

メッシュ配列並列計算機の耐故障化のための 再構成に関する1考察

— 危険なプロセッサ数の最小化 —

高浪 五男 井上 克司 渡辺 孝博

山口大学工学部知能情報システム工学科

〒755 宇部市常盤台2557

あらまし 右下辺に予備PEをもつ場合と対角線上に予備PEをもつ場合の二つの再構成法について, "危険なプロセッサ" の数を最小化する問題を考察する. ここで, 危険なプロセッサとは, 正常なPEで, これが将来さらに故障したとき予備PEの割振りを変更しなければならないものをいう. 前者の再構成法についてはすでに他の文献で報告されている⁽¹⁾. ここでは, まず, 故障PEをどの予備で補償するかを決める問題をグラフ理論のマッチング問題として定式化し, ここで考察する二つの再構成法は統一的に議論できることを示す. この結果を用い, 危険なプロセッサの数を最小化するアルゴリズムを与える. このアルゴリズムは[1]のそれに比し特性化が簡単で見やすいという利点をもつ.

和文キーワード メッシュ結合, 故障許容, 並列計算機, 再構成, 危険なプロセッサ

A Note on Reconstruction Strategies For Fault Tolerant Arrays

—Minimization of the Numbers of Dangerous Processors—

Itsuo TAKANAMI Katsushi INOUE Takahiro WATANABE

Computer Science and Systems Engineering, Yamaguchi University

Tokiwadai, Ube, 755

Abstract We discuss the problem for minimizing the numbers of "dangerous processors" for the two cases of reconfiguring processor arrays with spares on their right and bottom boundaries, and on their diagonal, respectively. Here, dangerous processors are non-faulty ones for which there remains no longer any spare processor to be assigned if one more fault occurs. The former case has already been solved⁽¹⁾. Here firstly, we formalize the problems of assigning spares to faulty processors as matching problems in graph theory and show that the two problems can be solved in the same framework. Using the result, we give algorithms for minimizing the numbers of dangerous processors. The characterization of the problems by our algorithm is simpler and plainer than that by [1].

英文 key words Mesh-connected, fault tolerance, parallel computer, reconstruction, dangerous processor.

1. まえがき

原子力、気象、分子科学などの分野では $10^{10} \sim 10^{13}$ FLOPS程度の巨大計算も少なくなく、現在のスーパーコンピュータよりさらに数けた高い性能を有する計算機の出現が期待されている。このような性能は単一型では実現困難と考えられ、数千～数万、さらにはそれ以上の処理要素 (PE) からなる超並列計算機の実現に向けての研究がなされている⁽⁵⁾。

超並列計算機を実現するさいの一つ重要な課題は、これが実用に耐えうる信頼性を有していることである。まず、初期故障については経済的に見合う程度の歩留りが保障されなくてはならない。また、稼働中の故障についても何らかの冗長構成の適用などの高信頼化対策が不可欠となる⁽⁴⁾。

本報告では、メッシュ配列の並列計算機において、冗長な予備PEをメッシュの上と左の辺に配置した場合 (直交辺予備方式) と対角線上に配置した場合 (対角線予備方式) の二つの再構成法について、“危険なプロセッサ”の数を最少化するように再構成を行なう問題を考察する。ここで、危険なプロセッサとは正常なPEで、これが将来さらに故障したとき予備PEの割り振りを変更しなければならないものをいう。この問題は最初、Melhemによって提起された⁽²⁾。Chen等は直交辺予備方式の場合についてこの問題を考察し、危険なプロセッサの数を最少にするように予備PEを割り振るアルゴリズムを与えている⁽¹⁾。本報告では上の二つの場合を統一的に定式化して考察する。この定式化はChen等のそれと異なり、我々の方が見やすいという利点をもつ。

2. 方式の説明

直交辺予備方式：図1に示すように、サイズ $N \times N$ (N 行 N 列) のPE群の第0行と第0列にそれぞれ N 個の予備PEを付加し配置する。 i 行 j 列のPE p_{ij} ($p(i, j)$ とも記すことがある) が故障したとき、第0行上の予備 p_{0j} か第0列上の p_{i0} のいずれかで補償する。

