共通メモリアクセス競合の近似解析

能上慎也　　住田修一
ＮＴＴ電気通信研究所

１．まえがき

共通メモリへのアクセス競合は、マルチプロセッサ型の計算機や交換機の性能に大きな影響を与える要因の一つである。このため、従来からアクセス競合に関する研究は活発に行われ、多くのモデル* や解析手法が提案されている（文献[1] 及びその引用文献参照）。また、これらの結果は、実用システムの性能評価に利用され、その有効性が確認されている。

しかし、これらのモデルを、(i) プロセッサ数やメモリモジュール数が多い場合、(ii)各プロセッサから共通メモリへのアクセス率が互いに異なる場合、に適用すると、モデルを規定する状態の数が極めて大きくなるため厳密解析が難しい。機能分散型の計算機や交換機のように、各プロセッサから共通メモリへのアクセス率が互いに異なるようなシステムも実際には多いので、(i) または(ii)の場合に対して精度の良い近似解法を用意しておくことは重要である。このような方向の研究として文献[2],[3],[4] がある。

本論文では、共通メモリへのアクセス頻度が異なる２つのプロセッサ群（ここでは同一のアクセス頻度をもつプロセッサを１つの群とみなす）が単一バスで結合されているマルチプロセッサシステムに対して、近似解析手法を提案する。まず、共通メモリアクセス競合を、閉鎖形の待ち行列網モデル（ＱＮＭ）にモデル化する。ここで、共通バスの保留時間は一定とする。このＱＮＭは、積形式解を持たないＱＮＭであり厳密解析は難しい** （文献[5]）。そこでここでは近似解法を提案する。近似解法の基本的アイデアは、複数台のプロセッサをそれと等価な一台のプロセッサに置き換えることにある。このような等価変換の利点は、対象とするモデルにこの等価変換を施すことにより、解析の容易な小規模のモデルが得られ、既知の結果が使えることにある。

近似解析の結果とシミュレーション結果を比較することにより本論文で提案した近似解法の適用領域を明らかにする。

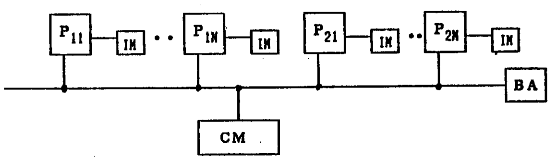
なお、本論文では、プロセッサ群の数が２の場合に限定して議論するが、３以上の場合にもこの近似解法は容易に拡張できる。

２．メモリアクセス競合と待ち行列網モデル

複数のプロセッサと共通メモリが単一のバスで結合されているマルチプロセッサシステム（図１）に対して、以下の仮定を設ける。

（１）２種類のプロセッサ群（P_{11} ～P_{1N} と P_{21} ～ P_{2M}）が共通のバスを介して共通メモリへアクセスする。各プロセッサには、各々独立にアクセス可能な個別メモリ（ＩＭ）が設置され、使用頻度の高いプログラムやデータはＩＭに収容される。

（２）各プロセッサは、互いに非同期に共通メモリへアクセスする。各プロセッサと共通メモリは単一のバスで結合されているため、バス上でアクセスの衝突が生じる。図２に１プロセッサから共通バスへのアクセスのシーケンスを示



