

多物体電磁波散乱問題の境界要素解析における 改良型 IDR(s) 法の性能評価

中嶋 徳正^{*1}, 藤野 清次², 立居場 光生³, 尾上 勇介⁴

- 1 九州大学 大学院システム情報科学研究院
- 2 九州大学 情報基盤研究開発センター
- 3 有明工業高等専門学校
- 4 九州大学 大学院システム情報科学府

著者らは多数の誘電体円柱による電磁波散乱問題の境界要素解析において連立 1 次方程式の反復法である IDR(s) 法は収束性およびメモリ利用効率の点から GMRES(m) 法より優れていることを示した。パラメータ s の増加により IDR(s) 法の収束性は向上するが、収束後の解の精度が著しく悪化する偽収束が発生する。このため、利用できるパラメータ s の範囲は限られる。本論文では、P. Sonneveld と M. van Gijzen が IDR(s) 法の改良型として提案した 3 種の解法について収束性および精度を評価する。数値実験の結果、残差差分ベクトル列の双直交化を取り入れた IDR(s) 法は従来の IDR(s) 法と同様に偽収束の問題が生じるが、より高く安定した収束性を示す。

A Performance Evaluation of Variant IDR(s) Methods in the Boundary Element Analyses of Electromagnetic Wave Scattering Problem with Many Objects

Norimasa NAKASHIMA^{*1}, Seiji FUJINO², Mitsuo TATEIBA³ and Yusuke ONOUE⁴

- 1 Faculty of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University
- 2 Research Institute for Information Technology, Kyushu University
- 3 Ariake National College of Technology
- 4 Graduate School of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University

The previous papers showed that IDR(s) method was better than GMRES(m) method in terms of convergence and memory efficiency for boundary element analyses of electromagnetic wave scattering from many dielectric cylinders. As the parameter s of IDR(s) method is larger, convergence is more improved but the accuracy deteriorate drastically. Thus the available range of s is limited. The present paper treats with variant IDR(s) methods proposed by P. Sonneveld and M. van Gijzen, and tests numerically variants for convergence and accuracy. Numerical experiments provides that IDR(s) method with bi-orthogonalization of residual difference vectors is better than conventional IDR(s) method in terms of high and stable convergence. However, this method also has the problem with the output of an incorrect solution.

1. はじめに

著者らの研究の最終目標は多数の粒子からなる媒質中での電磁波散乱現象を数値計算より評価するシミュレータの開発である。その基礎として、電磁波散乱問題において有効な高速計算法の提案に取り組んでいる。電磁波散乱問題の代表的な数値計算法の 1 つである境界要素法では、計算に最も多くの時間を費やす部分は密な係数行列を持つ連立 1 次方程式の求解の部分である。本問題で扱う方程式の係数行列とベクトルとの積は高速多重極アルゴリズム [1] を利用することで計算量およびメモリ量が大幅に減少する [2]。このことから、算法中に行列-ベクトル積演算を有する反復法 (Krylov

部分空間解法 [3]) が利用されるようになった。現在では収束性の高い反復法および前処理の提案が大きな鍵となっている。

著者らは収束性の高さから長周期のリスタート処理をつけた GMRES(m) 法 (一般化最小残差法 [5]) を利用してきた [4]。しかし、膨大なメモリ量が必要であり、大規模な電磁波散乱問題への取組みを困難にさせた。そこで、Sonneveld と van Gijzen が提案した IDR(s) 法 (Induced Dimension Reduction [6]) に注目した。IDR(s) 法は GMRES(m) 法と同様にパラメータ s に従ってメモリ量が増加する。また、大きい s に対しては解の精度が要求精度よりも非常に大きくなる偽収束が生じることが

