

有限境界要素法併用法の解析に向けた IDR(s) 法の収束性評価

草場健一郎[†] 藤野清次* 尾上勇介[†]

([†]九州大学大学院システム情報科学府, *九州大学情報基盤研究開発センター)

本研究では、実際の応用問題の解析で生じた問題に対する IDR(s) 法の並列性能について報告する。まず、IDR 定理と IDR(s) 法そして拡張 IDR 定理の概要を記述し、その算法を紹介する。次に、行列・ベクトルの積の計算に対する、行列のブロック分割、ブロック・サイクリック分割、ハイブリッド分割について記述する。そして有限要素法、境界要素法、それらの併用法により生じた問題に対する数値実験を通して、IDR(s) 法の並列性能評価を比較し論じる。

Convergence evaluation of IDR(s) method suited to the solution of problems of FEM-BEM hybrid analysis

Ken'ichiro KUSABA[†] Seiji FUJINO* Yusuke ONOUE[†]

([†]Graduate School of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University

*Research Institute for Information Technology, Kyushu University)

In this article, effectiveness of parallel implementation of IDR(s) method by means of the block, block-cyclic and hybrid partitionings for matrix-vector multiplication is examined. Through some numerical experiments, validity of IDR(s) method will be shown for realistic problems which stem from FEM, BEM and Hybrid analysis.

1. はじめに

非対称行列を係数行列に持つ連立一次方程式に対して、非対称行列用の反復法 BiCG 法系統の反復法、GMRES 法系統の反復法、そして GCR 法系統の反復法など様々な反復法が提案されてきた。多くの自然科学、工学の分野の数値シミュレーションで利用されている。本稿では、Sonneveld と van Gijzen により提案された IDR(s) 法を OpenMP を用いて並列化し性能結果を報告する。IDR とは **Induced Dimension Reduction** の略であり、数学的帰納法による次元縮小法と呼ばれる。並列化の手法は、反復法の中で、最も計算量が多い行列・ベクトルの積の計算に研究目標を絞り込み、行列に対して、ブロック分割とブロック・サイクリック分割そしてそれらのハイブリッド分割を考察した。

本稿の構成は次のとおりである。第 2 節で、IDR 定理、IDR(s) 法、拡張 IDR 定理の概要を記述する。第 3 節でブロック分割、第 4 節でブロック・サイクリック分割、第 5 節でハイブリッド分割について記述する。第 6 節で、有限要素法と境界要素法の併用法について簡単に触れる。第 7 節で、数値実験において、IDR(s) 法の 3 つの分割法による有限要素法、境界要素法、その併用法の離散化による問題に対する並列性能評価を行う。第 8 節で簡単にまとめる。

2. IDR 定理と IDR(s) 法

解くべき線形方程式を $Ax = b$ とする。 $A = (a_{ij})$ は $N \times N$ の係数行列、 $x \in R^N$ は解ベクトル、 $b \in R^N$ は右辺ベクトルとする。IDR(s) 法の算法の元となる IDR 定理は以下の通りである。

定理 1: IDR 定理

係数行列 $A \in R^{N \times N}$ 、任意のベクトル $v_0 \in R^N$ 、空間 \mathcal{G} を完全 Krylov 部分空間 $K_N(A, v_0)$ とする。空間 S を $S \in R^N$ とし、 $S \cap \mathcal{G}_0 \neq A$ を満たすとする。さらに、一連の空間 $\mathcal{G}_j (j = 1, 2, \dots)$ を以下のように定義する。 ω_j は非零のスカラー値である。

$$\mathcal{G}_j := (I - \omega_j A)(\mathcal{G}_{j-1} \cap S). \quad (1)$$

このとき、次の 2 つの重要な関係が成り立つ。

- (i) $\mathcal{G}_j \subseteq \mathcal{G}_{j-1}$ for all $j > 0$,
- (ii) $\mathcal{G}_j = \mathbf{0}$ for some $j \leq N$.