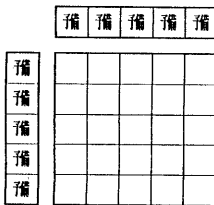


図1 直交辺予備方式の子備配置

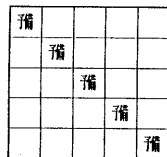


図2 対角線予備方式の子備配置

対角線予備方式：図2に示すように、サイズ $N \times N$ (N 行 N 列) のPE群の対角線上に予備PEを配置する。 p_{ij} が故障したとき、対角線上の予備PEである p_{ii} または p_{jj} で補償する。

3. 修復可能条件

上の二つの方式による補償方式について、故障PE達をどの予備で補償するかを決定する方法を無向グラフのマッチング問題として定式化する。

直交辺予備方式：次のような2部グラフ G を構成する。 $G=(V, E)$ 。ここに、 $V=V_r \cup (V_c \cup V_r)$ 、 $V_r=\{p_{ij} \mid 0 \leq i, j \leq N, p_{ij}$ は故障PE $\}$ 、 $V_c=\{p_{i0}, \dots, p_{N0}\}$ 、 $V_r=\{p_{01}, \dots, p_{0N}\}$ 、 $E=\{(p_{ij}, p_{i0}) \mid 1 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq N, p_{ij}$ は故障PE $\} \cup \{(p_{ij}, p_{0j}) \mid 0 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N, p_{ij}$ は故障PE $\}$ 。 G を故障補償グラフ、 V_r を故障節点集合、 $(V_c \cup V_r)$ を予備節点集合と呼ぶ。このとき、次のことが成り立つことは明らかである。

〔性質1〕故障PEの集合 V_r が修復可能であるための必要十分条件は、 V_r から $(V_c \cup V_r)$ へのマッチングが存在することである。このマッチング M において、 p_{ij} は $(p_{ij}, p_{i0}) \in M$ なら p_{i0} で、 $(p_{ij}, p_{0j}) \in M$ なら p_{0j} で補償される。 □

対角線予備方式：次のような2部グラフ G を構成する。 $G=(V, E)$ 。ここに、 $V=V_r \cup V_d$ 、 $V_r=\{p_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq N, p_{ij}$ は故障PE $\}$ 、 $V_d=\{v_1, \dots, v_N\}$ 、 $E=\{(p_{ij}, v_i), (p_{ij}, v_j) \mid 1 \leq i, j \leq N, p_{ij}$ は故障PE $\}$ 。 G を故障補償グラフ、 V_r を故障節点集合、 V_d を予備節点集合と呼ぶ。このとき、次のことが成り立つことは明らかである。

〔性質2〕故障PEの集合 V_r が修復可能であるための必要十分条件は、 V_r から V_d へのマッチングが存在することである。このマッチング M において、 p_{ij} は $(p_{ij}, v_i) \in M$ なら i 行 i 列の予備 v_i で、 $(p_{ij}, v_j) \in M$ なら j 行 j 列の予備 v_j で補償される。 □

上の二つの方式における故障グラフにおいて、任意の故障節点の次数は2以下であることから、この二つの方式に対する修復可能条件を統一的に以下のよう求める。

記法： $G=(V, E)$ を $V=V_1 \cup V_2$ 、 $V_1 \cap V_2 = \phi$ なる2部グラフとする。 $S \subseteq V_1$ について、 $\psi(S) = \{v \in V_2 \mid (w, v) \in E, w \in S\}$ とする。節点 u の次数を $\text{deg}(u)$ で表す。

〔性質3〕 $G=(V, E)$ を $V=V_1 \cup V_2$ 、 $V_1 \cap V_2 = \phi$ で、 V_1 の任意の節点の次数が2以下の2部グラフとする。 V_1 から V_2 へのマッチングが存在するための必要十分条件は、 $V_1 \cup \psi(V_1)$ を節点集合とする G の部分グラフを連結成分に分割し、これらの連結成分において V_1 に属する節点集合をそれぞれ C_1, C_2, \dots, C_k (各 C_i, C_j