あるため、付加的な処理が用意されている。

$1 \leq s \leq 30$ における数値実験の結果、IDR(s) 法の s に対する収束までの行列一ベクトル積演算の回数 (以下, “MATVECS” と略す) は下に凸な特性を示した。また, $s > 5$ で偽収束が発生した。そこで, 付加的な処理を施すと MATVECS は単調に減少する特性に変化し, $s > 2$ において GMRES(100) 法以上の収束性を示した。そして, 搭載メモリ量の 90% 以上を利用する GMRES(m_{\max}) 法に対しても IDR(s) 法は少ないメモリ量で速く収束し, MATVECS の差は方程式の次元数が大きくなるほど拡大した。以上の点から, IDR(s) 法は大規模計算において収束性だけでなくメモリ利用効率の点から GMRES(m) 法よりも優れていると結論付けた。しかし, 付加的な処理は偽収束の根本的な解決法ではないため, 大きい s を設定して収束性を向上させても精度が保証できない [7]。

偽収束の問題の解決のため, 櫻井らは IDR(s) 法の算法中の特定の式に対する問題点を指摘し, 条件分岐で別式を計算する手法を提案した [8]。しかし, この別式には行列一ベクトル積演算が含まれており, 著者らの問題のように密行列を扱う場合は正味の計算時間の大幅な増加が懸念される。他方, van Gijzen と Sonneveld は IDR(s) 法を基にした 3 種の解法を提案した [9, 10]。ただし, これらが偽収束の解決を目的としているわけではない。

本論文では, 多数の誘電体円柱からなる電磁波散乱問題の境界要素解析において IDR(s) 法を基にした 3 種の解法の性能評価を実施し, s に対する収束性と精度について調査する。

2. 定式化

真空中に z 軸方向を柱軸とし, 互いに重なり合うことなく配置された N 個の無限長誘電体柱による 2 次元電磁波散乱問題を考える。入射波を TM 波と仮定すると, 境界上の電界 E_z とその法線方向微分 $\partial E_z / \partial n$ は式 (1) および式 (2) の電界積分方程式 (EFIE) を満足する [4]。

式 (1) および式 (2) を境界要素法により離散化す

$$E_z^{\text{inc}}(\rho_i) = \frac{1}{2} E_z(\rho_i) + \frac{j}{4} \sum_{n=1}^N \left[\int_{C_n} \left\{ E_z(\rho'_n) \frac{\partial H_0^{(2)}(k_0 |\rho_i - \rho'_n|)}{\partial n'_n} - H_0^{(2)}(k_0 |\rho_i - \rho'_n|) \frac{\partial E_z}{\partial n'_n}(\rho'_n) \right\} dl'_n \right] \quad (1)$$

$$0 = \frac{1}{2} E_z(\rho_i) - \frac{j}{4} \int_{C_i} \left\{ E_z(\rho'_i) \frac{\partial H_0^{(2)}(k_i |\rho_i - \rho'_i|)}{\partial n'_i} - H_0^{(2)}(k_i |\rho_i - \rho'_i|) \mu_r^{(i)} \frac{\partial E_z}{\partial n'_i}(\rho'_i) \right\} dl'_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2)$$

る。各境界を M_i 個 ($i = 1, 2, \dots, N$) の境界要素に分割し, 各境界上の未知関数を M_i 個の長方形パルス関数で展開する。さらに, Dirac のデルタ関数を用いて境界条件を整合させると, 最終的に L 次元の連立 1 次方程式 ($\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$) が得られる。ここで, L は $L = 2(M_1 + M_2 + \dots + M_N)$ である。

係数行列および未知, 既知ベクトルは積分方程式の物理的意味 [4] より以下に示すようにブロックおよび副ベクトルで表される。係数行列 \mathcal{A} は次式に示すように多数のブロックから構成される。

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_{11}^{\text{out}} & \cdots & A_{1N}^{\text{out}} & B_{11}^{\text{out}} & \cdots & B_{1N}^{\text{out}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1}^{\text{out}} & \cdots & A_{NN}^{\text{out}} & B_{N1}^{\text{out}} & \cdots & B_{NN}^{\text{out}} \\ \hline A_{11}^{\text{in}} & & \mathbf{0} & B_{11}^{\text{in}} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & A_{NN}^{\text{in}} & \mathbf{0} & & B_{NN}^{\text{in}} \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで, $\mathbf{0}$ は零要素を表す。ブロック A_{ij} および B_{ij} は上添字に関係なく $M_i \times M_j$ の完全密行列であり, その成分は境界要素上の積分で与えられる。