IDR(s) 法の算法を以下に示す。 ϵ は収束判定用の微小な値である。 E_n, Q_n, P_n は各々行列を表す。

1. Let \mathbf{x}_0 be an initial guess; and put $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$
2. For $n = 0, \dots, s - 1$ Do
3. $\mathbf{v}_n = A\mathbf{r}_n$, $\omega_n = \frac{(\mathbf{v}_n, \mathbf{r}_n)}{(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n)}$
4. $\mathbf{q}_n = \omega_n \mathbf{r}_n$, $\mathbf{e}_n = -\omega_n * \mathbf{v}_n$
5. $\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n + \mathbf{e}_n$, $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n + \mathbf{q}_n$
6. End Do
7. $E_s = (\mathbf{e}_{s-1} \cdots \mathbf{e}_0)$
8. $Q_s = (\mathbf{q}_{s-1} \cdots \mathbf{q}_0)$
9. Do $n = s, s + 1, \dots$
10. Solve \mathbf{c}_n from $P^T E_n \mathbf{c}_n = P^T \mathbf{r}_n$
11. $\mathbf{v}_n = \mathbf{r}_n - E_n \mathbf{c}_n$
12. If $\text{mod}(n, s + 1) = s$ then
13. $\mathbf{t}_n = A\mathbf{v}_n$, $\omega = \frac{(\mathbf{t}_n, \mathbf{v}_n)}{(\mathbf{t}_n, \mathbf{t}_n)}$
14. $\mathbf{e}_n = -E_n \mathbf{c}_n - \omega \mathbf{t}_n$,
15. $\mathbf{q}_n = -Q_n \mathbf{c}_n + \omega \mathbf{v}_n$
16. Else
17. $\mathbf{q}_n = -Q_n \mathbf{c}_n + \omega \mathbf{v}_n$, $\mathbf{e}_n = -A\mathbf{q}_n$
18. End If
19. $\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \mathbf{e}_n$, $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{q}_n$
20. if $\|\mathbf{r}_{n+1}\|_2 / \|\mathbf{r}_0\|_2 \leq \epsilon$ then stop
21. $E_n = (\mathbf{e}_{n-1} \cdots \mathbf{e}_{n-s})$
22. $Q_n = (\mathbf{q}_{n-1} \cdots \mathbf{q}_{n-s})$
23. End Do.

さらに、次に示す拡張 IDR 定理が成り立つ。

定理 2: 拡張 IDR 定理

$$0 \leq d_j - d_{j+1} \leq d_{j-1} - d_j \leq s.$$

IDR(s) 法の算法では、反復 1 回毎に行列 A とベクトル \mathbf{v} の積 $A\mathbf{v} = \mathbf{y}$ を計算する。CRS 方式で保持した A の非零要素において行列・ベクトル積の計算は以下のように書ける。ここで、“ncol” は次元数、“rowptr”、“colind”、“val” は各々 A の各行の先頭ポインタ用配列、各要素の列 Index 配列、非零要素の値とし、“ $\mathbf{y}(i)$ ” はベクトル \mathbf{y} の i 番目の要素、“ $\mathbf{v}(i)$ ” は \mathbf{v} の i 番目の要素を表す。

実装の例

```

1. do i=1,ncol
2.   y(i)=0.0
3.   do j=rowptr(i), rowptr(i+1)-1
4.     y(i)=y(i)+val(j)*v(colind(j))
5.   end do
6. end do

```

行列・ベクトルの積の計算の並列化のとき、行列の各スレッドへの分割法には以下の方法がある。

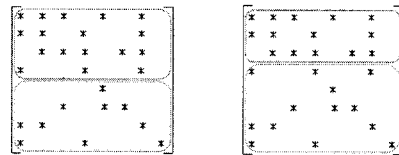
1. ブロック分割
2. ブロック・サイクリック分割
3. ハイブリッド分割: 上記の第 1 項と第 2 項を組み合わせたハイブリッド版

