

層割当てのためのネット集合分割に基づく 制約付きビア数最小化手法 PNLA

小林 利大^{††} 渡邊 敏正[†]

[†] 広島大学工学部 第二類 回路システム工学講座

^{††} 広島大学大学院 工学研究科 情報工学専攻

〒 739-8527 東広島市鏡山一丁目 4-1

(電話) 0824-24-7662 (渡邊), -7661 (小林)

(ファクシミリ) 0824-22-7028

(電子メール) {toshi, watanabe}@infonets.hiroshima-u.ac.jp

あらまし

k 層の制約付きビア数最小化問題 (k CVM) とは, k 層に割当て可能な初期配線レイアウトが与えられたとき, ビア数が最少となるような配線の層割当てを求める問題である. $k=2$ ならば最適解法が存在し, $k=3$ の場合でも性能のよい発見的解法が得られている. しかし, $k \geq 4$ の CVM に対する研究は [7] にはあるもののほとんど行われていない. 本稿では, $k \leq 3$ の場合の k CVM の解法を組み合わせ, $k \geq 4$ なる k CVM を解く発見的解法 PNLA を提案し, その性能を実験的に評価する. PNLA の中心的部分は, 所与のネット集合をいくつかの集合に分割し, 各々を 2CVM, または 3CVM として解くためのネット集合の分割手法である.

キーワード 制約付きビア数最小化, 層割当て, 幅優先探索, 発見的解法, NP-完全性

Constrained Via Minimization Algorithm PNLA based on Partitioning a Set of Nets for Layer Assignment

Toshihiro Kobayashi^{††}, and Toshimasa Watanabe[†]

[†] Department of Circuits and Systems, Faculty of Engineering, Hiroshima University

^{††} Graduate School of Engineering, Hiroshima University

1-4-1, Kagamiyama, Higashi-Hiroshima, 739-8527 Japan

Phone : +81-824-24-7662 (Watanabe), -7661 (Kobayashi) Facsimile : +81-824-22-7028

E-mail : {toshi, watanabe}@infonets.hiroshima-u.ac.jp

Abstract

There are two kinds of k -layer via minimization problems: unconstrained via minimization problem (k UVM) and constrained via minimization problem (k CVM). k CVM asks for assignment of wire segments to layers so that the number of vias required in detailed routing is minimized. It has been known that this problem is NP-complete even for 3CVM. The paper proposes a heuristic algorithm PNLA based on partitioning a given set of nets into smaller ones for layer assignment. Experimental comparison with the algorithm of [7] shows that PNLA has higher performance than that of [7].

key words constrained via minimization, layer assignment, breadth-first search, heuristic algorithms, NP-completeness

1 まえがき

VLSI チップやプリント基板のレイアウト設計における対象回路の大規模化は配線層の増加を伴う。このことは異層間の配線を接続するためのビア数の増加を意味する。ビアとは、異層間での配線を行なうためのスルーホールである(図1参照)。しかし、ビア数の増加は生産コストの高騰や配線領域の増大、抵抗や遅延増加等の信頼性低下などを引き起こす。このためビア数が少ないレイアウト設計が要求される。ビア数の少ない配線レイアウトを求める問題を一般にビア数最小化問題という。

2種類のビア数最小化問題がある。一つはビア数が最小になるような配線経路と配線の層割当てを同時に求める問題(UVM)[5]である。もう一つは層割当てを考慮していない配線経路(図2参照)が与えられていることを前提として、この配線経路を変更せずに、ビア数を最小にするような配線の層割当てを求める、制約付きビア数最小化問題(k CVM)である[2, 3, 4, 6, 7, 10, 12]。配線に使用可能な層数 k を明示して、それぞれ k UVM, または k CVMと表す。

一般的に配線レイアウト設計では、ビア数の少ないことだけでなく、高い結線率や、総配線長の短いこと、などが要求される。しかし、ビア数最小化を考慮しながら、このような要求を満たした配線レイアウトを求めることは非常に困難な問題である。従って、結線率や、総配線長の点で良い結果を与える配線レイアウトをまず求め、これに基づいてビア減少を考える、という2段階的解決法が考えられる。これにはUVMを2段階的に解くことも含まれており、この後半の操作にCVMが必要となってくる。