$\subseteq V_1, C_i \cap C_j = \emptyset, i \neq j$) とするとき、すべての C_i について $|C_i| \leq |\psi(C_i)|$ が成り立つことである。ここに、 $|C_i|$ は C の要素数を表す。

(証明) 必要性は明らかである。十分性: $|C_i|$ に関する帰納法による。 $C_i \cup \psi(C_i)$ を節点集合とする G の一つの連結部分グラフ $G_i = (C_i \cup \psi(C_i), E_i)$ について証明すれば十分である。 $|C_i| = 1$ のときは明らかである。条件を満たす $|C_i| \leq m$ ($m \geq 1$) なるすべての C について V_2 へのマッチングが存在すると仮定し、 $m+1 = |C_i| \leq |\psi(C_i)|$ とする。

(1) $\psi(C_i)$ に次数 1 の節点 v が存在するとき。 $2 \leq |C_i|$ であるから、 $(w, v) \in E_i$ なる $w \in C_i$ について $\deg(w) = 2$ である。 w を C_i から取り除いた $C_i' = C_i - \{w\}$ はやはり連結である。また、 $\psi(C_i') = \psi(C_i) - \{v\}$ であり、 $|\psi(C_i')| = |\psi(C_i)| - 1 \geq m = |C_i'|$ 。帰納法の仮定より、 C_i' から $\psi(C_i')$ へのマッチングが存在する。これに枝 (w, v) を加えると C_i から $\psi(C_i)$ へのマッチングが得られる。

(2) $\psi(C_i)$ に次数 1 の節点が存在しない ($\psi(C_i)$ の任意の節点の次数が 2 以上) とし。

① この条件および C_i の任意の節点の次数は 2 以下であることから、 $2 \times |\psi(C_i)| \leq |E_i| \leq 2 \times |C_i|$ 。ゆえに、 $|C_i| = |\psi(C_i)|$ である。

② C_i に次数 1 の節点が存在するとすると、 $2 \times |\psi(C_i)| \leq |E_i| < 2 \times |C_i|$ となることから $|\psi(C_i)| < |C_i|$ となり、矛盾するので、この場合はありえない。よって、 C_i の任意の節点の次数は 2 である。したがって、 $\psi(C_i)$ の任意の節点の次数も 2 である。

③ 以上から、 C_i と $\psi(C_i)$ の節点が交互にすべて現われる閉路が得られる。よって、 C_i から $\psi(C_i)$ へのマッチングが存在する。なお、この場合のマッチングは 2 通りしかない。(証明終わり)

[性質 4] 性質 3 における必要十分条件は次のようにもいえる。

$$|\psi(C_i)| = |C_i| \text{ か または } |\psi(C_i)| = |C_i| + 1.$$

(証明) 十分性は性質 3 より明らかである。

必要性: ① $\psi(C_i)$ に次数 1 の節点が存在しないとき。

性質 3 の証明(2)の①より $|\psi(C_i)| = |C_i|$ である。

② $\psi(C_i)$ に次数 1 の節点が存在するとき。性質 3 の証明(1)と同様の操作を行い、得られた $\psi(C_i')$ に再び次数 1 の節点が存在する場合は同様にこの(1)の操作を行なう。以下同様にこの操作を続け、この操作のみでマッチングが得られるときは、最後に $\psi(C_i)$ 側にも一つも節点が残らないか (この場合は $|\psi(C_i)| = |C_i|$)、一つ残るか (この場合は $|\psi(C_i)| = |C_i| + 1$) である。そうではなく、性質 3 の証明(1)の操作の途中で(2)の操作になる場合は $|\psi(C_i)| = |C_i|$ である。

(証明終わり)

$|C_i| = |\psi(C_i)|$ である連結成分をクラス 1 の連結成分、 $|C_i| + 1 = |\psi(C_i)|$ である連結成分をクラス 2 の連結成分と呼ぶことにする。このとき、性質 4 より、 $|C_i| \leq |\psi(C_i)|$ である連結成分はこの二つのクラスのいずれかに属することになる。

