(i+1)}(Ap^{(i)}, Bp^{(i)}) \\ &\quad +(\lambda^{(i+1)})^2(Bp^{(i)}, Bp^{(i)})],\end{aligned} \tag{33}$$

$$p^{(i+1)} = r^{(i+1)} + \beta^{(i)} p^{(i)} \tag{34}$$

を相対残差

$$\begin{aligned}\epsilon^{(i)} &= \| \lambda^{(i)} Bx^{(i)} - Ax^{(i)} \|_2 \\ &\quad / \ \| \lambda^{(i)} Bx^{(i)} \|_2\end{aligned} \tag{35}$$

が十分小さくなるまで繰り返す.

非対称問題向けの解法については, 現時点では Lis 上に実装していない.

3. 前 処 理

一般化固有値問題

$$Ax = \lambda Bx \tag{36}$$

において, 固有値 λ が既知であると仮定すると, これに対応する固有ベクトルは

$$(A - \lambda B)x = 0, \quad x \neq 0 \tag{37}$$

を解くことにより求めることができる. すなわち, 固有値解法における理想的な前処理行列 T は $A - \lambda B$ の逆行列であり, 実際には未知の λ を Ritz 値で置き換えた前処理行列を考えることもできる. 一般にこのように前処理行列を取ると不定値となるため, T が対称正定値でなければならない場合には

$$T \approx A^{-1} \tag{38}$$

と取ればよい. 特に連立一次方程式 $Ax = f$ の解法が与えられている場合には, 前処理の計算も容易である. このように定めた T に関して,

$$w^{(i)} = Tr \tag{39}$$

すなわち

$$T^{-1} w^{(i)} = r \tag{40}$$

を解く.

解くべき固有値問題における行列の性質が分かっている場合には, これを利用して適切な前処理手法を選択することができる. 問題が非対称である場合, 以下のような前処理が考えられる.

共役残差法のアルゴリズムにおいては, 行列 A を

$$A = LDU + E \tag{41}$$

の形に不完全 LU 分解した結果から, 左からの前処理

$$(LDU)^{-1} Ax = \lambda (LDU)^{-1} Bx \tag{42}$$

と右からの前処理

$$\begin{aligned}&A(LDU)^{-1}(LDUx) \\ &= \lambda B(LDU)^{-1}(LDUx)\end{aligned} \tag{43}$$

が提案されている[9)]. 前者は上記の共役残差法のアルゴリズムにおいて係数行列 A, B を $(LDU)^{-1}A$, $(LDU)^{-1}B$ で, また後者は直交係数 β と修正方向 p をそれぞれ

$$
\begin{aligned}
\beta^{(i)} = &-[(A(LDU)^{-1}r^{(i+1)}, Ap^{(i)}) \\
&-\lambda^{(i+1)}\{(A(LDU)^{-1}r^{(i+1)}, Bp^{(i)}) \\
&+(Ap^{(i)}, B(LDU)^{-1}r^{(i+1)})\} \\
&+(\lambda^{(i+1)})^2(B(LDU)^{-1}r^{(i+1)}, Bp^{(i)})] \\
&/\ [(Ap^{(i)}, Ap^{(i)}) - 2\lambda^{(i+1)}(Ap^{(i)}, Bp^{(i)}) \\
&+(\lambda^{(i+1)})^2(Bp^{(i)}, Bp^{(i)})], \qquad (44)
\end{aligned}
$$

$$
p^{(i+1)} = (LDU)^{-1}r^{(i+1)} + \beta^{(i)}p^{(i)}. \qquad (45)
$$

で置き換えたものに相当する．数値実験[9] の結果から，前処理の結果非対称性が増大する場合に性能に影響が生じることがあるものの，いずれの場合にも収束することが分かっているが，これらの方法はLU 分解を伴うため，並列化が困難である．このような場合には，代数的マルチグリッド前処理[11] 等の前処理が適していると考えられる．

4. Lis を用いた実装

既存の線形計算ライブラリはいくつかあるが，本研究では，科学技術振興機構CREST 事業の一環として開発を進めてきた Lis 上への固有値解法の実装を進めている．Lis は複数の行列格納形式に対応した並列反復解法ライブラリであり，反復解法向けの基本演算ルーチンや，先述した代数的マルチグリッド前処理を含む各種の前処理法を実装している．

海外においても，Valencia 工科大学による固有値解法ライブラリ SLEPc (Argonne 米国立研究所の並列反復解法ライブラリ PETSc をベースとして開発されている) や，Lawrence Berkeley 米国立研究所による並列反復解法ライブラリ Hypre に疎行列向けの固有値解法が実装されている．