UVM に対する既知結果として、[9]で2UVMがNP-completeであることが証明されている。また、[5]で2UVMに対する発見的解法が提案されている。一方、CVMに関しては、 $k=2$ で任意のネットの端子数が3以下の場合に、最大カット問題への帰着により最適解を求める多項式時間算法が文献[4, 10]で提案されている。しかし、 $k=3$ の場合でさえもNP-completeであることが[3]で証明されている。さらに、対象とする配線レイアウトをHVH型に限定しても $k=3$ であればNP-hardであることが[1]で証明されている。HVH型の配線レイアウトとは、奇数層では水平方向の配線のみが許され、また偶数層では垂直方向のみの配線が許される、というレイアウトである。これに対し、[11]で $k=3$ の場合に対し、Segment-Crossing Graph(後述)を用いた発見的解法が提案されている。 $k \geq 3$ に対しては、[7]で発見的解法が提案されているが、 $k=3$ については[11]の方がはるかに良い解を求めることが実験的に示されている。

本研究では、 $k \geq 4$ なる k CVMに関して、ネット集合をいくつかの集合に分割し、それらに対して $k=2, 3$ の場合の k CVMの解法[10, 11]を用いることにより解を求める発見

的解法PNLA (Partition Nets to Layer Assignment) を提案し、その性能を実験的に評価する。実験では、 $1 \leq k \leq 12$ の場合について、300個のデータ(ネット数50, 100, 150各々100個ずつ)に対して[7]の手法との比較実験を行なった。その結果、提案手法PNLAのビア減少率が平均25%程度[7]よりも良いことが確認できた。

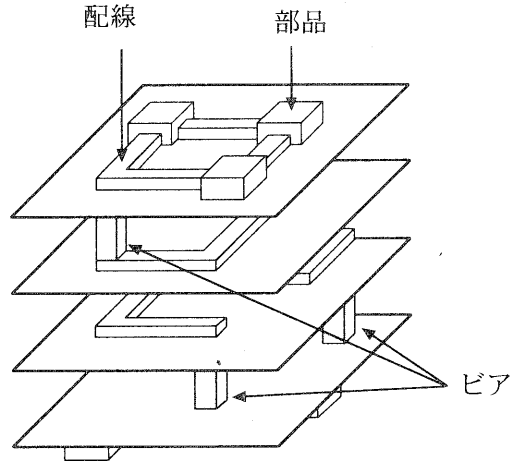


図1: 1枚の多層基板の例(見易いように別々の層として離して描いている)

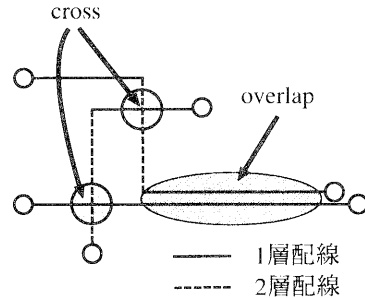


図2: 層割当てを考慮していない配線レイアウト

2 諸定義

本手法では、多層からなる1枚のプリント基板を想定し、配線は全ての層で行ない、部品配置は最上層、最下層のみに限定する(図1参照)。

配線経路において、ネットの曲がり角を junction と呼ぶ。また、ネットの端子と junction, または junction と junction を結ぶ配線線分を segment と呼び、segment また

はネットが異なる層で交わることを **cross**、同じ方向で重なっていることを **overlap** と呼ぶ (図 2 参照)。

配線層が多層になれば、ビアと segment が交わるが生じる。これを **end-cross** と呼ぶ。例として、図 3 に end-cross が生じている 3 層のレイアウトを示す。図 3 の場合、中間層で配線しているネットは、どの層に振り分けても cross が生じる。また end-cross 防止の扱いが組み込まれているのは [11] のみである。