[性質 5] クラス 2 の連結成分 $C_i \cup \psi(C_i)$ については、 $\psi(C_i)$ に次数 1 の節点 v が必ず存在する。

(証明) 性質 3 の証明(2)の①より。(証明終り)

[性質 6] クラス 2 の連結成分 $C_i \cup \psi(C_i)$ については、 $\psi(C_i)$ の任意の節点を除いても C_i からのマッチングが存在する。

(証明) クラス 2 の連結成分については、 $\psi(C_i)$ に次数 1 の節点 v が存在する。そのような節点 $v \in \psi(C_i)$ を取り除いても連結であり、 $|\psi(C_i) - \{v\}| = |\psi(C_i)| - 1 = |C_i|$ であるので、 C_i から $\psi(C_i) - \{v\}$ へのマッチングが存在する。 $\psi(C_i)$ の次数 2 以上の節点 w を取り除く場合については、まず、 $\psi(C_i)$ から次数 1 の節点を任意に選び、それに隣接する C_i の節点をマッチさせ、これらを取り除く。残されたものはやはり連結であるので、それを C_i' とする。 $|\psi(C_i')| = |C_i'| + 1$ であるから、 $\psi(C_i')$ に次数 1 の節点 v が存在する。そこで、上と同様にして $\psi(C_i')$ から次数 1 の節点を任意に選び、それに隣接する C_i' の節点をマッチさせ、これらを取り除く。このような操作を最後まで続けたとすると、最後の段階では $|\psi(C_i')| = |C_i'| + 1 = 2$ となる。したがって、ある段階で、 w の次数が 1 となる時点が来る。その時点で w のみを取り除く。そのときまだ残っている連結成分 C_i'' について、 $|\psi(C_i'')| = |C_i''|$ であるからマッチングが存在する。

(証明終わり)

[性質 7] $|C_i| \leq |\psi(C_i)|$ で C_i に次数 1 の節点が存在するならばこの連結成分はクラス 1 に属する。

(証明) クラス 2 に属すると仮定する。性質 5 より、 $\psi(C_i)$ に次数 1 の節点 v が存在する。そこで、性質 4 の証明②と同様の操作を行なってマッチングを取っていくと、最後に $\psi(C_i)$ 側に節点 1 つ残ることになる。従って、 C_i の次数 1 の節点のマッチングが取られる直前のグラフは非連結となり、これは矛盾である。(証明終わり)

4. 危険なプロセッサ数の最小化

まず、対角線予備方式について考察する。図 3 は \times 印で示す同じ故障パターンについて、補償のための予備 PE の異なる割り振りをしたときの危険なプロセッサを \bullet 印で示したものである。(a) 図では \bullet 印は 13 個、(b) 図では 15 個である。

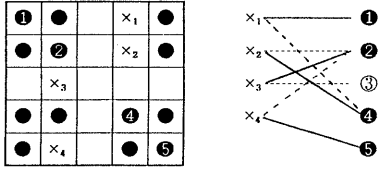


図3(a) 5×5の格子に4個の故障が有り、太線で示すように補償した場合。

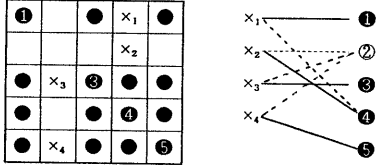


図3(b) 5×5の格子に4個の故障が有り、太線で示すように補償した場合。

〔性質8〕故障PEの集合を $F(|F|=k)$ とし、これを補償する予備PEを $p(i_1, i_1), \dots, p(i_k, i_k)$ とする。このとき、危険なプロセッサの数 N_D は

$$N_D = k^2 - k + |F - C_F| \quad (1)$$

である。ここに、 $C_F = \{p(u, v) \mid u, v \in \{i_1, \dots, i_k\}\}$ 。

〔証明〕危険なプロセッサは C_F に含まれるPE(その要素数は k^2)からそれに含まれる F の要素(その要素数は $k - |F - C_F|$)を取り除いたものである。(証明終わり)