3. 行列のブロック分割

ブロック分割とは、各スレッドに対してある部分領域を担当させる方式で、次の 2 通りがある。

- 分割 (a-1) … 各ブロックの行数が均等になるようなブロック分割。
- 分割 (a-2) … 各ブロックの非零要素数が均等になるようなブロック分割。

2 つのブロックに分割し、各ブロックをスレッド Th0, Th1 に割り当てるとすると、分割 (a-1), (a-2) は下図のようになる。



分割 (a-1) のとき 分割 (a-2) のとき

図 1: ブロック分割の一例

上の分割 (a-1) では、各ブロックの非零要素数、行列・ベクトル積の計算で、各スレッドで 4 行目の計算の実行回数は

- 上ブロック …… 17 個, Th0 …… 17 回
- 下ブロック …… 10 個, Th1 …… 10 回

となり、各スレッドに対する負荷分散は均等でない。したがって、非零分布が均等でない行列には、分割 (a-1) は不適である。

分割 (a-2) では、各ブロックの行数、行列・ベクトル積の計算の中で、各スレッドが 3 行目の rowptr 配列にアクセスする回数、外側ループ回数は、

- 上ブロック … 3 行, Th0 … 3 回
- 下ブロック … 5 行, Th1 … 5 回

となるため、スレッドに対する負荷分散が均等でない。非零分布が均等でない行列では、分割 (a-2) のように各ブロックの行数が不均等になる。

4. 行列のブロック・サイクリック分割

この手法は、何行かまとめて1つのブロックとし、ブロック単位でサイクリック分割する手法である。具体的には、スレッド数を n_{Th} とするとき、

1. k ブロックに分割。
2. i 番目の Th に、 $n_{Th}*(j-1) + i$ ($i=1, \dots, n_{Th}$, $j=1, \dots, \frac{k}{n_{Th}}$) 番目のブロックを割り当てる。

一般に、 k が大きくなるほど負荷の均等性は向上するが、分割の手間が増える。例えば、次の行列では、 $n_{Th}=2$, $k=2$ のときのブロック・サイクリック分割は次のように表せる。

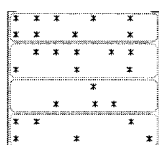


図2：ブロック・サイクリック分割の一例

このとき、各ブロックの非零要素数、行列・ベクトル積の計算で、各スレッドで4行目の計算回数は、

- 赤色のブロック …… 13個, Th_0 …… 13回
- 青色のブロック …… 14個, Th_1 …… 14回

となり、ブロック分割に比べて負荷は均等になる。

表1：スレッド毎の非零要素数と比(行列 Poisson3db)

分割数 k	Th_0 の nnz	Th_1 の nnz	Th_0/Th_1
2	1,397,841	977,108	1.4306
8	1,409,776	965,173	1.4606
32	1,197,199	1,177,750	1.0165
128	1,193,120	1,181,829	1.0096

表2：スレッド毎の非零要素数と比(行列 Sme3da)

分割数 k	Th_0 の NNZ	Th_1 の NNZ	Th_0/Th_1
2	446,213	428,674	1.0409
8	443,288	431,599	1.0271
32	440,161	434,726	1.0125
128	440,397	434,490	1.0136

表1-2から、分割数 k が多くなる程ほど、負荷の均等性が向上(行列 Poisson3db: 分割数 $k=2 \rightarrow 8$ では悪化し、行列 Sme3da: 分割数 $k=32 \rightarrow 128$ で悪化)していることが分かる。ここで、分割数 $k=2$

のときがブロック分割と同じなので、負荷の均等性は、ブロック・サイクリック分割の方がよい。

5. 行列のハイブリッド分割

- ブロック分割 … 非零要素が均等分布の行列
- ブロック・サイクリック分割 … 非零要素が均等に分布してない行列

に対して有利である。

ブロック分割では、非零要素の分布が均等でない場合、負荷分散が均等に行われないという問題がある。同様に、ブロック・サイクリック分割では、分割数 k の与え方により、過度に分割を行い分割に手間がかかるという問題がある。このように、分割を考えると、(i) 非零要素数の分布を均等に行うこと、および(ii) 過度に分割を行わないこと、が大切である。そこで、まず各ブロックに対する非零要素の分布の均一度を表す指標を導入する。