提案手法では、end-cross 防止のための対策をまだ組み込んでおらず、これは今後の課題として挙げられる。

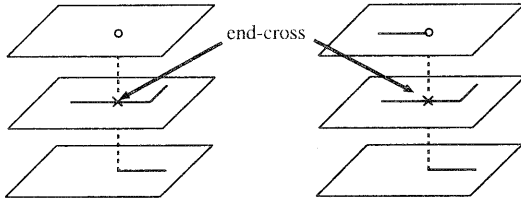


図 3: end-cross の例

3 グラフモデル

[2, 3, 6, 7, 11] 等で提案されている発見的解法では、与えられたレイアウトをグラフに変換し、各々の手法を用いてビア数最小の層割当てを求めている。グラフモデルとして、[2] で Via-Crossing Graph (VCG) が、[7] で Segment-Crossing Graph (SCG) が提案されている。さらに、SCG を用いた解法が [3, 6, 7, 11] で提案されている。また、[11] では end-cross 防止のために、SCG に改良を加えたグラフを提案している。以下に、提案手法で用いる Net-Crossing Graph (NCG) と、実験の比較対象として用いた [7] で提案されている SCG について説明する。

Net-crossing graph (NCG)[2]:

各ネットを頂点とし、ネット同士が cross, または overlap していればそのネットに対応する頂点間に辺を付加する。例えば図 4 の配線レイアウトに対する NCG は図 5 となる。提案手法 PNLA では、ネット集合を分割して各々を 2CVM, 3CVM として解くことにより、 $k \geq 4$ の場合の k CVM を解く。このネット集合の分割を行なう際に NCG を用いる。

Segment-crossing graph (SCG)[7, 11]:

各 segment を頂点とし、segment が cross または overlap していれば、その segment を表す頂点間に辺 (cross edge) を付加する。また、junction でつながっている segment を表す頂点間に辺 (via edge) を付加する (図 6 参照)。

[7] の手法では、上述の end-cross の発生を防ぐ対策は考慮されていない。一方、3CVM に対する発見的解法 VMBF[11] では、end-cross が生じることを防止するために、SCG に “adjacent via edge” という新たな辺を付加することにより、Modified Segment Crossing Graph (MSCG) を提案している (図 7 参照)。adjacent via edge とは、end-cross が生じている segment 対を表している頂点間に付加する辺であり、この頂点対が表している segment を同層または隣接層に割当てることにより、end-cross を回避している。

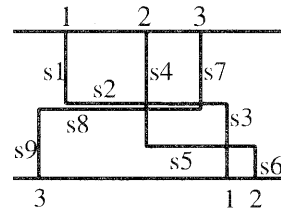


図 4: 3 層配線レイアウトの例

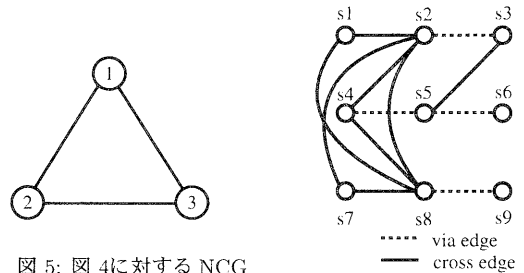


図 5: 図 4 に対する NCG

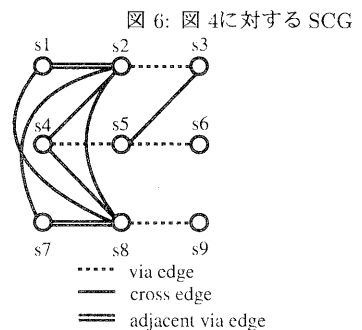


図 6: 図 4 に対する SCG

図 7: 図 4 に対する MSCG

4 提案手法 PNLA

k CVM ($k \geq 3$) に対する発見的解法 [7] では、 k CVM を、次に示す「SCG の頂点への k 色-coloring 問題」に帰着さ

せ解を求めている。すなわち、

“SCG の頂点に対し、cross 辺の両端点は必ず異なる色に、またビア辺の両端点は可能な限り同色になるような k 色の coloring を求めよ。”

ここでの色は、segment を割当てる層を表す。この手法は単純な greedy 法であり、層数が増えるにしたがって結果が悪くなるのが容易に予想される。実際、実験では k の増加に伴って解の精度がかなり悪くなっている。

本稿で提案する手法 PNLA では、ネット集合をいくつかの集合に分割し、各々のネット集合に対して、2CVM の最適解法 [10]、または、現在最も性能の良いと思われる 3CVM の発見的解法 [11] を用いて解を求めることにより、 k CVM ($k \geq 4$) の解を得る。