式(1)の N_D を最小にするには、この式の右辺の第3項 $|F - C_F|$ を最小にすればよい。これは C_F に含まれない F の要素数を最小にすることになる。この故障パターンに対する故障グラフにおいて、クラス1の連結成分 $C_1 \cup \psi(C_1)$ については予備PEがどの故障PEを補償するかには(2通りの)自由度があるが、予備PEの選択には自由度がない。この場合は、 C_1 の節点に対応する故障PEはすべて C_F に含まれる。クラス2の連結成分については性質6より、 $\psi(C_1)$ の任意の節点を除きうる自由度をもっている。そこで、節点 v を取り除くと、 v の次数 $\deg(v)$ 個の C_1 の故障節点が C_F に含まれなくなる。このことから次の性質が成り立つ。

〔性質9〕危険なプロセッサの数を最小にするにはクラス2の各連結成分 $C_i \cup \psi(C_i)$ について、 $\psi(C_i)$ の節点で次数が最小のものを取り除けばよい。□

〔性質10〕故障集合 F において、 $|F|=k$ 、クラス2の連結成分の個数を N_c とすると、危険なプロセッサの

最小個数は $(k^2 - k + N_c)$ である。□

〔証明〕性質5と9より。(証明終わり)

例えば、図3の故障集合については、 $4^2 - 4 + 1 = 13$ が危険なプロセッサの最小個数である。したがって、(a)図が危険なプロセッサを最小にする補償の仕方の一つになっていることが分かる。

次に、直交辺予備方式について考察する。

〔性質11〕故障PEの集合(予備PEの故障も含める)を $F(|F|=a+b)$ とし、これを補償する予備PE達を $W_P = W_c \cup W_r$ 、ただし、 $W_c = \{p(i_1, 0), \dots, p(i_a, 0)\}$ 、 $W_r = \{p(0, j_1), \dots, p(0, j_b)\}$ 、各 $i_1, \dots, i_a, j_1, \dots, j_b \geq 1$ とする。このとき、危険なプロセッサの数 N_D は

$$N_D = a \times b + |F - F \cap W_P - W| \quad (2)$$

である。ここに、 $W = \{p_{s,t} \mid s \in \{i_1, \dots, i_a\}, t \in \{j_1, \dots, j_b\}\}$ 。

〔証明〕故障していない W_P の要素と W から故障PEを除いたものが危険なプロセッサであるから、 $N_D = |W - F| + |W_P - F|$ 。ここに、 $|W - F| = |W| - |F \cap W|$ で $W_P \cap W = \phi$ であるから、 $|W - F| = |W| - (|F - W_P \cap F| \cap W) = |W| - \{|F - W_P \cap F| - |F - W_P \cap F - W|\} = a \times b - \{|F| - |W_P \cap F| - |F - W_P \cap F - W|\}$ 、さらに、 $|W_P - F| = |W_P - W_P \cap F| = |W_P| - |W_P \cap F|$ 。また、 $|W_P| = |F|$ 。(証明終わり)

固定された故障集合 F に対して、それを補償する予備PEの集合 W_P に自由度があり、 W_P の選び方に応じて式(2)の N_D も変わり、 N_D が最小になるように W_P を選ぶことを考える。これは、 W に含まれない F の要素数を最小にすることになる。

W_P の選び方に自由度があるのはクラス2の連結成分についてであり、性質6より、 $\psi(C_i)$ のどの節点をも選択から外することができる。

〔性質12〕クラス2の連結成分 $C_i \cup \psi(C_i)$ について、 $\psi(C_i)$ の任意の節点 v に隣接する節点を u_1, \dots, u_k とするとき、 v を選択から外すと u_1, \dots, u_k は W に含まれず、これら以外の C_i の節点はすべて W に含まれる。□

以上の諸結果より、与えられた故障集合に対し、危険なプロセッサ数を最小にするように予備PEを割当てるアルゴリズムを与える。

危険なプロセッサ数の最小化アルゴリズム
(直交辺予備方式)