ベクトル \mathbf{x} , \mathbf{b} は以下の式で表される。

$$\mathbf{x} = (\boldsymbol{\alpha}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\alpha}^{(N)}, \boldsymbol{\beta}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\beta}^{(N)})^T, \quad (3)$$

$$\mathbf{b} = (\mathbf{e}_z^{(1)}, \dots, \mathbf{e}_z^{(N)}, \mathbf{0}^{(1)}, \dots, \mathbf{0}^{(N)})^T. \quad (4)$$

ここで, “ T ” は行列の転置を示す。副ベクトル $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$, $\boldsymbol{\beta}^{(i)}$, $\mathbf{e}_z^{(i)}$ および $\mathbf{0}^{(i)}$ の成分の数は M_i である。なお, $\mathbf{0}^{(i)}$ は零ベクトルである。

3. IDR(s) 法を基にした 3 種の解法

IDR(s) 法は完全 Krylov 空間より一定の規則に基づいて空間を繰り返し生成し, 残差ベクトルがその空間に属するように解ベクトルを構成する。このとき, IDR 定理 [6] より, 繰り返し生成される空間の次元数は減少し, かつ残差ベクトルは零ベクトルへ収束する。このとき, 解ベクトルおよび残差ベクトル更新の漸化式の項数が反復回数に比例して多くなるため, 漸化式の項数を s で打ち切る。

van Gijzen と Sonneveld は上記の発想を基に 3

種の解法を提案した。まず、文献 [9] において “A Simple IDR-based algorithm” および “An IDR algorithm that minimises intermediate residual norms” を提案した。以下では、それぞれ「S-IDR(s) 法」、「M-IDR(s) 法」と略記する。著者らは右前処理を想定した前処理付きの算法を導出した。以下に前処理付きの S-IDR(s) 法の算法を示す。

1. Let \mathbf{x}_0 be an initial guess, and put
 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathcal{A}\mathbf{x}_0$
2. $d\mathcal{R} = d\mathcal{X} = \mathcal{O}$, $\mathcal{M} = \mathcal{I}$, $\omega = 1$, $n = 0$
3. While $\|\mathbf{r}_n\|_2 / \|\mathbf{r}_0\|_2 > \epsilon$ Do
4. For $i = 0, \dots, s-1$ Do
5. Solve \mathbf{c} from $\mathcal{M}\mathbf{c} = \mathcal{P}^H \mathbf{r}_n$
6. $\mathbf{v} = \mathbf{r}_n - d\mathcal{R}\mathbf{c}$
7. $d\mathbf{x}_n = d\mathcal{X}\mathbf{c} + \omega\mathcal{K}^{-1}\mathbf{v}$, $d\mathbf{r}_n = \mathcal{A}d\mathbf{x}_n$
8. $\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n - d\mathbf{r}_n$, $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + d\mathbf{x}_n$
9. $n = n + 1$
10. End Do
11. $d\mathcal{R} = (d\mathbf{r}_{n-1} \cdots d\mathbf{r}_{n-s})$,
 $d\mathcal{X} = (d\mathbf{x}_{n-1} \cdots d\mathbf{x}_{n-s})$
12. $\mathcal{M} = \mathcal{P}^H d\mathcal{R}$
13. Solve \mathbf{c} from $\mathcal{M}\mathbf{c} = \mathcal{P}^H \mathbf{r}_n$
14. $\mathbf{v} = \mathbf{r}_n - d\mathcal{R}\mathbf{c}$, $\mathbf{t} = \mathcal{A}\mathcal{K}^{-1}\mathbf{v}$
15. $\omega = \frac{(\mathbf{t}, \mathbf{v})}{(\mathbf{t}, \mathbf{t})}$
16. $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + d\mathcal{X}\mathbf{c} + \omega\mathcal{K}^{-1}\mathbf{v}$
 $\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n - d\mathcal{R}\mathbf{c} - \omega\mathbf{t}$
17. $n = n + 1$
18. End While