非零要素の分布の均一度を示す指標として次の指標 (a) を考える。ただし、行列を分割したときの非零要素数が最大のブロックの非零要素数を MAX_NNZ 、最少の場合を MIN_NNZ とする。この指標では、数万次元の行列と数百次元の行列のとき、非零要素数が同じ数%のの違いでも数万次元の行列の方が、ブロック毎の非零要素数に違いが出てくるため、相対的量では限界があり、絶対的な量を考慮できる指標 (b) を考える。この指標 (b) であれば、行列のスレッド毎の非零要素数の差により決定できるので、行列により不揃いの各スレッド毎の非零要素数をより均一にできる可能性が高い。

- 指標 (a): $\frac{MAX_NNZ}{MIN_NNZ}$
- 指標 (b): $MAX_NNZ - MIN_NNZ$

以下に、実際にフロリダ大学の行列データベースからダウンロードした行列 Poisson3db ($N = 85623$, $NNZ = 2374949$), Raefsky2 ($N = 3242$, $NNZ = 293551$) において、指標 (a), (b) を用いて、ハイブリッド分割を行ったときに ($Th=2$)、行列・ベクトル積の計算時間に与える影響を表3, 表4に記す。指標 (b) の判定値は 10^4 とし、指標 (a) の値を1.001から1.1まで変化させた。また指標 (a), (b) を用いることによって得られた分割で、行列・ベクトル積を各々 10^3 回行った。

表 3: 指標 (a), (b) の違いが行列・ベクトル積の計算時間に及ぼす影響 (行列 Raefsky2)

指標 (a)		指標 (b)	
判定値	経過時間 [s]	判定値	経過時間 [s]
1.001	0.339	10000	0.338
1.005	0.335	10000	0.335
1.010	0.336	10000	0.337
1.050	0.331	10000	0.333
1.100	0.335	10000	0.335

表 4: 指標 (a), (b) の違いが行列・ベクトル積の計算時間に及ぼす影響 (行列 Poisson3db)

指標 (a)		指標 (b)	
判定値	経過時間 [s]	判定値	経過時間 [s]
1.001	7.771	10000	6.927
1.005	7.717	10000	6.927
1.010	7.975	10000	6.928
1.050	7.791	10000	6.920
1.100	7.751	10000	6.923

表 3, 表 4 の結果から, サイズが小さな行列 Raefsky2 では, 指標 (a), (b) を用いたときの結果は同等となっている。しかし, サイズが大きい行列 Poisson3db では, 指標 (a), (b) を用いた場合を比較すると, 指標 (b) を用いた場合が, 指標 (a) より速くなっている。以上より, 絶対的な量を考慮できる指標 (b) の方が, 各スレッド毎の非零要素数をより均一にできる。

導入した指標を用いた $Th=4$ のときのハイブリッド分割と処理の流れを図 3 に示す。ブロック・サイクリック分割では過度な分割になり勝ちである。そこで, 行列に対してブロック分割を行う。次に, 指標を用い各スレッドの非零要素数の分布の判定を行う。指標を満たさない場合は, さらにブロック分割を 1 回増やす。分割を指標が満たすまで繰り返す。このハイブリッド分割は指標により過度な分割を防ぎ, 非零要素を均等に分布することが可能である。判定に要する時間は, 計算時間全体と比べてごく僅かである。

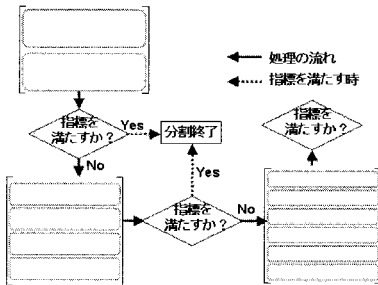


図 3: Hybrid 分割と処理の流れ ($Th=4$ のとき)

表 5 に, ブロック分割とブロック・サイクリック (B-C) 分割, ハイブリッド分割の各特徴を示す。ブロック分割は非零分布が均等な行列に向く。ブロック・サイクリック分割は, 非零分布が不均等な行列に向く。ハイブリッド分割は指標を一定の精度に設定することにより, 分割の手間を抑え, 負荷の均等性を向上させられる。