P_{ij} : Processor　　ＣＭ : Common memory

ＢＡ : Bus arbiter　ＩＭ : Individual memory

図１　マルチプロセッサシステム

* マルコフ連鎖モデルと待ち行列モデルに大別される。詳細は文献[1] 参照。

**共通バスの保留時間が指数分布に従う場合には、ＱＮＭはＢＣＭＰ型のＱＮＭ（文献[6]）となるため厳密解析は容易である。しかし、保留時間が指数分布に従うという条件は現実的ではない。

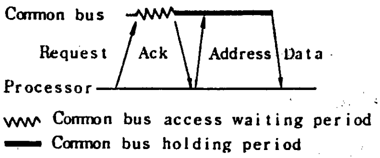
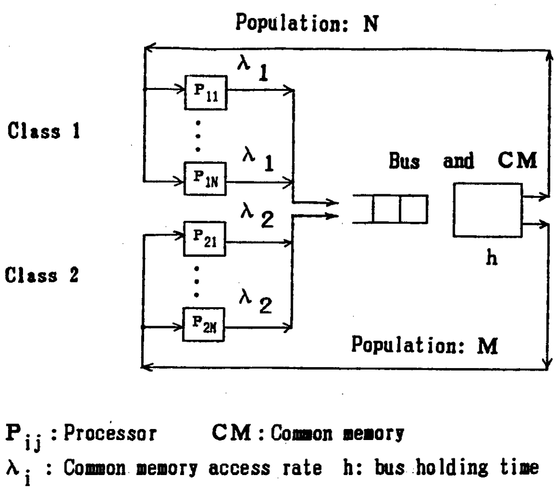


図2　1プロセッサから共通バスへのアクセスの時間経過

す。各プロセッサは、共通メモリへアクセスするとき、使用要求信号（request)を共通バスへ送出する。このとき、共通バスが既に他のプロセッサに使用されていれば、待ち合せとなる。待ち行列は、共通バスの競合整理回路(bus arbiter)にある。競合整理回路は、共通バスの使用が終了するごとに、先着順に待ち行列から次に共通バスの使用を許可するプロセッサを選択して、使用許可信号を送出する。プロセッサは、使用許可信号を受けるとアドレスを共通バスへ送出する。プロセッサが共通メモリから送られてきたデータを受けると共通バスの使用が終了する。

（3）共通バスの使用が終了した後、再び共通バスへアクセスするまでの時間は、プロセッサ群P_{11} ～P_{1N} については平均$1/\lambda_1$ の指数分布、プロセッサ群 P_{21} ～P_{2M} については平均$1/\lambda_2$ の指数分布に従う。共通バスの保留時間は、データの読み出し、書き込み、いずれの場合もプロセッサ群に依らず一定でhとする。



P_{ij} : Processor　　CM : Common memory
λ_i : Common memory access rate　h: bus holding time

図3　待ち行列ネットワークモデル

以上で説明したメモリアクセス競合を、QNMを用いて表わすと図3のようになる。ここで図における呼源数（図中のpopulation）N個の呼を'呼種1'（図中のclass 1）、呼源数M個の呼を'呼種2'と呼ぶ。

3．近似解法

前節で述べた図3のモデルの厳密解を得ることは難しい。そこで、本節では、近似解法を提案する。

近似解法の基本は、図3において呼種1の近似解を得るには、呼種2を1個の呼源に置き換え（図4(b)）、呼種2の近似解を得るには、逆に呼種1を1個の呼源に置き換え（図4(a)）て、それらの厳密解を図3のモデルの近似解とすることにある。但し、ここで1個に置き換えた呼源のアクセス間隔は、指数分布に従うと仮定する。図3を図4のモデルに帰着させると、2呼種有限呼源異保留時間待ち行列モデル