ここで、添字 “H” は行列の共役転置を示す [3]。行列 \mathcal{O} および \mathcal{I} はそれぞれ零行列および単位行列を表す。2つの L 次元複素数ベクトル \mathbf{a} および \mathbf{b} の内積は次式で定義される。なお、 \bar{a} は a の複素共役である。

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^L \bar{a}_i b_i \quad (5)$$

また、 $L \times s$ の行列 \mathcal{P} は次式のように s 個の正規直交ベクトル \mathbf{p}_i からなる行列とする [6]。

$$\mathcal{P} = (\mathbf{p}_0 \ \mathbf{p}_1 \ \cdots \ \mathbf{p}_{s-1}), \quad \mathbf{p}_0 = \frac{\mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r}_0\|_2} \quad (6)$$

前処理付きの M-IDR(s) 法の算法は前述の S-IDR(s) 法のステップ 7 の後に計算が追加され、ステ

ップ 8 が変更される。それらの内容を以下に示す。

- 7-1. For $j = 1, \dots, i$ Do
- 7-2. $d\mathbf{r}_n = d\mathbf{r}_n - (d\mathbf{r}_{n-j}, d\mathbf{r}_n)d\mathbf{r}_n$
 $d\mathbf{x}_n = d\mathbf{x}_n - (d\mathbf{r}_{n-j}, d\mathbf{r}_n)d\mathbf{x}_n$
- 7-3. End Do
- 7-4. $d\mathbf{r}_n = \frac{d\mathbf{r}_n}{(d\mathbf{r}_n, d\mathbf{r}_n)}$,
 $d\mathbf{x}_n = \frac{d\mathbf{x}_n}{(d\mathbf{x}_n, d\mathbf{x}_n)}$
- 8'. $\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n - (\mathbf{r}_n, d\mathbf{r}_n)d\mathbf{r}_n$,
 $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + (\mathbf{r}_n, d\mathbf{r}_n)d\mathbf{x}_n$

さらに、両氏は文献 [10] において “IDR(s) with bi-orthogonalization of intermediate residuals” を提案した。以下では「B-IDR(s) 法」と略記する。こちらについても著者らは右前処理を想定した前処理付きの算法を以下のとおりに導出した。

1. Let \mathbf{x}_0 be an initial guess, and put
 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathcal{A}\mathbf{x}_0$
2. $d\mathbf{x}_i = d\mathbf{r}_i = \mathbf{0}$ ($i = 0, \dots, s-1$),
 $\mathcal{M} = \mathcal{I}$, $\omega = 1$, $n = 0$
3. While $\|\mathbf{r}_n\|_2 / \|\mathbf{r}_0\|_2 > \epsilon$ Do
4. $\mathbf{m} = \mathcal{P}^H \mathbf{r}_n$
5. For $i = 0, \dots, s-1$ Do
6. Solve \mathbf{c} from $\mathcal{M}\mathbf{c} = \mathbf{m}$
7. $\mathbf{v} = \mathbf{r}_n - \sum_{j=i}^{s-1} c_j d\mathbf{r}_j$
8. $d\mathbf{x}_i = \omega\mathcal{K}^{-1}\mathbf{v} + \sum_{j=i}^{s-1} c_j d\mathbf{x}_j$, $d\mathbf{r}_i = \mathcal{A}d\mathbf{x}_i$
9. For $j = 0, \dots, i-1$ Do
11. $d\mathbf{r}_i = d\mathbf{r}_i - \frac{(\mathbf{p}_j, \mathbf{g}_i)}{M_{jj}} d\mathbf{r}_j$
 $d\mathbf{x}_i = d\mathbf{x}_i - \frac{(\mathbf{p}_j, \mathbf{g}_i)}{M_{jj}} d\mathbf{x}_j$
12. End Do
13. $M_{ji} = (\mathbf{p}_j, \mathbf{g}_i)$ ($j = i, \dots, s-1$)
14. $\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n - \frac{m_i}{M_{ii}} d\mathbf{r}_i$,
 $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{m_i}{M_{ii}} d\mathbf{x}_i$
15. If $i \leq s-2$ then
16. $m_j = \begin{cases} 0 & (j = 0, \dots, i) \\ m_j - \frac{m_i}{M_{ii}} M_{ji} & (j = i+1, \dots, s-1) \end{cases}$