つまり、 k CVM ($k \geq 4$) を、ネット集合を分割するための coloring (以下、global coloring と呼ぶ) と、分割後の同じ集合に含まれるネット集合に対して、実際に配線層を決定するための coloring (以下、local coloring) の 2 段階 coloring 問題に帰着させる。

今回は、local coloring に 2CVM の最適解法 [10] を用いる場合を想定したネット分割法を報告する。必要ならば、分割後のネット集合に 3CVM の発見的解法 [11] は適用できる。しかし、これを用いたときに有効であると考えられるネット集合分割法の提案は、今後の課題とする。

4.1 PNLA の基本アイデア

分割したネット集合内で、ネット交差数の増加に伴ってビア数が増加することは予想できる。しかし、単純にネット cross が増加しても、ビア数の増加が生じるとは限らない。例えば、図 8、図 9 はいずれも 2 層配線レイアウトで、交差数は同じであるが、図 8 ではビアが生じ、図 9 ではビアが不要である。

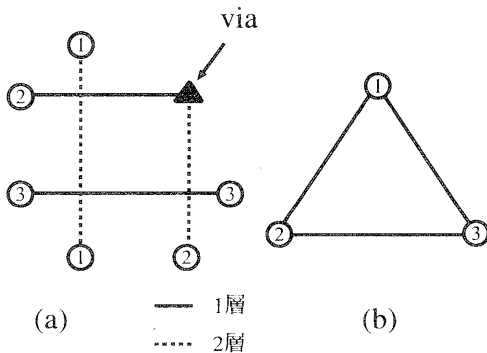


図 8: ビアが生じる例 (a) 2 層配線レイアウト (b) 対応する NCG

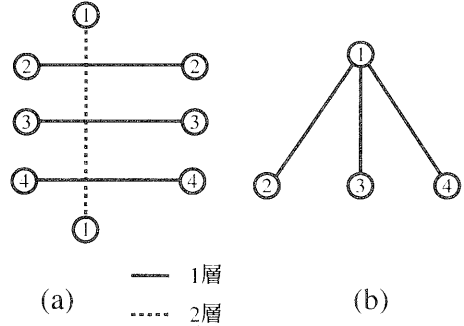


図 9: ビアが生じない例 (a) 2 層配線レイアウト (b) 対応する NCG

以下、local coloring において 2 層での配線層割当て、すなわち 2CVM を解くこと、を前提にネット集合の分割を考える。このとき、ビアが生じないということは、それらのネット集合に対する NCG が 2 部グラフになることに同値である。言い換えると、全ての隣接頂点对が異なる色で coloring できることである。また、グラフが 2 部グラフであるとは、そのグラフに奇数サイクルが存在しないということである。

よって、global coloring では、同色の点からなる頂点集合から誘導される部分グラフが、奇数サイクルをなるべく含まないような coloring を行なう必要がある。

ここでの global coloring 問題 (ネット集合分割問題) を以下のように定義する：

(Global coloring)

“NCG が与えられたとき、そのグラフ内に同色に coloring された奇数サイクルがなるべく少なくなるような coloring を求めよ”。

提案手法 PNLA は、local coloring に 2CVM の最適解法を用いるとき有効である考えられる。 $k \geq 3$ の k CVM で問題となるのは、global coloring で同じ集合に振り分けられた頂点集合から誘導される部分グラフの中に、頂点数が 4 の完全グラフが含まれる場合である。3CVM の発見的解法 [11] を有効に用いるには、この状況を避けるネット集合分割手法が必要となる。このことは、稿を改めて報告する予定である。

4.2 提案手法 PNLA の詳細

以下に、まず提案手法の概要を示す。その後で、主要ステップを説明する。

1. 初期レイアウトから NCG を作成。
2. 前処理。

3. 非可成分抽出.
4. 各非可成分毎に global coloring を行なう.
5. global coloring で同色の頂点の集合により誘導される部分グラフ毎に local coloring を行なう.
6. 前処理で取り除いた頂点への coloring.
7. step. 4での global coloring の後処理で取り除かれた各ネットに対し, 層割当てを行なう.