(1)故障集合から故障グラフを求める。各連結成分を $CC_i = C_i \cup \psi(C_i)$ で表す。

記法： $V_{i,c} = \psi(C_i) \cap V_c$ 、 $V_{i,r} = \psi(C_i) \cap V_r$ 、ただし、 $V_c = \{p_{1,0}, \dots, p_{N_c,0}\}$ 、 $V_r = \{p_{0,1}, \dots, p_{0,N_r}\}$ 。

$$(2) a := \sum_{c_i \in \text{クラス1}} |V_{i,c}|$$

$$b := \sum_{c_i \in \text{クラス1}} |V_{i,r}|$$

(3) クラス 2 に属する各連結成分 CC_i について以下の計算を行なう。ここに、 $V_{i,c}$ の最小次数の節点を $V_{i,c}$ 、その次数を $d_{i,c}$ 、 $V_{i,r}$ の最小次数の節点を $V_{i,r}$ 、その次数を $d_{i,r}$ で表す。また、変数 $x_i (=0$ または $1)$ を導入し、

$$a := a + \sum_{c_i \in \text{クラス2}} (|V_{i,c}| - 1 + x_i)$$

$$b := b + \sum_{c_i \in \text{クラス2}} (|V_{i,r}| - 1 + (1 - x_i))$$

$$c := \sum_{c_i \in \text{クラス2}} (d_{i,c} \cdot (1 - x_i) + d_{i,r} \cdot x_i)$$

危険なプロセッサの最少数 N_{Dmin} を

$$N_{\text{Dmin}} = \min \{ a \cdot x + b + c \mid \text{各 } x_i = 0 \text{ または } 1 \}$$

で求める。

また、 N_{Dmin} を与える x_i 達について、

$$W_{P_i} = \begin{cases} \psi(C_i) - \{V_{i,c}\} \cdots & x_i = 0 \text{ のとき} \\ \psi(C_i) - \{V_{i,r}\} \cdots & x_i = 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

によって W_{P_i} を求める。このとき、

$$W_P = \bigcup_{c_i \in \text{クラス1}} \psi(C_i) \cup \bigcup_{c_i \in \text{クラス2}} W_{P_i}$$

(アルゴリズム終わり)

[例題 1] 図 4 は ×印で示される 8 個の故障 PE を予備 PE $\{p_{01}, p_{02}, p_{04}, p_{05}, p_{06}, p_{20}, p_{30}, p_{50}\}$ で補償した場合の危険なプロセッサを ●印で示している。この場合は危険なプロセッサ数は 17 個である。

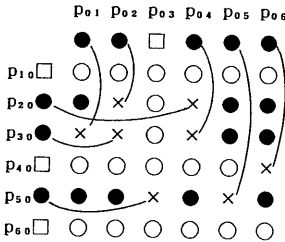


図 4 6×6 のメッシュに ×印で示す 8 個の PE が故障し、それを円弧で示すように補償したときの危険なプロセッサ (●印で示す)

次に、この故障集合に対して最小化アルゴリズムを適用して、危険なプロセッサ数を最小化してみる。

(1) この場合の故障補償グラフは図 5 のようになる。

このグラフより、

クラス 1 の連結成分の集合 = $\{CC_1\}$,

クラス 2 の連結成分の集合 = $\{CC_2, CC_3\}$,

$V_{1,c} = \{p_{20}, p_{30}\}$, $V_{1,r} = \{p_{01}, p_{02}, p_{04}\}$,

$V_{2,c} = \{p_{40}\}$, $V_{2,r} = \{p_{06}\}$,

$V_{3,c} = \{p_{50}\}$, $V_{3,r} = \{p_{03}, p_{05}\}$,

$$(2) a = \sum_{c_i \in \text{クラス1}} |V_{i,c}| = 2,$$

$$b = \sum_{c_i \in \text{クラス1}} |V_{i,r}| = 3.$$

$$(3) d_{2,c} = 1, d_{2,r} = 1, d_{3,c} = 2, d_{3,r} = 1.$$

$$a = 2 + 1 - 1 + x_2 + 1 - 1 + x_3 = 2 + x_2 + x_3,$$

$$b = 3 + 1 - 1 + (1 - x_2) + 2 - 1 + (1 - x_3) = 6 - x_2 - x_3,$$

$$c = 1 \cdot (1 - x_2) + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot (1 - x_3) + 1 \cdot x_3 = 3 - x_3.$$