17. End If
18. $n = n + 1$
19. End Do
20. $\mathbf{t} = \mathcal{A}\mathcal{K}^{-1}\mathbf{r}_n$
21. $\omega = \frac{(\mathbf{t}, \mathbf{r}_n)}{(\mathbf{t}, \mathbf{t})}$
22. $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n + \omega\mathcal{K}^{-1}\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n - \omega\mathbf{t}$
23. $n = n + 1$
24. End While

B-IDR(s)法ではステップ6の係数行列は下三角行列となるため、前進代入により s 元の連立1次方程式の解を得る。

IDR(s)法では s の増加に対して偽収束が発生することがある。このため、 ω の計算後に以下の付加的な処理が用意されている。

$$\rho = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\|_2 \|\mathbf{b}\|_2}, \quad \text{if } |\rho| < \kappa \text{ then } \omega = \frac{\kappa}{\rho}\omega$$

ここで、 \mathbf{a} および \mathbf{b} は ω を計算する際に利用するベクトルである。 κ は任意定数でSleijpenとvan der Vorstは0.7を推奨した[11]。

4. 数値実験

文献[7]に示す格子状に配置された $N \times N$ 個の誘電体円柱による電磁波散乱問題を設定し、連立1次方程式の求解における各種IDR(s)法の収束性および精度を評価する。連立1次方程式の求解において初期解ベクトル \mathbf{x}_0 は零ベクトル、収束判定値を $\epsilon = 10^{-10}$ とする。算法中の行列-ベクトル積演算には高速多重極アルゴリズムを利用し、その精度の目安を 10^{-10} に設定した[2]。前処理については2段階前処理を適用する[4]。このため数値実験で扱う方程式の次元数は $L/2$ となる。

演算はすべて倍精度浮動小数点演算で、計算はすべてIntel Core2Duoプロセッサ(クロック2.66GHz)上で行った。OSはOpenSUSE 10.3、使用言語はC(gcc v4.2.1)、コンパイルオプションは“-O3”を使用した。メインメモリは2GB、2次キャッシュは4MBである。どの反復法を用いても1反復あたりの演算量は行列-ベクトル積の演算量がその大部分を占めることから、MATVECSがそのまま計算時間に反映する[7]。

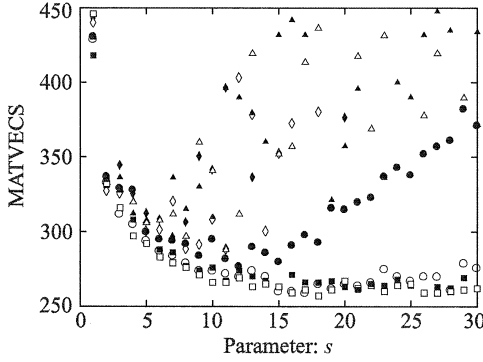
IDR(s)法のパラメータ s に対するMATVECSと収束後の真の相対残差 L_2 ノルム(以下、“True Res.”と略す)を図1および図2にそれぞれ示す。

図において、記号○, ◇, △, □はそれぞれIDR(s)法, S-IDR(s)法, M-IDR(s)法およびB-IDR(s)法を、塗りつぶしの有無は $\kappa = 0.0$ と0.7に対する結果を表す。なお、 $\kappa = 0.0$ のときは付加的処理を実行しない。図1における Itr_{\max} は最大反復回数であり、その数値はIDR(s)法に対する著者らの実験結果より設定した。