これらのライブラリではいずれもオブジェクト指向に基づいた設計を行っており，すべてのデータは API を用いて処理されている．すなわち，行列，ベクトルデータ等の生成・廃棄，及びこれらのオブジェクトに対する操作は，それぞれの操作を記述する API を呼び出すことにより処理される．各前処理手法はそれぞれ線形解法として実装され，必要に応じて前処理として利用することができるようになっており，これらを組み合わせて評価することができる．

本研究では，Lis を用いて上記の固有値解法を実装し，評価を行った．なお逆反復法系の解法では，A^{-1} を反復ベクトルに適用する際に連立一次方程式を解く必要があり，前処理の利用は有効である．表1, 2 に対応している反復解法，前処理手法を示す．Lis ではこれらを自由に組み合わせて固有値解法を構成することができる．

実装した解法は，Lis の固有値計算アルゴリズムとして収録され，要素演算と反復解法，前処理に関するライブラリを必要に応じて使用している．現時点では

表1 Lis で利用可能な反復解法

CG
BiCG
CGS
BiCGSTAB
GPBiCG
BiCGSafe
BiCGSTAB(l)
Jacobi
Gauss-Seidel
SOR
CR
BiCR
CRS
BiCRSTAB
GPBiCR
BiCRSafe
BiCRSTAB(l)
TFQMR
Orthomin(m)
GMRES(m)
FGMRES(m)
IDR(s)

表2 Lis で利用可能な前処理

Jacobi
SSOR
ILU(k)
ILUT
Crout ILU
I+S
SA-AMG
Hybrid
SAINV
Additive Schwarz
ユーザ定義前処理

対称問題に対応しており，対称な疎行列固有値問題を解くことができる．図1 にその構成を示す．反復解法部は行列等のデータに関する要素演算として定義された Lis の API を用いて記述されており，MPI を用いた並列化はこのレベルで行われている．

Lis に実装されている前処理手法について，主なものを簡単に述べる．

- 対角スケーリング・Jacobi 前処理
  これらは前処理としては単純な方法であるが，スケーラビリティに関して良好な性能を示す．
- SSOR・Hybrid 前処理
- 不完全 LU 分解前処理
  ILU 前処理のスケーラブルな実装．問題サイズがプロセッサ数に比例する場合に，ほぼ一定の計算時間で処理することができる．ILU(k), ILUT, Crout ILU が実装されている．
- SA-AMG[11] 前処理
  代数的マルチグリッド法の逐次・並列実装．Lis で

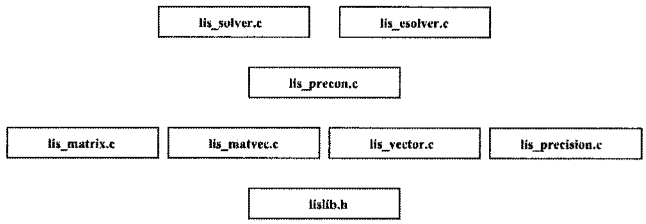

図1　固有値解法ライブラリ lis_esolver.c を含めた Lis の階層構造

は前処理の一つとして実装され，クリロフ部分空間法の前処理として用いることができる．

- 近似逆行列前処理
- Additive Schwarz 前処理

5. 性 能 評 価

Lis 上に実装した固有値解法の性能について調べるため，九州大学情報基盤研究開発センターの富士通 PRIMEQUEST580 (1.6GHz Intel デュアルコア Itanium 2 プロセッサ × 32) 8 ノードを用いて評価を行った．インターコネクトにはノード当たり InfiniBand 4x DDR 4 本を使用しており，片方向の帯域幅は 40Gbps である．

ここでは，1 次元 Poisson 問題の係数行列について，最大固有対 (最大固有値と対応する固有ベクトル) を冪乗法，Lanczos 法，共役勾配法，最小固有対を冪乗法，共役勾配法により計算した．相対残差ノルムの閾値を 10^{-5} とし，非零要素数がプロセッサ数に比例するよう問題サイズを取って反復解法部の実行時間を測定した結果を表 3-7 に示す．なお逆反復法，Lanczos 法，共役勾配法 (最小固有対を計算する場合) では，連立一次方程式解法として局所 ILU 前処理付き共役勾配法を選択している．

