

## フィルタバンクを用いた並列ARスペクトル推定法

宮崎 恭子      西川 清史      本間 仁志      佐川 雅彦

東京都立大学工学部

〒192-03

東京都八王子市南大沢1-1

あらまし      スペクトル推定の際の演算量低減を目的に、フィルタバンクを用いて信号を帯域分割し、各帯域毎にAR係数を並列に求める方法を提案する。最初に、このような並列処理には従来とは異なるクラスのフィルタバンクが必要であることを述べる。次に、FSFバンクを本問題に適用しその有効性を示す。最後に関連の効果的計算法についても検討する。

# A PARALLEL AR-SPECTRAL ESTIMATION WITH FILTER BANKS

Kyoko MIYAZAKI    Kiyoshi NISHIKAWA    Hitoshi HONMA    Masahiko SAGAWA

Faculty of technology, Tokyo Metropolitan University

1,1-chome, Minami-Osawa, Hachioji City

Tokyo 192-03

**Abstract**      We describe a parallel processing method of AR-spectral estimation using filter banks, which enables us to reduce the number of arithmetic operations for computing AR parameters. We show that the conventional filter banks, such as those for subband coding, are not available and the proposed bank, referred to as FSF (*Frequency Sampling Filter*) bank, is available for spectral estimation. Further, we also consider an effective calculation method for autocorrelation of input signal.

## 1. まえがき

ARスペクトル推定では、Yule-Walkerの方程式の解法が重要な研究課題である<sup>[1][2]</sup>。例えば、Yule-Walkerの方程式を解く効果的な方法として、Levinson-Durbinのアルゴリズムがよく知られている。このアルゴリズムで推定を行う場合、自己相関数列生成のための演算量 $N^2+O(N)$ とAR係数を求めるための演算量 $p^2+O(p)$ が必要となる<sup>[2]</sup>。ただし $N$ は入力信号の点数、 $p$ はAR次数を表している。しかし入力信号のデータ点数が多大な場合や、高次のモデルで推定をしたい場合、このアルゴリズムを用いても、その演算量は膨大なものとなる。

そこで近年、フィルタバンクを用いて、スペクトル推定を並列に行う方法が研究されている<sup>[3]~[6]</sup>。これは、フィルタバンクにより信号を帯域分割し、各チャンネル毎にスペクトル推定を行うものである。その結果、高次の推定問題を低次の複数個の推定問題に帰着できる。しかしサブバンド符号化等で用いられる従来のフィルタバンクをこの問題に適用した場合、エリアシングやスペクトルギャップの影響を回避できない<sup>[3][6]</sup>。さらに、フィルタバンクの次数によっては、自己相関数列生成のための演算量が増加してしまう。

本報告では、適応信号処理のために先に提案した周波数サンプリングフィルタ(FSF)<sup>[6]</sup>バンクをこのスペクトル推定問題に適用する。またFSFバンクの適用により、従来法の持つ問題点が解決できることを理論的に示す。その結果、エリアシングの影響のない正しいARスペクトルを、少ない演算量で計算可能となる。最後に、FSFバンクの使用の下で、相関計算の効果的計算法についても検討する。

## 2. 従来のスペクトル推定

ここでは、従来のARスペクトル推定法を簡単にまとめ、フィルタバンクを用いた並列処理法に伴う問題点を要約する。

### 2.1 準備

信号 $x(n)$  ( $n=0, 1, \dots, N-1$ )は、次式の関係で与えられるとき、 $p$ 次のAR過程と呼ばれる<sup>[7]</sup>。

$$x(n) + \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) = y(n) \quad (1)$$

但し、 $y(n)$ は分散 $\sigma^2$ のガウス性白色雑音である。(1)の関係は、図1のように線形システム $A(z)$ の入出力関係を表すものとして解釈できる。この $A(z)$ は白色化フィルタと呼ばれ、その伝達関数

は、

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p} \quad (2)$$

と表現できる。

いま、 $x(n)$ の自己相関関数 $\gamma_m$ を次のように定義する。

$$\gamma_m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1-m} x(n) x(n+k) \quad m=0, 1, \dots, N-1 \quad (3)$$

このとき、

$$\mathbf{a} = (1, a_1, a_2, \dots, a_p), \quad \mathbf{p} = (\sigma^2, 0, \dots, 0)$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \dots & \gamma_{p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_p & \gamma_{p-1} & \dots & \gamma_0 \end{pmatrix}$$