4.2.1 Step. 2 (前処理)

[ネット集合を分割する数/2] より小さい次数の頂点 v の隣接頂点がどのような色に塗られてもそれら以外の色 c に塗ればネットの交差を避けることができる. よって, 前処理としてこのような頂点は除去し, 最後にそれらの頂点に coloring を行なう.

4.2.2 Step. 4 (global coloring)

以下に, global coloring の詳細について示す.

(頂点のレベル分け)

各非可成分において, BFS による各頂点のレベル分けを行なう. 但し, BFS の出発点は最大次数の頂点とする. ここでのレベルとは, BFS 木における根からの深さから 1 だけ加えた値である (図 10 参照).

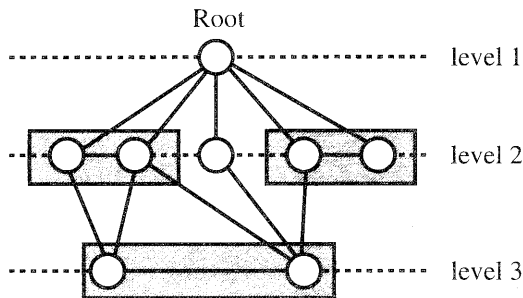


図 10: BFS による NCG の頂点のレベル分け

(global coloring)

上の通り, global coloring で避けなければならないのは, NCG において同色の頂点から誘導される部分グラフが奇数サイクルを持つことである. 頂点のレベル分けで BFS 木を用いた理由は, NCG において奇数サイクルが生じる場合, 奇数サイクル上の 1 辺が同レベル間での辺として現れるからである (図 10 斜線部). よって, ここでの Coloring の基本的な考え方は, 同レベル内の隣接頂点をできる限り異なった色にしようとするところである.

以下に, global coloring のルールを示す.

- 同レベルの頂点間に辺が無い頂点は, できる限り親と異なる色を割当てて.

- 同レベルの頂点間に辺が存在する場合, 同レベルの連結成分を取り出しそれに対し再帰的に “頂点のレベル分け”, “頂点への色付け” を行なう.

ここで, 再帰的 BFS を行なうときの開始頂点は以下の優先順位 (1 が最も高い) に従って選ぶものとする:

1. 最も多くの色と隣接している頂点.
2. 下のレベル内の点を結び辺が最も多く接続している頂点.
3. 次数の最も大きい頂点.

(global coloring の後処理)

前述の global coloring では, step. 5 において, 以下に示すような不都合が生じる可能性がある:

同一グリッド上で配線の重なり (cross, overlap) が配線層数以上になる場合.

例えば, local coloring で 2 層配線 (2CVM) を行なうとき, ネットの同一グリッド上での重なりが 3 以上であれば, 2 層でのネットの層割当ては明らかに不可能である.

このような場合に対処するために, 次のような後処理を行なう. global coloring の結果, 分割された配線層数以上の cross または overlap が生じているネット集合内から適当にネットを取り除く. 取り除いた各ネットに対しては, local coloring 終了後, step. 7 で配線の層割当てを試みる.

4.2.3 Step. 5 (local coloring)

Local coloring は, global coloring により同色に塗られた頂点から誘導される部分グラフに対して行なう. 以下では, 今回の実験で local coloring に用いた 2CVM に対する最適解法 [10], 3CVM に対する発見的解法 [11] を簡単に説明する.

(2CVM に対する最適解法 [10])

この手法では, 初期レイアウトから “layout graph” を作成し, layout graph を “residue graph” へ変形する, という 2 段階のグラフモデル化を行ない, residue graph の頂点に対して, 2 色の coloring を行なう. 簡単に, これらのグラフについて述べる (詳細は [10] 参照).

layout graph: 配線が cross している場所を頂点とし, そのような頂点間に conflict edge を付加する. そして, 同じネット上で隣接している頂点間には, continuation edge を付加する. conflict edge で隣接している頂点対は必ず異なる色で coloring を行い, また continuation

edgeで隣接している頂点間はあるべく同色で coloring を行う。

residue graph: layout graph の conflict edge で隣接しているような頂点の集合から代表頂点の一つを選び、この頂点集合を代表頂点に縮約する。continuation edges の両端点が別々の (縮約される) 頂点集合に属していれば、縮約後の頂点間に辺を付加し、辺には両端点を同層に配線したとき増加するビア数を重みとして与える。このグラフは平面的グラフになることが特徴である。