表 5: 3 つの分割法の特徴

分割	分割の手間	負荷の均等性
Block	少ない	不均等
B-C	多い (k に比例)	よい (k に比例し向上)
Hybrid	指標に比例し増大	指標に比例し向上

6. 有限要素, 境界要素併用法

電磁界問題は, 渦電流が流れる導体領域や磁性体のような非線形領域および周りの空気のような無限に広がる領域を有する。このような電磁界問題に対して, 有限要素法の汎用性を保ち, 境界要素法による無限領域の取り扱いの容易さを兼ね備えた, 有限要素, 境界要素併用法が, 早稲田大学 若尾真治氏らによって研究されている。これらのアプローチから生じる問題では, 特に境界要素法部分の影響により全体行列の性質が悪く, 多くの計算時間とメモリ量を必要とし, 複雑な電気機器への応用や大規模問題への応用では, 克服すべき課題も多い。

6.1 解析領域

ここでは, 解析領域は次の要件を持つ, と仮定し解析を行うものとする。

1. 領域 Ω_0 は空気領域, その中に励起電流 J_0 が含まれ, 領域 γ_0 は無限遠まで及ぶと課程する。考察物理量は, 磁界の強さ H とする。領域 Ω_m は導電性のない磁性体領域で, 透磁率を μ_m とする。考察物理量は, 磁気ベクトルポテンシャル A である。
2. 領域 Ω_e は渦電流領域であり, その導電率 σ_e と透磁率 μ_m は線形とする。考察する物理量として, 磁気ベクトルポテンシャル A と, 電気スカラーポテンシャル ϕ である。
3. 空気領域には境界要素法, 渦電流領域と非線形磁性体領域には有限要素法を各々適用する。有限要素法には六面体要素, 境界要素法には四角形要素を使用した。

7. 数値実験

計算機環境と計算条件は以下の通りである。計算機は, Hitachi SR11000 モデル J1 (CPU:

POWER5, クロック周波数: 1.9GHz, メモリ: 128Gbytes, OS:AIX5.3) を使用した。コンパイラは最適化 Fortran90 を使い, 逐次における最適化オプションは-64 -Oss -noparallel, 並列化における最適化オプションは-64 -Oss -omp を使用した。計算はすべて倍精度浮動小数点演算で行った。時間の計測は, 逐次計算, 並列計算ともに計測関数 xclock を用いた。収束判定は残差 2 ノルムの比: $\|r_{k+1}\|_2 / \|r_0\|_2 \leq 10^{-12}$ とした。初期近似解 x_0 はすべて 0.0 とした。最大反復回数は 10000 回とした。対角項はすべて 1 に正規化して IDR(s) 法を適用した。IDR(s) 法のパラメータ s の値は 1 から 10 まで 10 通り調べた。スレッド数 Th は 1, 2, 4, 8, 16 と変えた。テスト行列の特徴を表 6 に示す。

表 6 : テスト行列の特徴

行列	次元数	非零要素数	平均非零要素数
Sme3da	12,504	874,887	70.0
Poisson3db	85,623	2,374,949	27.7
Raefsky2	3,242	293,551	90.6
FEM-BEM	19,060	24,377,548	1279.0
密行列 BEM	7,601	57,775,201	7601.0
疎行列 FEM	27,720	1,665,372	60.1

表 7-表 9 に各行列に対する性能評価を示す。各表において, IDR(s) 法の結果は最適なパラメータ s の場合である。時間の単位は秒である。“speedup” は, スレッド数が 1 のときの経過時間を 1 としたときの比である。

表 7(a) : 併用法:IDR(s=10) 法の性能 (行列 FEM-BEM)