とベクトル及び行列表記すると、

$$\mathbf{R} \mathbf{a} = \mathbf{p} \quad (4)$$

が成立する。上式はYule-Walkerの方程式(正規方程式)であり、AR係数ベクトル $\mathbf{a}$ は上式の解として与えられる。またAR伝達関数 $H_{AR}(z)$ は、次のように定義される。

$$\begin{aligned} H_{AR}(z) &= \frac{1}{A(z)} \\ &= \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p}} \end{aligned} \quad (5)$$

さらに、 $x(n)$ のPSD(パワースペクトル密度)は、

$$S_x(\omega) = \frac{\sigma^2}{|1 + \sum_{n=1}^p a_n \exp(-j\omega n)|^2} \quad (6)$$

で与えられる<sup>[7][8]</sup>。

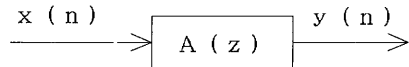


図1 白色化フィルタ

例えば、Levinson-Durbinのアルゴリズムは、Yule-Walkerの方程式を $p^2+O(p)$ の演算量で解き、AR係数ベクトル $\mathbf{a}$ を求めることができる。しかし實際上、さらに自己相関行列 $\mathbf{R}$ の生成のために演算量 $N^2+O(N)$  ( $N$ はデータ点数)が必要になる。したがって、AR次数 $p$ が高次の場合やデータ点数 $N$ が大きな場合、演算量が增大してしまう。そこで、フィルタバンクを用いて信号を複数個の帯域に分割し、高次のモデル近似問題を複数個の低次モデル近似に帰着させる方法が検

討された。しかし、従来のアプローチは2つの問題点を抱えている。1つはエイリアス成分を回避できるフィルタを設計できないことであり、他の1つは相関の演算量の低減が十分でないことである。本報告は、以上2つの問題点を改善することに主眼がある。

## 2. 2 フィルタバンクを用いた推定法

フィルタバンクを用いたスペクトル推定法を要約し、従来法を持つ問題点及び本方法の着眼点を示す。

議論を簡潔にするため、2分割フィルタバンクを例にする。フィルタバンクを用いたAR係数ベクトル、すなわち白色化フィルタ $A(z)$ を推定するためのシステム構成を図2に示す。このモデルの入出力関係は、 $z$ 領域において

$$Y(z) = \{H_0(z)F_0(z)A_0(z^2) + H_1(z)F_1(z)A_1(z^2)\}X(z) + \{H_0(-z)F_0(z)A_0(z^2) + H_1(-z)F_1(z)A_1(z^2)\}X(-z) \quad (7)$$

と記述できる。一方、サブバンド符号化等で有効なQMFバンクの設計条件は、

$$H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z) = z^{-L} \quad (8)$$

$$H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z) = 0 \quad (9)$$

である<sup>[9]</sup>。ここで、 $L$ は任意の整数値である。

いま、フィルタバンクが(8)及び(9)を完全に満足しても、(7)の右辺第2項(レート変換に伴うエイリアス成分及びイメージ成分)を消去できないことに注意されたい。これは、従来のフィルタバンクの下では、図2のシステムが線形時不変システムに帰着しないことを意味する。ゆえに図1のシステムが線形時不変システムであることを考慮すると、(8)及び(9)の下では、AR係数ベクトルを決定できない。

そこで、いま、(8)及び(9)とは異なる条件を満足する新たなクラスのフィルタバンクが必要になる。その条件とは、(7)の右辺第2項を消去し、かつ全帯域をカバーするために、

$$H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z) = z^{-L} \quad (10)$$

$$H_0(-z)F_0(z) = 0 \quad \text{かつ} \quad H_1(-z)F_1(z) = 0 \quad (11)$$

でなければならない。これは、(8)及び(9)を含むより厳しい条件である。また明らかに、この条件を満たすには理想ハーフバンドフィルタ、すなわち周波数特性が

$$H_0(e^{j\omega}) = F_0(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 \leq \omega < \pi \end{cases} \quad (12)$$

$$H_1(e^{j\omega}) = F_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \omega < \pi/2 \\ 1 & \pi/2 \leq \omega < \pi \end{cases} \quad (13)$$

のようなフィルタを用いる必要がある。このとき、求めるべき白色化フィルタ $A(z)$ は

$$A(z) = H_0(z)F_0(z)A_0(z^2) + H_1(z)F_1(z)A_1(z^2) \quad (14)$$

あるいは、

$$A(e^{j\omega}) = \begin{cases} A_0(e^{j\omega}) & 0 \leq \omega < \pi/2 \\ A_1(e^{j\omega}) & \pi/2 \leq \omega < \pi \end{cases} \quad (15)$$