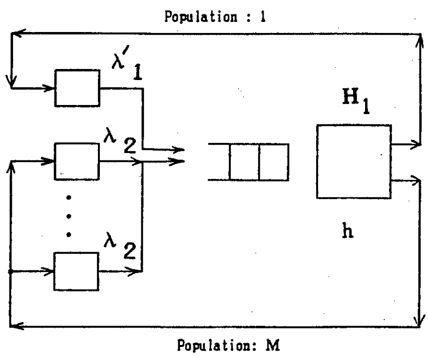


図4（a）M_1 ,M_2 /D_1 ,D_2 /1//1,M モデル

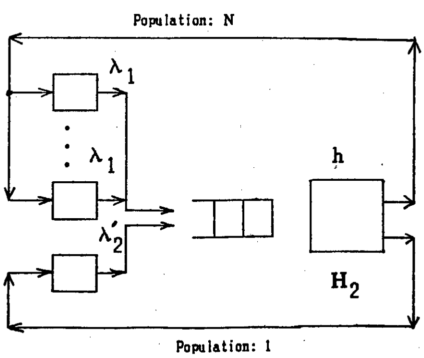


図4（b）M_1 ,M_2 /D_1 ,D_2 /1//N,1 モデル

$(M_1, M_2 / G_1, G_2 / 1 // 1, N)$* の結果（文献[7]）から厳密解を得ることができる（付録参照）。

以下、図４(a) のモデルを導出することを考える。ここで、１個にまとめる呼種に対するサーバーの使用率を等しく保つ等価アクセス率 λ_1'、及び呼種２へ及ぼす影響を考慮した等価保留時間 H_1（後述）をいかに与えるかが問題になる。まず最初の（１）では、等価アクセス率 λ_1' の決定を行なう。次に、（２）では、等価保留時間 H_1 を、図４(a)，(b) を用いて反復法により決定する手順について述べる。

（１）等価アクセス率 λ_1' の決定方法

呼源数を１とした時の等価アクセス率** λ_1' は、次の手順により求められる（H_1 は既知と仮定）。

①図３において、呼種２を取り除いたモデル（M／D／１／／N）を考える（図５）。ここで、次のように記号を定義する。

ρ_1 ：サーバーの呼種１に対する使用率
h ：保留時間
W_1 ：待ち行列での呼種１の平均待ち時間
λ_1 ：系への平均アクセス率
但し、添字は呼種を表わす。
このとき次式が成立している（文献[8]）。

$$W_1 + h + 1/\lambda_1 = hN/\rho_1 \qquad (1)$$

式(1) の左辺は、呼がシステムを１周する時間を表わしており、右辺は１つの呼あたりのスループットの逆数である。従って、サーバーの呼種１に対する使用率 ρ_1 は、次式で与えられる。

$$\rho_1 = \frac{Nh}{W_1 + h + 1/\lambda_1} \qquad (2)$$

ここで、M／D／１／／Nでは、W_1 は次式で与えられる（文献[8]）。

$$W_1 = h\left\{N - 1 - \frac{1-\pi_0}{\lambda_1 h}\right\} \qquad (3)$$

---

* 到着過程／保留時間分布／扱者数／許容系内呼数／呼源数　を表わし、許容系内呼数、呼源数が無限大の場合は省略する。

**実際のシステムにおいては、メモリ保留終了後、再びアクセス要求を出すまでの平均時間の逆数である。

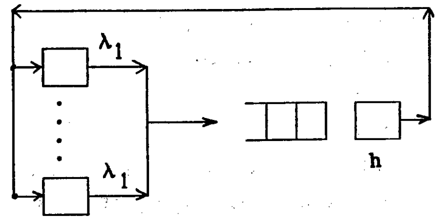


図５　M／D／１／／N　モデル

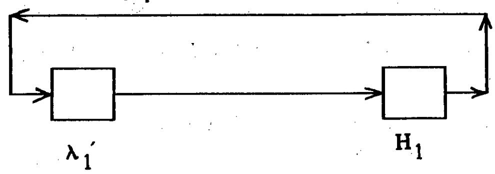


図６　等価モデル

但し、

$$\pi_0 = \left\{\sum_{i=0}^{N-1} \binom{N-1}{i} / C_i\right\}^{-1} \qquad (4)$$

：呼の到着直前の系内呼数が０である確率

$$C_0 = 1,\ C_i = \prod_{j=1}^{i} \frac{\exp(-j\lambda_1 h)}{1-\exp(-j\lambda_1 h)} \qquad (5)$$