Residue graph の頂点に対して、2 色 coloring を行なうということは、residue graph の頂点集合を 2 分割することに等しい。2 つの集合に分割されたとき、同じ集合内の辺重みの総和が必要なビア数になる。逆に考えれば、集合間の辺重みの総和を最大になるような頂点集合分割を行なえば、ビア数最小のレイアウトが得られる。すなわち、“平面グラフの最大カット問題”を解けば良い。この問題に対する最適解は、多項式時間で求められることが知られている [8]。

(3CVM に対する発見的解法 [11])

この手法の主な特徴は、

1. adjacent via edge (Section 3 参照) を用いることにより、end-cross を考慮している点、
2. ビア数の減少が最優先されるように MSCG に対して幅優先探索 (BFS) を利用している点、

の 2 つが挙げられる。また、この手法では end-cross が生じてしまった場合以外は、ビアを置く候補を junction 上に限定している。

この手法の概要を以下に示す。

1. 初期レイアウトから MSCG を構成する。
2. 幅優先探索 (BFS) に基づく Global Sense Algorithm の実行。
3. 後処理。
4. Local sense algorithm の実行。

Step. 2 の Global sense algorithm は、“Select”、“Coloring”の 2 段階に分けられる。Select では、MSCG の頂点に対して、BFS を用い各頂点をレベル分けする。そして、同一レベルを持つ頂点集合の中から以下で示す優先順位に基づき頂点を選び出すことを繰り返す (詳細は [11] 参照)。

1. その頂点の親と adjacent via edge で連結している頂点。
2. その頂点の親と via edge で連結している頂点。
3. その頂点の親と cross edge で連結している頂点。
(以下、省略)

Coloring では、Select で選ばれた頂点に対し以下で示す優先順位に基づき頂点への coloring を行なう。

1. cross edge で接続されている頂点対は、必ず異なった色に coloring する。
2. adjacent via edge で接続されている頂点対は同色に、または隣接している層を表す色に coloring する。
3. via edge で接続されている頂点対は、できる限り同色に coloring する。

また Local sense algorithm は、Global sense algorithm より得られたレイアウトに対して適用する。全ての segment を一つずつ調べ、取り除くことができるビアがあれば取り除く、という後処理である。

5 実験結果

5.1 実験概要

提案手法 PNLA と、[7]の手法をパーソナルコンピュータ (CPU PentiumIII 500MHz, OS FreeBSD3.2) 上で C 言語にて実装し、比較実験を行なった。入力データは 6 層、8 層、12 層の HVH 型のランダムデータ (ネット数は 50,100,150 の 3 種類) を用いた。今回、作成したランダムデータは同グリッド上での重なりが 6, 8 または 12 というデータであり、配線を行なうには少なくとも指定した層数は必要となるデータである。但し、指定層で配線できるとは限らない。またビアは全てスルーホールビアとし、end-cross は生じていないものを用意した。

実験の評価基準の 1 つとして、以下で定義するビア減少率 D_v (%) を採用した。この値は、初期レイアウトのビア数からどれくらいビアが減少したかを示すものであり、値が大きいほど良い結果が得られたことを示す：

$$D_v = \frac{(\text{初期レイアウトのビア数}) - (\text{計算後得られたビア数})}{(\text{初期レイアウトのビア数})} \times 100$$

5.2 実験結果

表 1 に、ネット数が 50, 100, 150 であるデータ各 100 個に対する D_v と計算時間の平均値を示す。図 11 に、指定層数が 12 で、ネット数が各々 50, 150 であるデータ各 100 個に対して、最も少ないビア数で層割当てが得られたデータ