のように各帯域の白色化フィルタと関係する。しかしながら、理想ハーフバンドフィルタを実現することはできない。したがって、本報告の目的の一つは、有限な次数の実現可能なフィルタを用いて(10)及び(11)の条件をいかに満足するかにある。同時に、そのような条件のもとで、自己相関の計算を効率的に行う方法をさらに検討する。

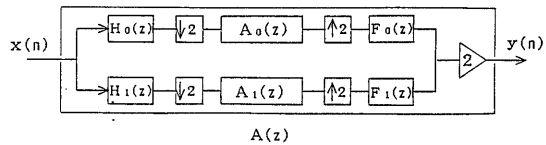


図2 2分割フィルタバンクの構成

## 3 提案するスペクトル推定法

### 3.1 周波数サンプリングフィルタ

さて、まず最初に(10)及び(11)の条件を考慮したフィルタバンクの設計法を示そう。我々は、さきに適応信号処理においてほぼ同様な問題を取り扱った。そこでは、周波数サンプリングフィルタバンク(以後、FSFバンクと略記)と呼ばれる新しいクラスのフィルタバンクを提案した。それは、(10)及び(11)を等間隔な離散周波数点でのみ満足する特性を持つ。すなわち

$$H_0(e^{j\omega k})F_0(e^{j\omega k}) + H_1(e^{j\omega k})F_1(e^{j\omega k}) = e^{-j\omega k L} \quad (16)$$

$$H_0(-e^{j\omega k})F_0(e^{j\omega k}) = 0$$

$$\text{かつ} \quad H_1(-e^{j\omega k})F_1(e^{j\omega k}) = 0 \quad (17)$$

ただし、

$$e^{j\omega k} = e^{j2\pi k/M} \quad (18)$$

図3に示すように等間隔な離散周波数点で1または0の振幅値を取るような、 $(M-1)$ 次の直線位相(あるいは零位相)ハーフバンドフィルタを用いたとき、上述の条件は明らかに成立する。このフィルタは、理想ハーフバンドフィルタに基づく周波数サンプリングフィルタとして設計される。このとき、白色化フィルタ $A(z)$ は、各チャンネルの白色化フィルタ $A_0(z)$ 及び $A_1(z)$ と、(15)から

$$A(e^{j\omega k}) = \begin{cases} A_0(e^{j\omega k}) & 0 \leq \omega < \pi/2 \\ A_1(e^{j\omega k}) & \pi/2 \leq \omega < \pi \end{cases} \quad (19)$$

のように関係する。上式は、 $A(z)$ の離散周波数点の値 $A(e^{j\omega k})$ が、各白色化フィルタから決定できることを意味する。しかしこの時点では、 $A(e^{j\omega k})$ が決定可能なものであり、 $A(z)$ が決定できるわけではない。

さて、離散周波数点の値 $A(e^{j\omega k})$ から白色化フィルタ $A(z)$ を求める方法を次に示そう。いま、 $p$ 次のAR過程を仮定する。すなわち(2)の $A(z)$ の次数が $p$ 次であるとする。いま、周波数サンプリング点数 $M$ を、

$$M \geq (P + 1) \quad (20)$$

と選ぶ。このとき、周波数サンプリング定理を考慮すると、 $M$ 点の $A(e^{j\omega k})$ から $A(z)$ を決定できるはずである。具体的には、 $A(e^{j\omega k})$ の逆DFTとして

$$a_n = -\sum_{k=0}^{n-1} A(e^{j\omega k}) e^{j2\pi k n / M}, \quad n=1, 2, \dots, p \quad (21)$$

のように係数を決定できる。

以上のFSPバンクの議論は、ツリー構成に基づくことにより容易に2のべき乗分割に拡張できる。また、最初から任意の並列分割フィルタバンクとしてFSPバンクを設計できる。その構成も容易であり、ポリフェーズDFTフィルタバンク構成や、直接、周波数領域での実現が可能である。