②図６のような、呼源数１のＱＮＭを考える。このモデルのアクセス率を λ_1' とすると、使用率 ρ_1' は次式で与えられる。

$$\rho_1' = \frac{H_1}{H_1 + 1/\lambda_1'} \qquad (6)$$

式(2)，(6) より、ρ_1 と ρ_1' を等しいとおくと次式が得られる。

$$\lambda_1' = \frac{\rho_1}{(1-\rho_1)H_1} \qquad (7)$$

従って、図３のモデルが与えられると、式(3)～式(5)、式(7) を用いて図４(a) の近似モデルのアクセス率 λ_1' が求まる。

（２）等価保留時間 H_1 の決定方法

図３のモデルにおいて、呼種２の生起時点における呼種１の残余仕事量を V_1 とする。そうすると、呼種２は呼種１の影響を受けて、呼種１がないときよりも V_1 だけ平均待ち時間が延びる。このように、呼種１が呼種２に与える影響を考慮して、呼種１の保留時間を本来の保留時間より V_1 だけ延ばして与える。ここで、呼種２の生起時点における残余仕事量 V_1 を与えるのは難しいので、近似値として、呼種１だけ

のモデル（図５）の残余仕事量（$=\rho_1 W_1 + \rho_1 h/2$）を用いる。即ち、

$$H_1 = h + V_1 \cong h + \rho_1 W_1 + \rho_1 h/2 \qquad (8)$$

このようにλ_1とH_1を与えることによって図４(a)のモデルの呼種別待ち時間が、付録を用いて求まる。次に図４(b)におけるH_2は、図４(a)の結果を用いることによって決定できる。即ち、図４(a)のW_1が、呼種１の生起時点における呼種２の残余仕事量に等しいので、これを与える。

以下これを繰り返して、反復的にH_1、H_2を与えると、呼種１、２のそれぞれの平均待ち時間が、互いの影響を考慮した近似値としてある値に収束する。

４．数値例

図７に、Ｎ＝４、Ｍ＝２、ｈ＝１としたときの、呼種別平均待ち時間の近似計算値、及びシミュレーション値（９５％信頼区間）を示した。尚、近似計算値は、前値との差が10^{-12}以下になるのを収束条件として求めた。シミュレーション値をみると、サーバーの使用率が増加するにつれ、両呼種の待ち時間も増加しているが、有限呼源である為、ρ（$=\rho_1+\rho_2$）＝0.95付近でもせいぜい保留時間の1.5 ～2 倍ぐらいになっている。

図７(a)では、両呼種に対して良い近似を与えているが、ρが増えるにつれ、やや近似精度は悪化する。

図７(b)は、呼種の区別が無い場合である。この場合には厳密解が得られており、これと比較すると、呼種１と呼種２はそれぞれ異なる値になっていることがわかる。

図7(c),(d)は、ともに呼種１のアクセス率が呼種２より大きい場合である。呼種１に対しては良い近似を与えているが、呼種２では過小評価した値になっている。これは、近似の性質上、１つの呼源とみなす呼種が、呼源数が多くアクセス率が高い場合ほど近似精度が悪くなるからである。

いずれの場合でも、現実に近似式を適用する範囲（$\rho\leq 0.6$ ～0.7 ）では、良い近似を与えているといえる。

５．むすび

本論文では、共通メモリへのアクセス頻度が異なる２つのプロセッサ群が存在する場合の、平均待ち時間に対する近似解析手法を提案した。数値例により、この手法は、比較的負荷の高い領域では誤差があるものの、通常の現実的な負荷の領域（$\rho\leq 0.6$ ～0.7 ）では、十分な近似精度を与えることがわかった。

今後の課題としては、

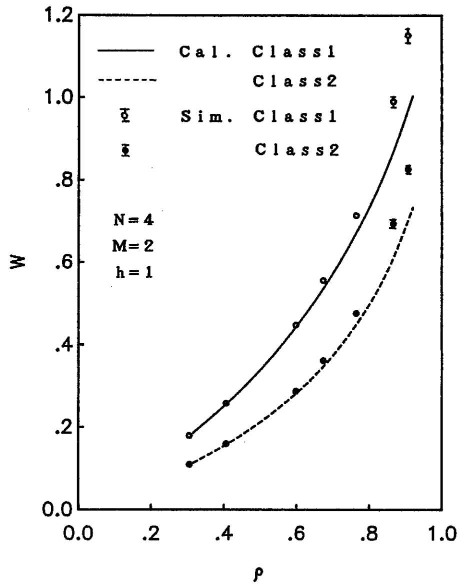
①プロセッサ群ごとに保留時間が異なる場合
②プロセッサ群の数が３以上の場合
③保留時間が一般分布に従う場合