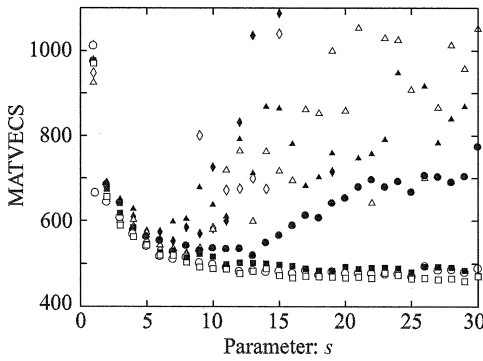
図1より、S-IDR(s)法およびM-IDR(s)法の s に対するMATVECSは付加的処理の利用の有無に関わらず下に凸な特性であり、全体的にIDR(s)法よりも多い。また、S-IDR(s)法については $s > 15$ において最大反復回数までに収束できない例が多く現れた。図2よりS-IDR(s)法およびM-IDR(s)法に対しては $s > 5$ において偽収束が発生し、付加的な処理をつけても全く改善されなかった。以上の結果より、この2つの解法は収束性、精度共にIDR(s)法より劣ることが分かった。

B-IDR(s)法に対しては、図1および図2より、収束性および精度ともに付加的処理を付けても大きな変化は見られなかった。MATVECSについては単調に減少する特性を有しており、解法のみで比較するとB-IDR(s)法はIDR(s)法よりも収束性が高いといえる。IDR(s)法に付加的処理を利用するとB-IDR(s)法と同程度の収束性を示す。True Res.については $N = 41$ および51において対象とするすべての s に対して 10^{-10} 付近を示し、IDR(s)法よりも利用できる s の範囲が拡大した。しかし、 $N = 81$ では $s > 8$ において偽収束が確認された。以上の結果より、B-IDR(s)法は解法としてはIDR(s)法よりも収束性が高いが偽収束の問題があることが分かった。

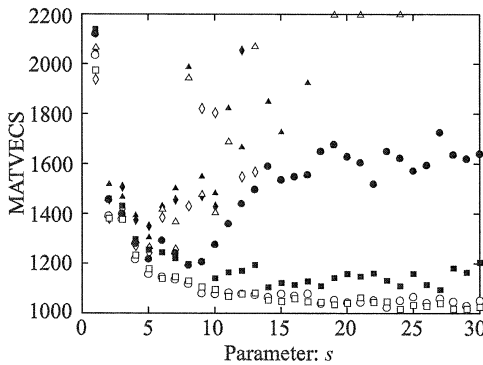
$N = 41$ における各IDR(10)法の収束の履歴を図3に示す。比較のため、IDR(10)法の収束の履歴をあわせて示す。S-IDR(s)法については $s+1$ 回を基本周期として相対残差 L_2 ノルムが激しく振動する。 s が大きいきの収束の悪化はこの振動の幅が大きくなるためであると考えられる。M-IDR(s)法については $s+1$ 回ごとに規則的な波形を示している。ここで、基本周期の後半をみると相対残差 L_2 ノルムが停滞している。このため、大きい s に対しては収束性が悪化することが考えられる。最後に、B-IDR(s)法についてみるとIDR(s)法と同様に振動しながら収束するが、その幅はIDR(s)法にくらべて小さく、安定した収束特性を示す。