$$(4) N_{\text{Dmin}} = \min \{ (2 + x_2 + x_3)(6 - x_2 - x_3) + 3 - x_3 \} = 15, \text{ ただし, } x_2 = x_3 = 0 \text{ のとき.}$$

$$W_{P_2} = \{p_{40}, p_{06}\} - \{p_{40}\} = \{p_{06}\}.$$

$$W_{P_3} = \{p_{50}, p_{03}, p_{05}\} - \{p_{50}\} = \{p_{03}, p_{05}\}.$$

以上より、

$$W_P = \{p_{20}, p_{30}\} \cup \{p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{04}, p_{05}, p_{06}\}$$

が危険なプロセッサの数を最小にする予備 PE 達で、この選ばれた予備 PE 達は図 5 の故障補償グラフで ◯印をつけたものになり、その補償の様子と危険なプロセッサは図 6 の ●印を付けたものになる。

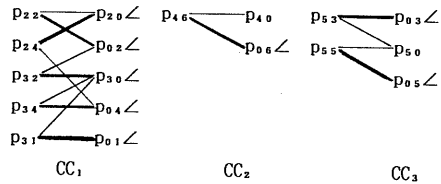


図 5 補償グラフ

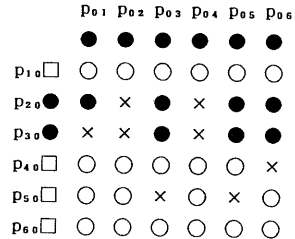


図 6 危険なプロセッサ数を最小とする補償とそのときの危険なプロセッサ (●印で示す)

[例題 2] 予備 PE が故障した場合の例を図 7 に示す。この例では予備 p_{40} と $\{p_{16}, p_{22}, p_{23}, p_{35}, p_{45}, p_{54}, p_{61}, p_{64}, p_{66}\}$ の計 10 個の PE が故障している。

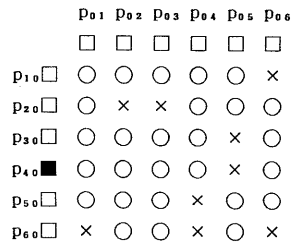


図 7 予備 PE が故障した場合の例 (■, ×印は故障 PE)

(1)この場合の故障補償グラフは図8のようになる。
このグラフより、

- クラス1の連結成分の集合 $=\{CC_1\}$,
 クラス2の連結成分の集合 $=\{CC_2, CC_3\}$,
 $V_{1c}=\{p_{30}, p_{40}\}$, $V_{1r}=\{p_{05}\}$,
 $V_{2c}=\{p_{20}\}$, $V_{2r}=\{p_{02}, p_{03}\}$,
 $V_{3c}=\{p_{10}, p_{50}, p_{60}\}$, $V_{3r}=\{p_{01}, p_{04}, p_{06}\}$,
 (2) $a = \sum_{c_1 \in \mathcal{C}_1} |V_{1c}| = 2$,
 $b = \sum_{c_1 \in \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3} |V_{1r}| = 1$.
 (3) $d_{2c}=2, d_{2r}=1, d_{3c}=1, d_{3r}=1$.
 $a=2+(1-1+x_2)+(3-1+(1-x_3))=4+x_2+x_3$,
 $b=1+(2-1+(1-x_2))+(3-1+(1-x_3))=6-x_2-x_3$,
 $c=2 \cdot (1-x_2)+1 \cdot x_2+1 \cdot (1-x_3)+1 \cdot x_3=3-x_3$.
 (4) $N_{D_{min}} = \min \{ (4+x_2+x_3)(6-x_2-x_3)+3-x_3 \}$
 $= 26$, ただし、 $x_2=x_3=1$ のとき。
 $W_{P2} = \{p_{20}, p_{02}, p_{03}\} - \{p_{03}\} = \{p_{20}, p_{02}\}$.
 $W_{P3} = \{p_{10}, p_{50}, p_{60}, p_{01}, p_{04}, p_{06}\} - \{p_{01}\}$
 $= \{p_{10}, p_{50}, p_{60}, p_{04}, p_{06}\}$