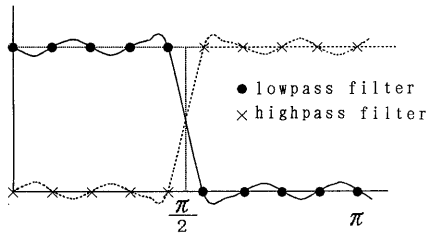


図3 周波数サンプリングフィルタ

### 3.2 自己相関の計算

次に、自己相関の効果的な計算法を考察する。(3)の自己相関を直接計算するには、データ $x(n)$ の点数を $N$ とすると、約 $N^2 + O(N)$ の乗算を要する。一方図2のシステムでは、帯域を $(M-1)$ 次のフィルタにより2分割し、ダウンサンプル後に各チャンネル毎に相関を計算する必要がある。その場合、まず $N$ 点の数列 $x(n)$ をフィルタにより畳み込むと、各チャンネルで $(N+M-1)$ 点の数列がフィルタ出力として生成される。次に2:1にダウ

ンサンプルされるので、各チャンネル信号の点数 $K$ は、約 $(N+M-1)/2$ 点数列となる。ゆえに、相関を計算するに要する演算量は、合計

$$2\{K^2 + O(K)\} \quad (22)$$

となる。したがって、帯域分割を施しても、相関の計算に要する演算量が低減するとは限らない。もし $M > N$ であるならば、逆に演算量は増大してしまう。この問題を以下で検討する。

#### A. フィルタバンクの周波数領域実現

さて、フィルタバンクを周波数領域で論じよう。いま、入力 $x(n)$ の離散時間フーリエ変換を $X(e^{j\omega})$ とすると、各アナライザフィルタ $H_i(z)$ の出力は、

$$X_{s,i}(e^{j\omega}) = H_i(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \quad i=0,1 \quad (23)$$

となる。次に、ダウンサンプラの出力は

$$X_{b,i}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} \{X_{s,i}(e^{j\omega/2}) + X_{s,i}(-e^{j\omega/2})\} \quad i=0,1 \quad (24)$$

となる。以上の処理をDFTに基づき実行しよう。その手順は、以下ようになる。

- (a)  $x(n)$ の $K \geq M+N-1$ 点DFT  $X(k)$ を求める。
- (b)  $H_i(e^{j\omega})$ の $K$ 点離散等分割周波数点の値 $H_i(k)$ と $X(k)$ の積をとる。すなわち

$$X_{s,i}(k) = H_i(k)X(k) \quad k=0, 1, \dots, K-1 \quad (25)$$

- (c) 式(24)の離散周波数点上の値を次式により求める。

$$X_{b,i}(k) = \frac{1}{2} \{X_{s,i}(k) + X_{s,i}(k+K/2)\} \quad k=0, 1, \dots, K/2-1, i=0,1 \quad (26)$$

- (d)  $X_{b,i}(k)$ の $K/2$ 点逆DFTとして $x_{b,i}(n)$ を求める。

これらの処理の後に、各チャンネル入力 $x_{b,i}(n)$ の自己相関を求め、Levinson-Durbinのアルゴリズムを用いスペクトル推定を行うことができる。しかしここでは演算の効率化を考え、(c)の処理後、周波数上で直接自己相関を求める方法を提案する。

#### B. 周波数領域における相関計算

$x_{b,i}(n) (n=0, 1, \dots, ((M+N-1)/2)-1)$ の自己相関 $\gamma_{m,i}$ のDFTは、 $X_{b,i}(k)$ の複素共役積 $R_i(k)$ として与えられる。すなわち、

$$R_i(k) = X_{b,i}(k)X_{b,i}^*(k) \quad i=0,1 \quad (27)$$

となる。ただし、 $X_{b,i}^*(k)$ は $X_{b,i}(k)$ の複素共役である。ここで、 $x_{b,i}(n)$ のDFT  $X_{b,i}(k)$ の点数に注意されたい。すなわち、 $\gamma_{m,i}$ の点数が $(M+N-4)$ 点となるので、DFT点数 $T$ は、

$$T \geq M + N - 2 \quad (28)$$

でなければならない。その後、この $R_i(k)$ の $K$ 点逆DFTとして、相関 $\gamma_{m,i}$ を求めることができる。

この方法により、相関の計算を単純なスペクトル積、すなわち $O(K)$ まで演算量を低減できる。この方法を(c)の処理後に応用することにより、相関の計算はすべて終了する。

### C. バンク処理と相関計算の同時実現

フィルタバンク処理を行うために、スペクトル積を求め、周波数領域で直接ダウンサンプルの結果を求める。次に、この各チャンネル信号のスペクトルから、スペクトル共役積を計算し、その逆DFTとして相関を求める方法を考える。