(a) $N = 41$, $L/2 = 53,792$, $Itr_{\max} = 450$

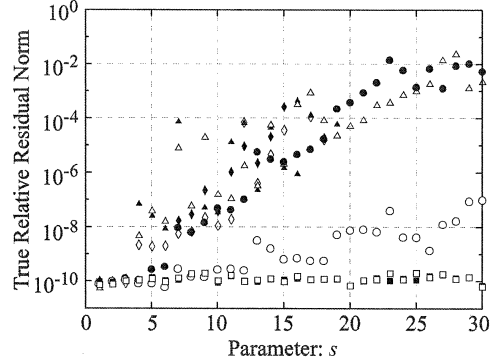


(b) $N = 57$, $L/2 = 103,968$, $Itr_{\max} = 1100$

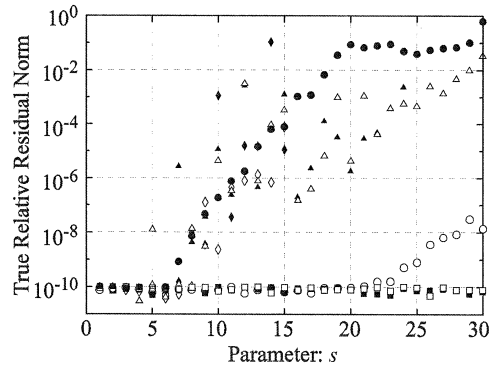


(c) $N = 81$, $L/2 = 209,952$, $Itr_{\max} = 2200$

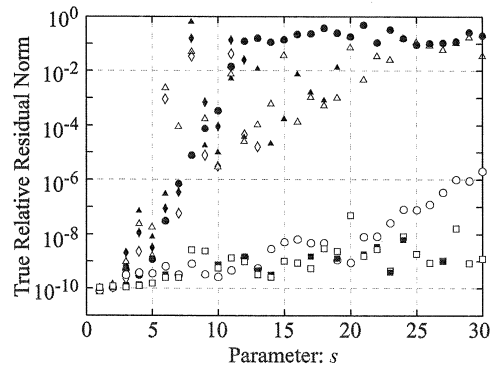
図 1: 前処理付きの IDR(s) 法における収束までの行列-ベクトル積演算回数の s に対する変化 (記号: \circ :IDR(s)法, \diamond :S-IDR(s)法, \triangle :M-IDR(s)法, \square :B-IDR(s)法, 塗りつぶし無: $\kappa = 0.7$, 有: $\kappa = 0.0$)



(a) $N = 41$, $N^2 = 1681$, $L/2 = 53,792$

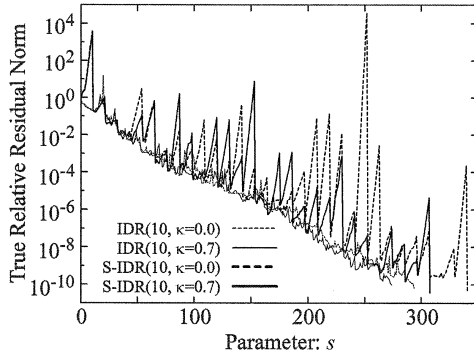


(b) $N = 57$, $N^2 = 3249$, $L/2 = 103,968$

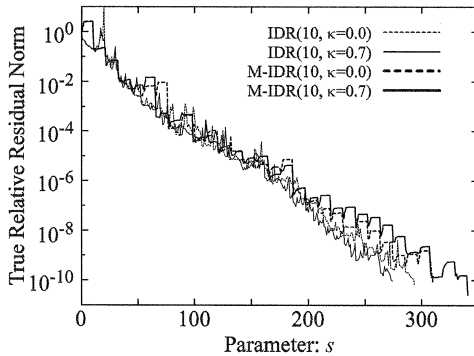


(c) $N = 81$, $N^2 = 6561$, $L/2 = 209,952$

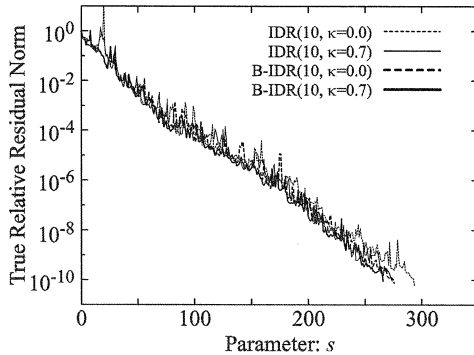
図 2: 前処理付きの IDR(s) 法における収束後の真の相対残差 L_2 ノルムの s に対する変化 (記号: \circ :IDR(s)法, \diamond :S-IDR(s)法, \triangle :M-IDR(s)法, \square :B-IDR(s)法, 塗りつぶし無: $\kappa = 0.7$, 有: $\kappa = 0.0$)