に対する、この近似解析手法の適用が挙げられる。

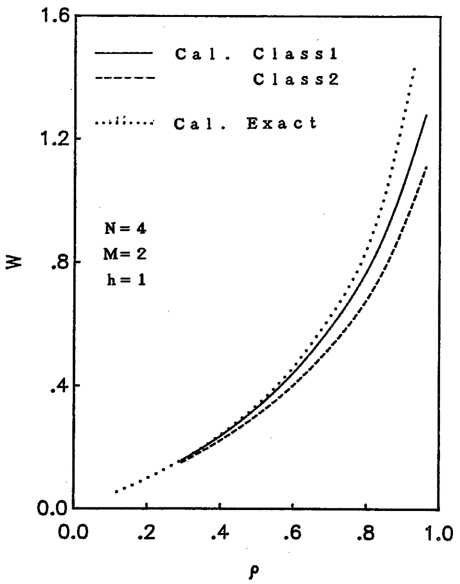
謝辞　本研究を進めるにあたり有益な御助言を頂いた当研究所トラヒック研究室川島幸之助室長、片山勁主幹研究員はじめ関係各位に深謝致します。

参考文献

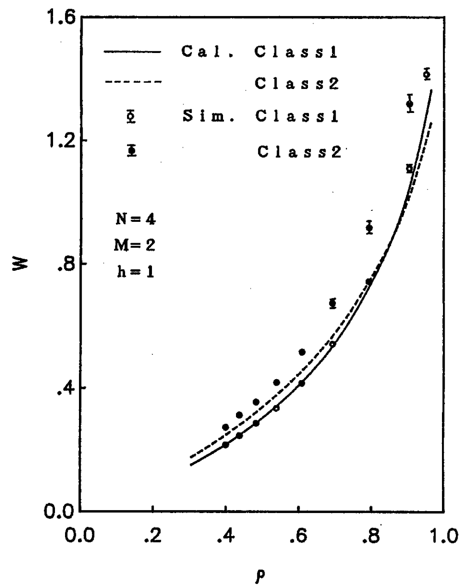
[1] 布谷、住田、橘田：”マルチプロセッサシステムの性能評価”，信学誌,66,12,pp.1261-1266 (1983).
[2] Patel,J.:"Analysis of multiprocessors with private cache memories", IEEE Trans. Comput.,C-31,4,pp.239-248 (1982).
[3] Yen,D.,Patel,J. and Davidson,E:"Memory interference in synchronous multiprocessors systems", IEEE Trans. Comput.,C-31,11, pp.1116-1121 (1982).
[4] 福田：”マルチプロセッサシステムにおける共通メモリ競合問題と平衡点解析”，信学論D,J68-D,8, pp.1441-1448 (1985).
[5] 橘田、川島：”待ち行列ネットワークモデルによる計算機システムの性能評価”，情報処理21,7,pp.743-750 (1980).
[6] Baskett,F.,Chandy,K.M.,Muntz,R.R. and Palacios,J.:"Open,closed and mixed networks with different classes of customers", J.ACM,22,2,pp.248-260 (1975).
[7] 布谷，住田：”マルチプロセッサ制御系トラヒック特性の検討，”通研実報,29,12,pp.2187-2197 (1980).
[8] Takács,L.:"On a stochastic process concerning some waiting time problems," Theory of Probability and its Applications, 2,1,pp.92-105 (1957).