バンク処理を行うに際しA. で示した $x(n)$ のDFT点数 $K$ の条件は、

$$K \geq M + N - 1 \quad (29)$$

であった。また、自己相関をスペクトル共役積から求めるための $x_{b,i}(n)$ のDFT点数 $T$ の条件は(28)で示されている。いま、(28)及び(29)の条件を同時に満たすような $x(n)$ のDFT点数について考えよう。ここでは、 $x_{b,i}(n)$ のデータ点数は $(M+N-1)/2$ 点である。ただし $M$ はフィルタ次数、 $N$ は $x(n)$ のデータ点数である。周波数上の複素共役積で自己相関を計算するためには $x_{b,i}(n)$ のDFT点数 $T$ は $T \geq (M+N-2)$ である。そこで、ダウンサンプルへの入力点数は $2T \geq 2(M+N-2)$ 点となる。これより、 $x(n)$ のDFT点数は $2(M+N-2)$ 点以上必要ということになる。以上の結果と(29)の条件から、 $x(n)$ のDFT点数 $K$ は

$$K \geq 2(M + N - 2) \quad (30)$$

となる。(30)の条件を満たすようにDFT点数 $K$ をとることにより、バンク処理及びスペクトル共役積による相関演算が同時に実現可能となる。図4に本手法を用いた2分割FSFバンクのアナライザ側の構成を示す。

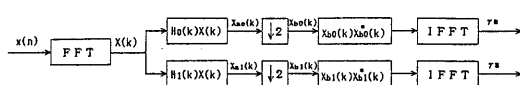


図4 フィルタバンクの構成  
(アナライザ側)

### 3. 3 演算量の検討

次に本手法を用いた場合の演算量を評価する。いま、入力信号 $x(n)$ のデータ点数を $N$ 、FSFの次数を $(M-1)$ 次、FSFの分割数を $B$ とする。このとき、(30)と同様の議論により、FFT点数は $\{2(M+N-1)$

$-B\}$ 点以上とればよい。表1では、帯域分割を行わない従来法と本方法において必要となる演算回数(乗算回数)を比較している。但し、本方法では1チャンネル当たりに必要な演算量を示している。また、AR係数はLevinson-Durbinのアルゴリズムにより求めた。フィルタリングはFFT、IFFT及び周波数積に必要な演算量を示し、自己相関はスペクトル共役積の演算量を示している。本方法により、まず自己相関数列の生成のための演算量はデータ点数が多くなほど効果的であることがわかる。また、AR係数を求めるための演算量は帯域分割数を増やすにしたがって低減されることがわかる。

表中、括弧内の数字は $N=256$ 、 $M=256$ 、 $B=4$ 、FFT点数1024としたときにそれぞれ必要とされる演算量を示している。また、従来法を100%としたときのそれぞれの比率も同時に記す。

より実際的な比較をシミュレーションで行う。

表1 演算量の比較

$N=256$ ,  $M=256$ ,  $B=4$

	従来法	本方法 <1チャンネル当たり>
フィルタリング	—	$2Q/B \cdot (2 \log_2 Q - \log_2 B - 1) + 4Q$ (21504)
自己相関	$N^2 + O(N)$ (65792, 100%)	$4 \cdot Q/B$ (1024, 1.6%)
AR係数	$p^2 + O(p)$ (66304, 100%)	$p^2/B^2 + O(p)$ (4288, 6.5%)
B=4での 総演算量	(65792, 100%)	(30080, 22.8%)

$N$ :入力データ点数及  $p$ :AR次数  $B$ :分割数  
 $M$ :フィルタタップ数  
 $Q = 2(M+N-1)-B$

### 4. シミュレーション

白色雑音中の2つの正弦波周波数を推定する例を検討する。この例より、本報告で提案するスペクトル推定法の推定精度及び演算量低減効果を検討する。シミュレーション条件を以下に示す。

$$x(n) = \sin(2\pi f_1 n) + \sin(2\pi f_2 n) + u(n) \quad (31)$$

とする。但し、 $u(n)$ は $\sigma^2=0.2$ の分散を持つ白色ガウス雑音、正規化周波数 $f_1=0.249$ 、 $f_2=0.252$ であり、データ点数は256点、フィルタ次数は255次、FFT点数は1024点である。また、Levinson-Durbinのアルゴリズムの次数判定法はAIC法<sup>[8]</sup>を用いた。