(a) S-IDR(s) 法 vs. IDR(s) 法



(b) M-IDR(s) 法 vs. IDR(s) 法



(c) B-IDR(s) 法 vs. IDR(s) 法

図 3: 収束の履歴 ($N = 41$, $L/2 = 53, 792$)

5. おわりに

van Gijzen と Sonneveld が IDR(s) を基に提案した新規の反復法の性能評価を多物体電磁波散乱問題の境界要素解析における密な連立 1 次方程式の求解を例に行った。結果として、S-IDR(s) 法と M-IDR(s) 法については収束性および精度共に IDR(s) 法より劣ることを示した。また、B-IDR(s) 法につ

いては解法そのものについては IDR(s) 法に比べて収束性が高く、収束特性も安定しており、求解後の精度も高いことが分かった。ただし、付加的処理を利用した IDR(s) 法に対しては収束性および精度ともに同等である。また、B-IDR(s) 法にも偽収束の問題が存在しており、IDR(s) 法において櫻井らが提案した方法を含めこれを解決する手法について検討する必要がある。

謝辞

本研究の一部は平成 20 年度文部科学省科研費補助金(若手研究 (B):20760058) の助成による。

参考文献

- [1] L. Greengard and V. Rokhlin, A Fast Algorithm for Particle Simulations, *J. Comput. Phys.*, Vol. 73, pp. 325–348, 1987.
- [2] N. Nakashima and M. Tateiba, Greengard-Rokhlin's Fast Multipole Algorithm for Numerical Calculation of Scattering by N Conducting Circular Cylinders, *IEICE Trans. Electron.*, Vol. E86-C, No. 11, pp. 2158–2166, 2003.
- [3] 藤野, 張, 反復法の数理, 朝倉書店, 1996.
- [4] 中嶋, 藤野, 立居場, 多数の誘電体円柱の電磁波散乱問題の高速計算について (2) — Half Reduction と Block Jacobi を組み合わせた 2 段階前処理, *情報処理学会論文誌: コンピューティングシステム*, Vol. 45, No. SIG1(ACS4), pp. 1–9, 2004.
- [5] Y. Saad and M. Schultz, GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 7, No. 3, pp. 856–869, 1986.
- [6] P. Sonneveld and M. B. van Gijzen, IDR(s): A Family of Simple and Fast Algorithms for Solving Large Nonsymmetric Systems of Linear Equations, *Tech. Rep. 07-07*, Dept. Math. Anal., Delft, The Netherlands, pp. 1–28, 2007.
- [7] 中嶋, 藤野, 立居場, 尾上, 2 次元電磁多重散乱の境界要素解析における IDR(s) 法の適用, *電子情報通信学会論文誌* (2009 年 4 月掲載予定); N. Nakashima, *et al.*, An Application of IDR(s) Method to Boundary Element Analyses of Two-dimensional Electromagnetic Multiple Scattering, *Proc. Inter. Kyoto-Forum on Krylov Subspace Method*, pp. 143–150, 2008.
- [8] T. Sakurai, *et al.*, Proposal and Evaluation of AC-IDR(s) Method That Combines High-Performance with High Accuracy, *Proc. Inter. Kyoto-Forum on Krylov Subspace Method*, pp. 93–98, 2008.
- [9] M. B. van Gijzen and P. Sonneveld, An IDR(s) Variant with Minimal Intermediate Residual Norms, *Proc. Inter. Kyoto-Forum on Krylov Subspace Method*, pp. 85–92, 2008.
- [10] P. Sonneveld and M. B. van Gijzen, An Elegant IDR(s) Variant that Efficiently Exploits Bi-orthogonality Properties, *TR-08-21*, *Math. Anal.*, Delft Univ. of Tech., 2008.
- [11] G. L. G. Sleijpen and H. A. van der Vorst, Maintaining Convergence Properties of BiCGStab Methods in Finite Precision Arithmetic, *Numer. Algorithms*, Vol. 2, No. 2, pp. 203–223, 1995.