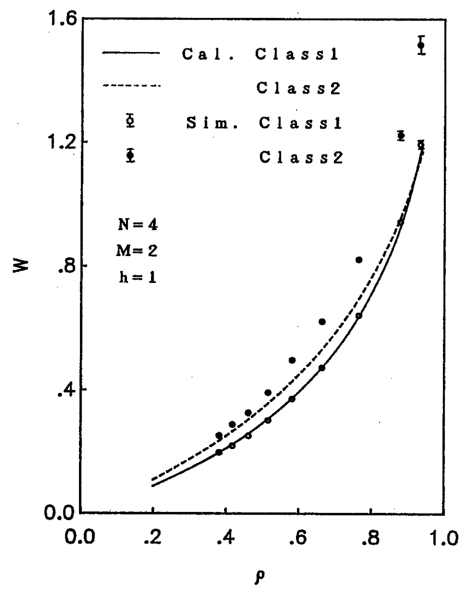
(a)　$\lambda_1 / \lambda_2 = 0.1$



(b)　$\lambda_1 = \lambda_2$



(c)　$\lambda_1 / \lambda_2 = 5$



(d)　$\lambda_1 / \lambda_2 = 10$

図7　呼種別平均待ち時間

《付録》　文献[7] より、$M_1,M_2/D_1,D_2/1//1,N$ の呼種１、呼種２の平均待ち時間 W_1 ，W_2 は次式により与えられる。

$$W_1 = h_1/\rho_1 - h_1 - 1/\lambda_1 \tag{A.1}$$

$$W_2 = N h_2/\rho_2 - h_2 - 1/\lambda_2 \tag{A.2}$$

ここで、ρ_1 ，ρ_2 は次式で与えられる。

$$\rho_1 = \sum_{m=0}^{N} P(1,m) \tag{A.3}$$

$$\rho_2 = \sum_{m=1}^{N} P(0,m) + \sum_{n=2}^{N+1}\sum_{m=n-1}^{N} P(n,m) \tag{A.4}$$

$P(n,m)$は次式で与えられる。

$$P(0,m) = \sum_{k=1}^{m} C_{0,k}(-1)^{m-k}\binom{N-k}{m-k}\cdot\left[1-\exp\{-(\lambda_1+(N-k)\lambda_2)h_2\}\right]/\{\lambda_1+(N-k)\lambda_2\} \quad (1 \leqq m \leqq N) \tag{A.5}$$

$$P(1,m) = \sum_{k=0}^{m-1} C_{1,k}(-1)^{m-k}\binom{N-k}{m-k}\left\{\left[1-\exp\{-(N-k)\lambda_2 h_1\}\right](1-\delta_{N,k})/(N-k)\lambda_2 + \delta_{N,k} h_1\right\} \quad (0 \leqq m \leqq N) \tag{A.6}$$

$$P(n,m) = \sum_{k=n-1}^{m} C_{n,k}(-1)^{m-k}\binom{N-k}{N-m}\left\{\left[1-\exp\{-(N-k)\lambda_2 h_2\}\right](1-\delta_{N,k})/(N-k)\lambda_2 + \delta_{N,k} h_2\right\} + \sum_{k=1}^{n-1} C_{0,k}(-1)^{m+1-k}\binom{N-k}{n-k-1}\left[\lambda_1/\{\lambda_1+(n-k-1)\lambda_2\}\right] \cdot \left[\{1-\exp(-(\lambda_1+(N-k)\lambda_2)h_2)\}/\{\lambda_1+(N-k)\lambda_2\}\right] \cdot \prod_{i=n}^{m}(N-i+1)\lambda_2/\{\lambda_1+(i-k)\lambda_2\} \quad (2 \leqq n \leqq N,\ n \leqq m \leqq N) \tag{A.7}$$

$$P(n,n-1) = C_{n,n-1}\left\{\left[1-\exp\{-(N-n+1)\lambda_2 h_2\}\right]\cdot(1-\delta_{n,N+1}) + \delta_{n,N+1} h_2\right\}/(N-n+1)\lambda_2 + \sum_{k=1}^{n-1} C_{0,k}\cdot(-1)^{n-k-1}\binom{N-k}{n-k-1}\left[-\lambda_1/\{\lambda_1+(n-k-1)\lambda_2\}\right]\cdot\left[1-\exp\{-(\lambda_1+(N-k)\lambda_2)h_2\}\right]/\{\lambda_1+(N-k)\lambda_2\} \quad (2 \leqq n \leqq N+1) \tag{A.8}$$