以上より、

$$W_P = \{p_{30}, p_{40}, p_{05}, p_{20}, p_{02}, p_{10}, p_{50}, p_{60}, p_{04}, p_{06}\}$$

が危険なプロセッサの数にする予備PE達で、この選ばれた予備PE達は図8の故障補償グラフで \sphericalangle 印をつけたものになり、故障PEとそれを補償する予備PEとの関係は太線で結ばれている。このときの危険なプロセッサは図9の●印を付けたものになる。

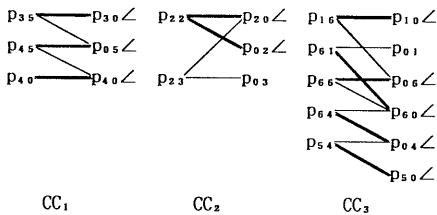


図8 故障補償グラフ

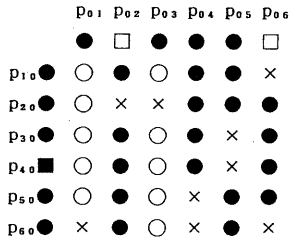


図9 危険なプロセッサ数を最小とする補償とそのときの危険なプロセッサ (●印で示す)

5. むすび

メッシュ配列の並列計算機の耐故障化のため、冗長な予備PEをメッシュの直交辺に配置した場合とメッシュの対角線上に配置した場合の二つの再構成法について、危険なプロセッサの数を最小にするように再構成するアルゴリズムを与えた。この二つの場合はグラフのマッチング問題として統一的かつ簡明に取り扱うことができた。そのため、Chen等のアルゴリズムより見通しが良くなっている。今後の課題として、3つまたは4つの辺に予備を配置した場合についても同様の問題を考えることは興味あることである。

謝辞：本研究は一部文部省科学研究費05680275及びCSK科学技術助成金の援助を受けている。

文献

- (1) C. Chen, A. Feng, T. Kikuno and K. Torii: "Spare Processor Assignment for Reconfiguration of Fault-Tolerant Arrays", Tran. of IEICE, Vol. E73, No. 8, pp. 1247-1256 (1990-06).
- (2) R. G. Melhem: "Bi-level reconfigurations of fault tolerant arrays in bi-modal computational environments", Proc. 19th int. Symp. on Fault-Tolerant Computing, pp. 488-495 (1988).
- (3) M. Sami and R. Stefanelli: "Reconfigurable architectures for VLSI processing arrays", IFIP National Computer Conf. pp. 565-577 (1983)
- (4) 南谷 崇: "並列処理におけるフォールトトレランス技術", 情報処理 Vol. 27, No. 9, pp. 1039-1048 (昭61-9).
- (5) 小池: (解説) "超並列マシン", 情報処理 Vol. 28, No. 1, pp. 94-105 (昭62-1).
- (6) K. Sugihara and T. Kikuno: "Analysis of Fault Tolerance of Reconfigurable Arrays Using spare Processors", IEICE TRANS. INF. & SYST. Vol. E75-D, No. 3, pp. 315-324 (1992-5).
- (7) 高浪、渡辺、久長、井上: "対角線上に予備をもつ格子状結合並列計算機の耐故障性", 信学会技報、FTS91-60, pp. 69-76 (1991-12).
- (8) 高浪、岡、井上、渡辺: "格子状結合高並列計算機の高信頼化の一構成とその信頼性解析", 信学誌 D-I Vol. J75-D-I No. 6, pp. 358-369 (1992-06).