これらの結果から，連立一次方程式の求解が必要になる解法についてはノードをまたがった通信が増大した場合のスケーラビリティに問題があるものの，その他の解法では十分な性能が得られていることが分かる．なお前者については局所 ILU 前処理の特性による可能性があり，現在実機上で検証を行っている段階である．また Lanczos 法と逆反復法，共役勾配法 (最小固有対を求める場合) とでは収束特性が異なっているが，これは最大，最小固有値付近の固有値分布，要求精度等に依存する．

6. む す び

本稿では，疎行列向け固有値解法について，本研究でこれまでに得られている知見をまとめるとともに，線形計算ライブラリ Lis 上への実装結果について報告した．

並列解法の収束特性などに関しては，未解明な部分も残っている．今後大規模問題を対象として，各解法の特性を明らかにしていく必要がある．

謝辞　本研究の一部は，九州大学情報基盤研究開発センター「先端的計算科学研究プロジェクト」によるものである．

参 考 文 献

1) Sleijpen, G. L. G. and van der Vorst, H. A.: A Jacobi-Davidson iteration method for linear eigenvalue problems, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, Vol. 17, No. 2, pp. 401–425 (1996).
2) 西田晃，小柳義夫: 大規模固有値問題のための Jacobi-Davidson 法とその特性について，情報処理学会論文誌, Vol. 41, No. SIG8, pp. 101–106 (2000).
3) Fletcher, R. and Reeves, C. M.: Function minimization by conjugate gradients, *Comp. J.*, Vol. 7, pp. 149–154 (1964).
4) Bradbury, W. W. and Fletcher, R.: New Iterative Method for Solution of the Eigenproblem, *Numer. Math.*, Vol. 9, pp. 259–267 (1966).
5) Hestenes, M. R. and Karush, W.: A method of gradients for the caluculation of the characteristic roots and vectors of a real symmetric matrix, *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.*, Vol. 47, pp. 45–61 (1951).
6) Knyazev, A. V.: Preconditioned eigensolvers—an oxymoron?, *Electron. Trans. Numer. Anal.*, Vol. 7, pp. 104–123 (electronic) (1998). Large scale eigenvalue problems (Argonne, IL, 1997).
7) Knyazev, A. V.: Toward the Optimal Preconditioned Eigensolver: Locally Optimal Block Preconditioned Conjugate Gradient Method, *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. 23, No. 2, pp. 517–541 (2001).
8) Arbenz, P. and Lehoucq, R.: A comparison of

表3　冪乗法による最大固有対の計算結果

Problem Size	100,000	200,000	400,000	800,000	1,600,000	3,200,000	6,400,000
# cores	8	16	32	64	128	256	512
time (s)	0.64	0.41	0.28	0.20	0.17	0.19	0.12

表4　Lanczos 法による最大固有対の計算結果

Problem Size	100,000	200,000	400,000	800,000	1,600,000	3,200,000	6,400,000
# cores	8	16	32	64	128	256	512
time (s)	0.99	2.84	5.76	4.13	33.46	37.09	31.63

表5　共役勾配法による最大固有対の計算結果

Problem Size	100,000	200,000	400,000	800,000	1,600,000	3,200,000	6,400,000
# cores	8	16	32	64	128	256	512
time (s)	0.76	0.51	0.37	0.32	0.30	0.23	0.18

表6　逆反復法による最小固有対の計算結果

Problem Size	10,000	20,000	40,000	80,000	160,000	320,000	640,000
# cores	8	16	32	64	128	256	512
time (s)	0.08	0.45	0.91	2.58	5.82	22.88	37.85

表7　共役勾配法による最小固有対の計算結果

Problem Size	10,000	20,000	40,000	80,000	160,000	320,000	640,000
# cores	8	16	32	64	128	256	512
time (s)	0.67	2.25	2.58	4.47	7.46	17.50	49.34

algorithms for modal analysis in the absense of a sparse direct method, Technical Report SAND2003-1028J, Sandia National Laboratories (2003).

9) 末富英一, 関本博: 多群中性子拡散方程式に現れる非対称行列系の一般固有値問題に対する ORTHOMIN(1) 法の適用, 情報処理学会論文誌, Vol. 30, No. 5, pp. 661–667 (1989).

10) 西田晃: 非対称固有値問題への並列 AMG 前処理付共役残差法の適用と評価, 情処研報, Vol. 2004, No. 80, pp. 85–90 (2004).

11) Fujii, A., Nishida, A. and Oyanagi, Y.: Evaluation of Parallel Aggregate Creation Orders : Smoothed Aggregation Algebraic Multigrid Method, *High Performance Computational Science A*, pp. 99–122 (2005).