Partitioning	Th	no. of blocks	iterations	tot-t [s]	ave-t [ms]	speed-up
Block	1	1	1949	90.2	46.29	1.00
	2	2	2391	107.6	44.99	0.84
	4	4	2058	89.3	43.40	1.01
	8	8	2115	56.1	26.53	1.61
Block-Cyclic	1	1	1949	90.2	46.29	1.00
	2	60	2391	56.3	23.53	1.60
	4	120	2101	25.4	12.10	3.55
	8	240	2332	14.1	6.02	6.42
Hybrid	1	1	1949	90.5	46.43	1.00
	2	76	2391	55.9	23.38	1.62
	4	76	2146	25.7	11.99	3.52
	8	152	2115	12.4	5.88	7.28
	16	752	2057	7.4	3.61	12.20

表 7(b) : 併用法:BiCGStab 法の性能 (行列 FEM-BEM)

Partitioning	Th	no. of blocks	iterations	total-t [s]	ave-t [ms]	speed-up
Block	1	1	3332	294.3	88.33	1.00
	2	2	3260	287.5	88.19	1.02
	4	4	3132	269.4	86.00	1.09
	8	8	3046	160.3	52.62	1.84
Block-Cyclic	1	1	3332	292.4	87.76	1.00
	2	60	3260	152.1	46.65	1.92
	4	120	3132	78.8	25.15	3.71
	8	240	3046	37.6	12.35	7.77
Hybrid	1	1	3332	295.6	88.70	1.00
	2	76	3260	145.8	44.73	2.03
	4	76	3132	71.3	22.76	4.15
	8	152	3046	33.7	11.06	8.78
	16	752	3077	20.8	6.74	14.24

表 7(c) : 併用法:GPBiCG 法の性能 (行列 FEM-BEM)

Partitioning	Th	no. of blocks	iterations	total-t [s]	ave-t [ms]	speed-up
Block	1	1	2327	207.0	88.96	1.00
	2	2	2406	209.8	87.23	0.99
	4	4	2442	212.9	87.19	0.97
	8	8	2446	127.8	52.27	1.62
Block-Cyclic	1	1	2327	206.1	88.57	1.00
	2	60	2406	113.1	47.01	1.82
	4	120	2442	61.3	25.14	3.36
	8	240	2446	30.3	12.41	6.79
Hybrid	1	1	2327	206.7	88.85	1.00
	2	76	2406	108.0	44.91	1.91
	4	76	2442	55.7	22.85	3.71
	8	152	2446	26.9	11.03	7.67
	16	752	2021	14.1	7.00	14.61

表 7(d) : 併用法:BiCGSafe 法の性能 (行列 FEM-BEM)

Partitioning	Th	no. of blocks	iterations	total-t [s]	ave-t [ms]	speed-up
Block	1	1	2337	205.7	88.02	1.00
	2	2	2510	219.9	87.62	0.94
	4	4	2449	212.1	86.62	0.97
	8	8	2581	134.2	52.00	1.53
Block-Cyclic	1	1	2337	207.7	88.87	1.00
	2	60	2510	116.9	46.61	1.78
	4	120	2449	61.7	25.20	3.37
	8	240	2581	31.9	12.37	6.51
Hybrid	1	1	2337	208.33	89.1	1.00
	2	76	2510	111.72	44.5	1.86
	4	76	2449	56.1	22.92	3.71
	8	152	2581	28.5	11.04	7.31
	16	752	1889	13.3	7.05	15.64

表 8 : 境界要素法:IDR(s=8) 法, BiCGStab 法, GPBiCG 法, BiCGSafe 法の性能 (密行列 BEM)

Partitioning	Th	no. of blocks	iterations	total-t [s]	ave.-t [ms]	speed-up
Block	1	1	83	8.27	99.64	1.00
	16	16	82	0.88	10.73	9.40
Block-Cyclic	1	1	83	8.51	102.53	1.00
	16	480	85	0.91	10.71	9.35
Hybrid	1	1	83	8.30	100.00	1.00
	16	16	80	0.87	10.88	9.54

Partitioning	Th	no. of blocks	iterations	total-t [s]	ave.-t [ms]	speed-up
Block	1	1	54	10.67	197.59	1.00
	16	16	58	1.25	21.55	8.54
Block-Cyclic	1	1	54	10.82	200.37	1.00
	16	480	58	1.40	24.14	7.73
Hybrid	1	1	54	10.84	200.74	1.00
	16	16	58	1.41	24.31	7.69