未知定数 $C_{n,m}$ は次の連立方程式(A.9) ～(A.15) の解である。

$$\sum_{k=1}^{m} C_{0,k}(-1)^{m-k}\binom{N-k}{m-k} = \sum_{k=1}^{m+1} C_{0,k}(-1)^{m+1-k}\cdot\binom{N-k}{m+1-k}\exp\{-(\lambda_1+(N-k)\lambda_2)h_2\} + \sum_{k=0}^{m} C_{1,k}\cdot(-1)^{m-k}\binom{N-k}{m-k}\exp\{-(N-k)\lambda_2 h_1\} + N\lambda_2 P(0)\delta_{m,1} \quad (1 \leqq m \leqq N-1) \tag{A.9}$$

$$\sum_{k=1}^{N} C_{0,k}(-1)^{N-k} = \sum_{k=0}^{N} C_{1,k}(-1)^{N-k}\exp\{-(N-k)\lambda_2 h_1\} \tag{A.10}$$

$$\sum_{k=0}^{m} C_{1,k}(-1)^{m}\binom{N-k}{m-k} = \sum_{k=1}^{m+1} C_{2,k}(-1)^{m+1-k}\binom{N-k}{N-m-1}\cdot\exp\{-(N-k)\lambda_2 h_2\} + C_{0,1}(-1)^{m+1}\left[\prod_{i=1}^{m}(N-i)\lambda_2/(\lambda_1+i\lambda_2)\right]\exp\{-(\lambda_1+(N-1)\lambda_2)h_2\} + \lambda_1 P(0)\delta_{m,0} \quad (0 \leqq m \leqq N-1) \tag{A.11}$$

$$\sum_{k=0}^{m} C_{1,k}(-1)^{m}\binom{N-k}{m-k} + \sum_{k=1}^{n-1} C_{0,k}(-1)^{m+1-k}\binom{N-k}{n-1-k}\cdot\{\lambda_1/(\lambda_1+(n-k-1)\lambda_2)\}\cdot\prod_{i=n-1}^{m}(N-i+1)\lambda_2/\{\lambda_1+(i-k)\lambda_2\} = \sum_{k=n}^{m+1} C_{n+1,k}(-1)^{m+1-k}\binom{N-k}{N-m-1}\cdot\exp\{-(N-k)\lambda_2 h_2\} + \sum_{k=1}^{n} C_{0,k}(-1)^{m+1-k}\binom{N-k}{n-k}\{\lambda_1/(\lambda_1+(n-k)\lambda_2)\}\left[\prod_{i=n-1}^{m}(N-i)\lambda_1/\{\lambda_1+(i+1-k)\lambda_2\}\right]\exp\{-(\lambda_1+(N-k)\lambda_2)h_2\} \quad (2 \leqq n \leqq N,\ n-1 \leqq m \leqq N-1) \tag{A.12}$$

$$\sum_{k=n-1}^{N} C_{n,k}(-1)^{N-k} + \sum_{k=1}^{n-1} C_{0,k}(-1)^{N+1-k}\binom{N-k}{n-1-k}\cdot\left[\lambda_1/\{\lambda_1+(n-1-k)\lambda_2\}\right]\left[\prod_{i=n-1}^{N}(N-i+1)\lambda_2/\{\lambda_1+(i-k)\lambda_2\}\right] = 0 \quad (2 \leqq n \leqq N) \tag{A.13}$$

$$C_{N,N-1} + \sum_{k=1}^{N} C_{0,k}(-1)^{N-k}\{-\lambda_1/(\lambda_1+(N-k)\lambda_2)\} = 0 \tag{A.14}$$

$$\sum_{m=0}^{N} P(0,m) + \sum_{m=0}^{N} P(1,m) + \sum_{n=2}^{N+1}\sum_{m=n-1}^{N} P(n,m) + P(0) = 1 \tag{A.15}$$