表 1: 減少率 D_v と CPU 時間に関する実験結果のまとめ

	Net 数	(6 層)			(8 層)			(12 層)			
		2 層 × 3	3 層 × 2	[7]	2 層 × 4	2 層 + 3 層 × 2	[7]	2 層 × 6	2 層 × 3 + 3 層 × 2	3 層 × 4	[7]
D_v (%)	50	61.2	77.5*	54.3	64.5	70.7*	51.2	65.4	70.9	77.2*	40.9
	100	58.4	67.9*	46.1	60.5	69.8*	48.3	62.1	63.4	70.7*	38.3
	150	57.2	64.3*	37.2	60.2	65.4*	40.8	59.8	61.3	65.4*	35.5
CPU (s)	50	3.0	0.4*	5.4	4.2	1.3*	7.4	9.2	5.6	3.1*	10.5
	100	5.3	1.0*	13.1	9.5	2.3*	12.9	15.9	9.7	3.8*	13.2
	150	7.2	1.9*	19.3	12.1	4.8*	17.4	17.4	15.7	6.8*	16.8

(*: 最も良い結果を表す。)

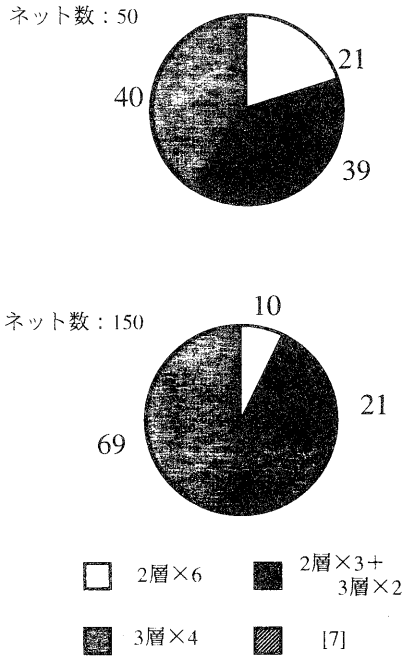


図 11: 12 層以上必要なデータに対して、ピア数が最も少ない層割当てが得られたデータ数 ([7] はそのようなデータ数は 0 である。)

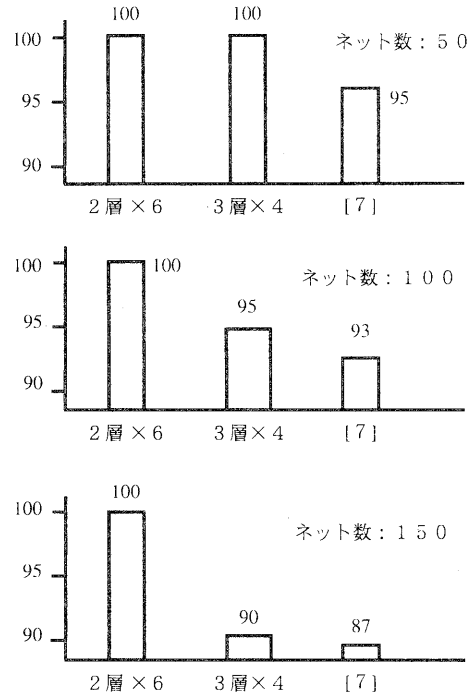


図 12: 12 層以上必要データに対する求解率

5.3 考察

数 (superior) を示す。但し、表 1、図 11 に示した、 D_v と計算時間の平均値、superior の算出には、表 1 に示す層分割に基づく PNLA すべて、および [7] の手法、のいずれを用いても、それぞれ指定した層数での層割当てを求めることができたデータのみを用いた。

図 12 には指定層数が 12 層、ネット数が 50, 150 であるデータに対する求解率を示す。求解率とは、指定した層数での層割当てが可能かどうか分からないデータに対して、どれくらい層割当てを求めることができたかを示すものである。但し、これは上述のランダムデータの中で、表 1 に示す層分割に基づく PNLA、または [7] の手法、のいずれかにより、指定した層数で層割当てが可能であったデータ 100 個に対して実験を行なった。

表 12 より、ネット集合を 2CVM として解くことを想定してより小さな集合に分割し、各々に 2CVM の最適解法 [10] を適用する PNLA が最も求解率が良いことが分かる。この理由として、[7, 11] の手法では junction 上にはしかピアを置くことができないのに対し、[10] の手法では segment の途中にもピアを置くことができるためであると考えられる。

表 1 に示すように、全てのデータで [7] の手法より PNLA が良い結果を得た。特に、層数が増えた場合、[7] の D_v が著しく悪くなっていることがわかる。これにより、 $k \geq 4$ なる k CVM に対して PNLA がより高い性能を有することがわかる。