Partitioning	Th	no. of blocks	iterations	total-t [s]	ave.-t [ms]	speed-up
Block	1	1	50	10.04	6.89	1.00
	16	16	49	1.22	0.68	9.90
Block-Cyclic	1	1	50	9.99	6.83	1.00
	16	480	49	1.27	0.72	9.32
Hybrid	1	1	50	10.22	6.88	1.00
	16	16	49	1.22	0.69	9.81

Partitioning	Th	no. of blocks	iterations	total-t [s]	ave.-t [ms]	speed-up
Block	1	1	51	10.38	203.53	1.00
	16	16	54	1.34	24.81	7.75
Block-Cyclic	1	1	51	10.39	203.73	1.00
	16	480	54	1.34	24.81	7.75
Hybrid	1	1	51	10.25	200.98	1.00
	16	16	54	1.34	24.81	7.65

8. まとめ

IDR(s) 法の 3 つの分割法による有限要素法，境界要素法，その併用法の離散化による問題に対する並列性能評価を行った．その結果，指標つきハイブリッド分割による IDR(s) 法の並列版収束性能が優れていることがわかった．

表 9(a) : FEM 法:IDR(s=9) 法の性能 (疎行列)

Partitioning	Th	no. of blocks	iterations	total-t [s]	ave.-t [ms]	speed-up
Block	1	1	1167	23.67	20.28	1.00
	2	2	843	13.06	15.49	1.81
	4	4	1073	12.98	12.10	1.82
	8	8	1168	12.90	11.04	1.83
Block-Cyclic	16	16	1205	12.73	10.56	1.86
	1	1	1167	23.77	20.37	1.00
	2	60	897	13.25	14.77	1.79
	4	120	1230	14.27	11.60	1.67
Hybrid	8	240	1149	12.45	10.84	1.91
	16	480	910	9.81	10.78	2.42
	1	1	1167	23.81	20.40	1.00
	2	30	852	12.31	14.45	1.93
Hybrid	4	92	1156	13.85	11.98	1.72
	8	184	1292	13.84	10.71	1.72
	16	240	909	9.85	10.84	2.42

表 9(b) : FEM 法:BiCGStab 法の性能 (疎行列)

Partitioning	Th	no. of blocks	iterations	total-t [s]	ave.-t [ms]	speed-up
Block	1	-	-	break	-	-
	2	-	-	break	-	-
	4	-	-	break	-	-
	8	8	3723	72.18	19.39	-
	16	16	1373	25.65	18.68	-
Block-Cyclic	1	-	-	break	-	-
	2	-	-	break	-	-
	4	120	1084	21.86	20.17	-
	8	-	-	break	-	-
Hybrid	16	480	1663	30.80	18.52	-
	1	-	-	break	-	-
	2	30	1140	26.36	23.12	-
	4	92	1226	24.67	20.12	-
Hybrid	8	184	1386	26.22	18.92	-
	16	-	-	break	-	-

表 9(c) : FEM 法:BiCGSafe 法の性能 (疎行列)

Partitioning	Th	no. of blocks	iterations	total-t [s]	ave.-t [ms]	speed-up
Block	1	1	762	25.72	33.75	1.00
	2	2	697	16.66	23.90	1.54
	4	4	870	18.06	20.76	1.42
	8	8	703	13.63	19.39	1.89
	16	16	629	11.69	18.59	2.20
Block-Cyclic	1	1	762	25.46	33.41	1.00
	2	60	716	16.45	22.97	1.55
	4	120	732	14.83	20.26	1.72
	8	240	742	14.08	18.98	1.81
	16	480	702	13.01	18.53	1.96
Hybrid	1	1	762	25.38	33.31	1.00
	2	30	804	18.73	23.30	1.36
	4	92	758	15.34	20.24	1.65
	8	184	730	13.81	18.92	1.84
	16	240	696	12.79	18.38	1.98