図6はフィルタバンクを用いず従来の方法でスペクトルを推定した結果を示している。図5

は4分割FSFバンクでスペクトルを推定した結果である。従来法よりスペクトル分解能が向上し、2つのスペクトルを十分な精度で推定していることが確認された。また、参考までにデータを直接1024点FFTにかけた結果を図7に示す。FFTではスペクトル分解能が不十分である。

図8では、従来法の演算量を100%としたときの本方法の演算量の比率を分割数ごとに示している。表1による演算量と実際の結果が違うのは、フィルタバンクによりB分割された各チャネル信号のAR次数が単純にもとの信号のAR次数の1/B倍となるわけではないことに起因している。実際には1/B以上の場合や、それ以下の場合もある。しかし、本シミュレーション結果より、実際の演算量も表1の結果とほぼ一致しており、十分に演算量を低減できることが確認された。

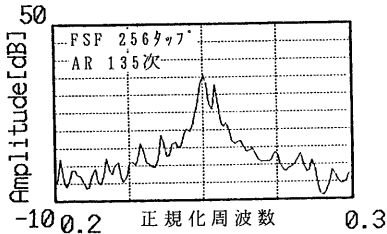


図5 4分割FSFによる推定結果

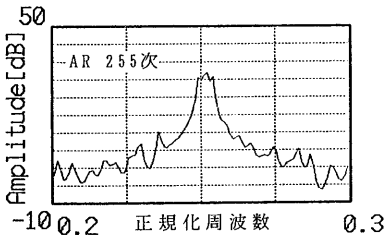


図6 従来法

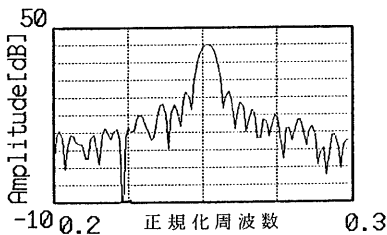


図7 FFT (1024点)

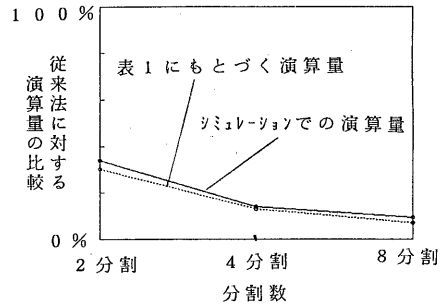


図8 分割数による演算量の比較

## 5. むすび

本報告では、演算量低減を目的にARスペクトル推定にFSFバンクを用いた並列処理を導入することを提案した。FSFバンクは離散周波数点では、全くエリアシングを起こさないという特徴を持っている。すなわち、その離散周波数点上では、完全にスペクトルを推定することができる。本文では、演算量の点から本報告の有効性について検討した。さらに、シミュレーションでは、従来法との比較により、推定精度の面でも本報告が優れているということを確認した。

## 6. 参考文献

- [1] J. Makhoul, "Linear prediction: A tutorial review," Proc. IEEE, vol. 63, pp. 561-580, Apr. 1975.
- [2] S. M. Kay and S. L. Marple, JR, "Spectrum analysis - a modern perspective," Proc. IEEE, vol. 69, pp. 1380-1419, Nov. 1981.
- [3] S. K. Mitra, H. Babic and V. S. Someyazulu, "A modified perfect reconstruction QMF bank with auxiliary channel," in Proc. ISCAS-89, May 1989, pp. 2132-2135.
- [4] V. S. Somayazulu, S. K. Mitra and J. J. Shynk, "Adaptive line enhancement using multi-ratetechniques," Proc. ICASSP - 89, May 1989, Glasgow, Scotland, pp. 928-931.
- [5] A. Gilloire and M. Vetterli, "Adaptive filtering in subbands," Proc. ICASSP-88, Apr. 1988, New York, pp. 1572-1575.
- [6] H. Kiya and S. Ymaguchi, "FSF (Frequency Sampling Filter) bank for adaptive system identification," in Proc. ICASSP-92, to be published.
- [7] 添田喬, 中溝高好, 大松繁: "信号処理の基礎と応用", 日新出版 (1986).
- [8] 白井支朗, 伊藤宏司, 三田勝己: "生体信号処理の基礎", オーム社, (1985).
- [9] P. P. Vaidyanathan, "Quadrature mirror filter banks, M - band extensions and perfect - reconstruction techniques," ASSP magazine, July 1987, pp. 4-20.