また、分割で生ずるネット集合の数と各集合内のネット数に関しては、ネット集合を 2 層用の小さな集合に数多く

に分割するよりは、できる限り3層用の少し大きめのネット集合に数少なくに分割した方が、ビア減少率、計算時間の点で良い結果が得られた。すなわち、 k CVM($k \geq 4$)のネット集合を、あまり多くの小さなネット集合に分割すると、ビア減少率、計算時間が悪くなるものと考えられる。

このことから、本稿の $k \geq 4$ に対するPNLAを適用することを前提に、ネット集合を大きめの集合へ数少なく分割することが考えられる。但し、 k が大きくなるとPNLA自体の性能が低下してくるものと思われる。どのくらいの大きさの k CVMを解くことを前提にネット集合を分割することが解法全体の性能を最も高くするか、は今後明らかにして行く予定である。

6 まとめと今後の課題

$k \geq 4$ の場合の k CVMに対し、ネット集合分割に基づく発見的解法PNLAを提案し、その性能を実験的に評価した。

今後の課題としては、前節の終りで述べた課題以外に

- さらに多くのネット数、層数に対する追加実験、
- ネット数での比較実験の他に配線のcross数による比較実験、
- end-crossを考慮した手法の提案、
- local coloringで3CVMを用いるときの、有効なネット振り分け手法の提案、

等が挙げられる。

謝辞

本研究の一部は文部省科学研究費補助金 特定領域研究B(2) No. 10205219の援助を受けたことを記し、謝意を表す。

参考文献

- [1] K. Ahn and S. Sahni, "Constrained Via Minimization", *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, Vol. 12, No. 2, pp. 273-282, 1993.
- [2] K. C. Chang and H. C. Du, "Layer Assignment Problem for Three-Layer Routing", *IEEE Transactions on Computers*, Vol. 37, No. 5, pp. 625-632, 1988.
- [3] K. E. Chang, H. F. Jyu and W. S. Feng, "Constrained via minimization for three-layer routing", *Computer-Aided Design*, Vol. 21, No. 6, pp. 346-354, July/August 1989.
- [4] R-W Chen, Y. Kajitani and S-P Chang, "A graph-Theoretic via Minimization Algorithm for Two-layer Printed circuit Boards" *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. CAS-30, No. 5, pp. 284-299, 1983.
- [5] J. Cong and C. L. Liu, "On the k-Layer Planar Subset and Topological Via Minimization Problems", *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, Vol. 10, No. 8, pp. 972-981, 1991.
- [6] S. C. Fang, K. E. Chang and W. S. Feng, "Via Minimization with Associated Constraints in Three-Layer Routing Problem", *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, pp. 1632-1635, 1990.
- [7] S. C. Fang, K. E. Chang, W. Shiung and S. J. Chan, "Constrained Via Minimization with Practical Considerations for Multi-Layer VLSI/PCB Routing Problems", *Proceedings of 28th ACM/IEEE Design Automation Conference*, pp. 60-65, 1991.
- [8] F. Hadlock, Finding A Minimum Cut Of A Planar Graph In Polynomial Time, *SIAM Journal on Computing*, VOL 4, No 3, September 1975. pp. 221-225.
- [9] M. S. Malgorzata, "An Unconstrained Topological Via Minimization Problem for Two-Layer Routing" *IEEE Transaction on Computer-Aided Design of Intergrated Circuits and Systems*, pp. 184-190, 1984.
- [10] R. Y. Pinter, "Optimal Layer Assignment for Interconnect", *Journal of VLSI and Computer Systems*, Vol. 1, No. 2, pp. 123-137, 1984.
- [11] K. Takahashi and T. Watanabe, "A Heuristic Algorithm to Solve Constrained Via Minimization for Three-Layer Routing Problems" *Proceedings of 1998 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, pp. VI-254-VI-256, 1998.
- [12] X. M. Xiog and E. S. Kuh, "The Constrained Via Minimization Problem for PCB and VLSI Design", *Proceedings of 25th ACM/IEEE Design Automation Conference*, pp. 573-578, 1988.